I. P. PROCOFIEV
PROFESOR DOCTOR IN ȘTIINȚE TEHNICE

STATICA CONSTRUCȚIILOR

VOL. I.

OFICIUL DE PRESĂ EDITURA ȘI DOCUMENTARE CFR
1950

Scanned with OKEN Scanner

И. П. Прокофьев
Профессор, доктор технических наук

ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ

ЧАСТЬ I

ЧЕТВЁРТОЕ
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ
ИЗДАНИЕ

Утверждено Главным управлением учебными заведениями М П С в качестве учебника для втузов железнодорожного транспорта

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТРАНСПОРТОЕ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНО ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1947

Scanned with OKEN Scanner

I. P. PROCOFIEV

STATICA CONSTRUCȚIILOR

VOL. I.

TRADUCERE DIN LIMBA RUSĂ

OFICIUL DE PRESĂ, EDITURĂ ȘI DOCUMENTARE CFR
1950

Scanned with OKEN Scanner

In lucrarea de faţă este expus în mod sistematic cursul de statică a construcţiilor întocmit în conformitate cu programul analitic al Facultăţilor de Construcţii de pe lângă Institutele de Căi Ferate (din URSS) tratând însă şi problemele stabilităţii şi dinamicii construcţiilor.

Lucrarea este aprobată de Direcţia Generală a Şcolilor de pe lângă Ministerul de Comunicaţii (al URSS) ca manual pentru şcolile superioare de căi ferate.

Traducere : Ing. Negruş Iuri
Revizia tehnică : Ing. Petruşcu Anatolie
Revizia editorială : Ing. Beleş Ioan
Tirajul 3000
Ediţia I
Formatul B 5
Tipărită la 1 Decembrie Imprimeriile „Universal" Satu-Mare
Clasificarea zecimală : 624.041

Scanned with OKEN Scanner

CUVÂNT INAINTE

Ediția de față, a patra, a cursului „Statica Construcțiilor" (prima ediție scoasă de Editura Căilor Ferate) apare în trei părți.

Partea întâia și a doua, ca și în edițiile precedente, tratează alcătuirea și calculul sistemelor static determinate și al sistemelor static nedeterminate. Partea a treia tratează dinamica construcțiilor și stabilitatea lor elastică.

Prima parte a cursului a fost alcătuită pe baza ediției a treia revăzută, introducându-se și unele mici completări.

Ca și în edițiile precedente s'a menținut și în ediția de față principiul de a se asigura posibilitatea utilizării cursului în diferitele Facultăți de Construcții al căror program impune grade diferite de cunoștințe ale Staticei construcțiilor.

In acest scop, chiar în capitolul grinzilor cu zăbrele s'a despărțit în paragrafe speciale problemele relative la grinzile cu bare suplimentare și la grinzile cu sisteme de zăbrele suplimentare, probleme care nu sunt obligatorii pentru unele facultăți ca Edilitate, Hidrotehnică și similarele lor. Pentru aceleași considerente s'a separat în paragrafe speciale și problemele relative la alcătuirea și calculul sistemelor combinate, a metodelor cinematice de calcul etc., care sunt obligatorii pentru Facultățile de Poduri.

Din prezenta ediție s'au înlăturat unele probleme de strictă specialitate, precum și exemplele de calcul prea complicate care, după cum ne-am convins, nu sunt folosite de către studenți.

La revizuirea ediției a treia, s'a ținut seama de toate doleanțele și sugestiile pe care le-am primit dela o serie de persoane, cărora le aduc mulțumiri.

Aduc de asemenea mulțumiri colaboratorilor mei *L. M. Emelianov* și *P. I. Polievco*, care și-au luat sarcina să revadă corecturile.

Prof. I. Procofiev

Scanned with OKEN Scanner

INTRODUCERE

Ca știință „Statica construcțiilor" a evoluat în mod treptat. Ramurile ei s'au desvoltat și s'au adâncit însă în mod neuniform, în raport cu progresul tehnicei fabricării materialelor ce se întrebuințează în construcții și cu desvoltarea industriei.

Deoarece în antichitate se foloseau ca materiale de construcție piatra și lemnul, obținute de-a-dreptul din natură, era natural ca și construcțiile executate din aceste materiale să prezinte în esență forme specifice acestor materiale — arce, coloane din piatră și grinzi de lemn. Viaductele de piatră și podurile boltite în plin cintru, care s'au păstrat până în ziua de azi, ne îndreptățesc să afirmăm că, în antichitate, constructorii nu aveau un fond de cunoștințe științifice, ci se conduceau după experiențele predecesorilor și în parte după intuiția lor proprie.

O construcție nu se proiecta pe bază de calcule, iar dimensiunile ei se determinau după date experimentale, ceea ce, în mod firesc, a contribuit la introducerea unei serii de reguli empirice, precum și la crearea unui șir întreg de ipoteze. Se poate considera că această stare a persistat în tehnică până la începutul secolului trecut.

La începutul secolului XIX, exista deja un număr de ipoteze și de concluzii, stabilite de cugetătorii acestui secol, relative la deformația grinzilor drepte, care au servit ca bază la crearea unei discipline care a primit ulterior numele de „Rezistența materialelor".

Unele din aceste ipoteze și concluzii, care s'au verificat ulterior în mod experimental, s'au păstrat până în timpurile noastre sub formă de reguli constructive.

Insă chiar la mijlocul secolului XIX, constructorii care tindeau să creeze noi tipuri de construcții trebuiau să recurgă la încercări pe modele cu dimensiuni mari.

Neștiind să determine distribuția eforturilor în construcții, constructorii au fost nevoiți să utilizeze mai mult material decât era necesar pentru rezistența lucrării. Insuficiența cunoștințelor se compensa în acest fel printr'o supradimensionare a materialului.

Totuși secolul XIX poate fi considerat ca o perioadă de tranziție în desvoltarea metodelor teoretice de calcul ale construcțiilor.

Desvoltarea industriei, introducerea producției în masă a oțelului (fierului) din care se laminau și fiare profilate a dat un puternic impuls calculului teoretic al construcțiilor.

Scanned with OKEN Scanner

În afară de grinzi drepte, se puteau construi acum din oțel și grinzi cu zăbrele de deschideri mari, care se compuneau din bare lungi cu articulații la extremități. Aceasta a contribuit la desvoltarea teoriei grinzilor cu zăbrele și a stimulat concomitent atât studierea celor mai raționale forme, cât și studiul teoretic al deformațiilor etc.; aceste studii au progresat mult în a doua jumătate a secolului trecut.

La sfârșitul secolului trecut, a apărut în tehnica construcțiilor un material nou, betonul armat, care din cauza caracteristicei lui de monolit, nu se preta să fie aplicat în sistemele cu articulații, ceea ce a îndrumat cugetarea inginerilor spre studiul sistemelor cu bare legate rigid între ele; astfel a apărut teoria cadrelor.

In secolul actual, în urma sporirii importanței sarcinilor fixe și a celor mobile care produc vibrații, a început să se acorde o mai mare atenție calculelor construcțiilor la sarcinile denumite dinamice.

Cu toate că acest mod de calcul al construcțiilor sub acțiunea sarcinilor dinamice nu a luat o desvoltare similară cu aceea a calculelor cu sarcini statice, totuși se pot efectua astăzi asemenea calcule cel puțin cu aproximație.

Sporirea dimensiunilor construcțiilor și introducerea de bare comprimate lungi cu secțiuni relativ mici a impus verificarea stabilității acestor bare, desvoltându-se mult, în ultimul timp, calculele de stabilitate ale sistemelor elastice.

Astfel s'a creat treptat o disciplină care a obținut denumirea generală de „Mecanica construcțiilor" și care se subîmparte în „Rezistența materialelor" și „Statica construcțiilor".

Având ca scop principal studiul realizării construcțiilor alcătuite din diferite materiale, Mecanica construcțiilor a fost nevoită să se îndepărteze de condițiunile reale de lucru, să introducă în teoriile ei o serie de ipoteze simplificatoare, făcând astfel abstracție de unii factori importanți și să ajungă prin aceasta la generalizarea concluziilor.

Primul lucru pe care trebuia să-l facă Statica construcțiilor a fost înlocuirea sistemelor reale prin sisteme teoretice — convenționale, ideale.

Introducerea și studiul sistemelor teoretice — convenționale se bazează pe neglijarea, cu bună știință, în modul de acțiune al unei construcțiuni a influențelor secundare. Acest fapt, care permite să se generalizeze diferitele forme de construcții reale, dă posibilitatea să se caracterizeze cu destulă precizie modul de acțiune al construcțiilor, putându-se trece astfel la determinarea dimensiunilor necesare ale construcțiilor și elementelor lor.

Prin introducerea unor sisteme teoretice se înțelege descompunerea sistemelor în spațiu în sisteme plane, considerarea îmbinărilor nituite sau sudate ca îmbinări articulate, reducerea sarcinilor reale la scheme convenționale etc.

Statica construcțiilor fiind o știință aplicată, care are drept scop studiul corpurilor materiale care nu sunt totdeauna omogene, având coeficienți de elasticitate diferiți, a trebuit să se admită la baza principiilor ei generale o serie de ipoteze și anume:

1) ipoteza că materia este uniform și continuu distribuită în cu-

Scanned with OKEN Scanner

prinsul unui element și că această materie are aceeași elasticitate în toate punctele;

2) ipoteza proporționalității dintre deformații și rezistențe (legea lui Hooke);

3) ipoteza că proprietățile materiei sunt invariabile în timp și că transmiterea forțelor interioare nu este funcție de timp.

Este evident că introducând aceste ipoteze, regulile Staticii construcțiilor sunt aplicabile numai în limitele pentru care ele se pot justifica, adică în limitele acelor rezistențe ale materialului la care deformațiile remanente sunt practic nule, iar deformațiile elastice sunt mici, în raport cu dimensiunile construcției.

Aceste ipoteze au dat posibilitatea să se aplice în calculul corpurilor elastice, care sunt tratate în Statica construcțiilor, unele principii și anume: principiul independenții acțiunii forțelor și a deformațiilor și principiul lui Lagrange sau al lucrului virtual, care spune că lucrul mecanic produs de forțe, pentru deplasări infinitesimale compatibile cu legăturile sistemului, este nul când forțele se găsesc în echilibru.

Aceste două principii sunt principii de bază ale Staticii construcțiilor și pe ele se bazează toate legile ei, care aduc o importantă simplificare în calculul construcțiilor.

Fără îndoială că admițând aceste ipoteze, toate calculele teoriei construcțiilor sunt convenționale.

Intrebuințarea lor este totuși justificată prin aceea că într'o construcție supusă acțiunii sarcinilor, valoarea deformațiilor reale măsurate direct este foarte apropiată de aceea obținută prin calcule.

Aceste ipoteze simplificatoare de calcul au dat însă posibilitatea să se stabilească distribuția reală a eforturilor într'o construcție solicitată de sarcini statice, permițând astfel inginerilor să fie mai îndrăsneți în soluțiile lor și au condus la forme mai raționale și mai economice. In aceasta constă importanța desvoltării Staticii construcțiilor în a doua perioadă.

In stadiul actual de desvoltare a metodelor de calcul, Statica construcțiilor este prima aproximație justificată care înlesnește înțelegerea modului cum acționează o construcție. Ea însăși indică necesitatea unei aproximații a calculelor față de condițiunile reale de acțiune a construcției, ceea ce se poate realiza atât prin desvoltarea calculelor cât și prin introducerea în calculele statice a unor corecțiuni bazate pe studiul experimental al construcțiilor existente sau în curs de executare.

Această sinteză între teorie și practică a introdus în unele calcule statice coeficienți de corecție, a dat posibilitatea să se aprecieze mai just modul de acțiune al unei construcții, permițând astfel, acolo unde se poate, adoptarea unor rezistențe admisibile sporite.

Cercetările științifico — experimentale asupra construcțiilor marchează o nouă perioadă care vine să ia locul celorlalte două perioade (empirică și teoretică). Rolul acestor cercetări este:

— studierea proprietăților fizice ale materialelor și crearea, pe baza acestor cercetări, de materiale noi, cu proprietăți mecanice mai bune;

Scanned with OKEN Scanner

— studierea vibraţiilor construcţiilor provocate de sarcini dinamice ;

— studierea stabilităţii elastice etc.

Cercetări importante în acest domeniu, care au dat rezultate preţioase, au fost făcute în ultimii 30 de ani de către savanţii din URSS.

CAPITOLUL I

NOŢIUNI GENERALE

§ 1. Obiectul Staticii construcţiilor

Denumirea de *construcţie* poate fi atribuită oricărei lucrări executate de mâna omenească. In limbaj tehnic, prin această denumire se înţelege o construcţie ale cărei forme şi dimensiuni sunt determinate pe bază de calcule tehnice şi de economie.

Condiţiile de existenţă ale oricărei construcţiuni impun ca sub acţiunea forţelor exterioare, *rezistenţa* şi *stabilitatea* fiecărui element în parte să fie asigurate. Totuşi nu se poate studia stabilitatea şi rezistenţa unei construcţii, dacă nu se cunoaşte, în prealabil, acţiunea forţelor exterioare precum şi distribuţia, în elementele construcţiei, a eforturilor interioare şi a momentelor produse de forţele exterioare şi de sarcinile ce acţionează asupra ei.

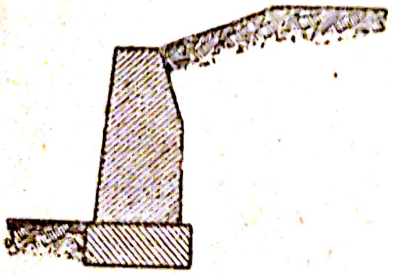


Fig. 1

Fig. 2

De aceea, *Statica construcţiilor are de scop studierea distribuţiei eforturilor interioare în elementele construcţiilor şi determinarea valorii eforturilor în ipoteza cea mai defavorabilă de încărcare.*

Deoarece însă, orice construcţie trebue să fie nu numai rezistentă dar şi economică, adică să nu aibă dimensiunile exagerate, *a doua sarcină a Staticii construcţiilor este studiul formelor şi dimensiunilor raţionale ale construcţiilor*, care variază simţitor în raport cu calităţile tehnice ale materialelor de construcţie utilizate.

Construcţiile din piatră şi beton, adică din materiale care rezistă numai la eforturi de compresiune, se pretează la forme masive: ziduri de sprijin (fig. 1), bolţi (fig. 2) etc., la care dimensiunile transversale sunt importante în raport cu lungimea construcţiei.

Scanned with OKEN Scanner

Alte construcţii caracterizate prin două dimensiuni mari (lungimea şi lăţimea) şi a treia relativ mică (grosimea) lucrează în mod curent la încovoiere, de exemplu dalele, plăcile etc. (fig. 3). Din această cauză materialele indicate pentru asemenea construcţii sunt fierul, betonul armat şi lemnul.

Alte construcţii sunt alcătuite din bare care au dimensiunile secţiunii transversale mici în raport cu lungimea lor. Elementele unor astfel de construcţii lucrează la compresiune şi tensiune, de aceea ele se construesc din materiale care rezistă bine la acest fel de eforturi ca : fierul, lemnul, betonul armat etc.

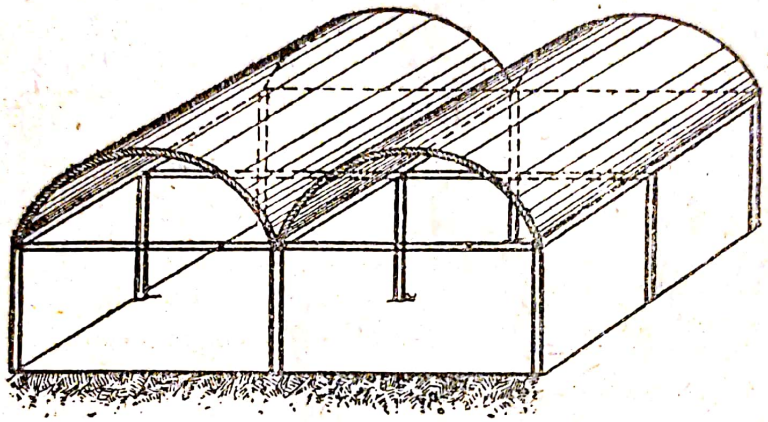


Fig. 3

In această categorie se cuprind : grinzile, stâlpii (fig. 4), grinzile cu zăbrele (fig. 5) etc.

In fond, toate construcţiile au câte trei dimensiuni, fiind astfel sisteme în spaţiu. La majoritatea construcţiilor însă, modul de acţiune al sarcinilor care le solicită şi forma elementelor care le alcătuesc permit descompunerea lor în *sisteme plane,* adică în astfel de sisteme la care o dimensiune este foarte mică în raport cu celelalte două, asupra căror sisteme acţionează forţe exterioare situate fie chiar în planul lor, fie în plane paralele cu el.

Astfel de exemplu, un pod oarecare, care este un sistem în spaţiu (fig. 6) solicitat de sarcini verticale din greutatea proprie, de greutatea convoiului şi de sarcini orizontale datorite presiunii vântului, poate fi descompus în următoarele sisteme plane :

1. Secţiuni transversale a care corespund numărului antretoazelor $A\ B$ şi care preiau sarcinile uneia sau mai multor osii ;

2. Două grinzi cu zăbrele verticale AA' şi BB' dintre care fiecare preia jumătate din greutatea proprie şi jumătate din sarcina mobilă, această sarcină fiind transmisă în planul grinzilor prin intermediul antretoazelor $A\ B$.

3. Două grinzi cu zăbrele orizontale în planele $A\ B$ şi $A'\ B'$ care preiau presiunea orizontală produsă de vânt w pe suprafeţele laterale ale podului.

Scanned with OKEN Scanner

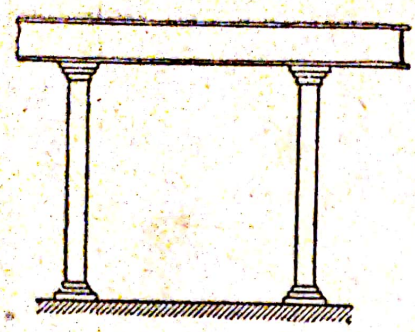


Fig. 4

La construcţii masive (ziduri de sprijin, bolţi etc.) în sistemul plan figurează de obiceiu numai secţiunile transversale a căror grosime se consideră în acest caz egală cu unitatea de lungime (fig. 7), iar sarcinile care acţionează asupra masivului se stabilesc în funcţie de lungimea aferentă, ţinând seama de presiunea pe unitate de lungime.

Există totuşi construcţii care nu pot fi descompuse în sisteme plane. Din această categorie fac parte, de exemplu, construcţiile (fig. 8) la care planele grinzilor nu coincid cu planele forţelor verticale, neputând lucra din această cauză una independent de cealaltă. Astfel de construcţii sunt considerate ca *sisteme în spaţiu.**)

Cele mai simple elemente de construcţie sunt grinzile, stâlpii etc. Legarea mai multor elemente într'un singur tot creează forme de construcţii foarte complexe. Alcătuirea sistemelor complexe poate fi de aşa natură, încât elementele care le formează să lucreze independent unul de celelalte. Sunt însă şi construcţii a căror existenţă este posibilă numai când toate elementele lucrează împreună, formând un singur sistem unitar.

Astfel de sisteme se pot alcătui prin îmbinări articulate sau rigide şi poartă denumirea de *sisteme cu bare* articulate sau numai *sisteme articulate.*

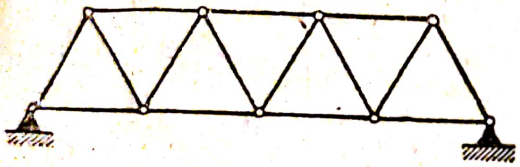


Fig. 5

Din punct de vedere teoretic *sistemele cu bare articulate formează un şir de corpuri geometrice legate între ele prin articulaţii, aşezate la extremităţile barelor.*

Cel mai simplu exemplu al unui astfel de sistem este un triunghiu format din trei bare articulate între ele (fig. 9). Deplasarea articulaţiilor în acest triunghiu nu este posibilă fără modificarea lungimii laturilor şi de aceea *triunghiul cu articulaţii la extremităţile laturilor este un sistem indeformabil.*

In general, orice sistem articulat alcătuit din bare trebue să fie indeformabil din punct de vedere geometric.

Indeformabilitatea geometrică va fi asigurată numai atunci când barele sau elementele rigide, legate între ele prin articulaţii, nu vor putea să-şi schimbe poziţia relativă în sistem, fără ca să-şi modifice dimensiunea prin deformare fie a unei bare, fie a unui element rigid al grinzii.

Din acest punct de vedere, un patrulater articulat *a b c d* (fig. 10) este un sistem deformabil; astfel bara *b c* poate să se deplaseze în raport cu elementul rigid *a d*, rotindu-se în jurul punctului E_2, care

---

*) **Nota revizorului editorial:** Sisteme în spaţiu sunt acele sisteme în care forţele sunt dispuse astfel, încât ele nu pot fi decompuse în forţe care lucrează în acelaşi plan cu planul barelor.

Scanned with OKEN Scanner

poate fi considerat ca un centru instantaneu de rotaţie sau ca articulaţia virtuală a barei cu elementul rigid.

Alcătuirea sistemelor indeformabile şi studierea condiţiilor de deformabilitate se tratează pe larg în § 25 şi 43.

Cea mai simplă formă de sistem articulat este grinda cu zăbrele care se compune dintr'un număr de bare, legate între ele prin articulaţii la extremităţi (fig. 11). Grinzile cu zăbrele pot să formeze o construcţie independentă, putând constitui uneori însă şi numai un element al unei construcţii mai complexe.

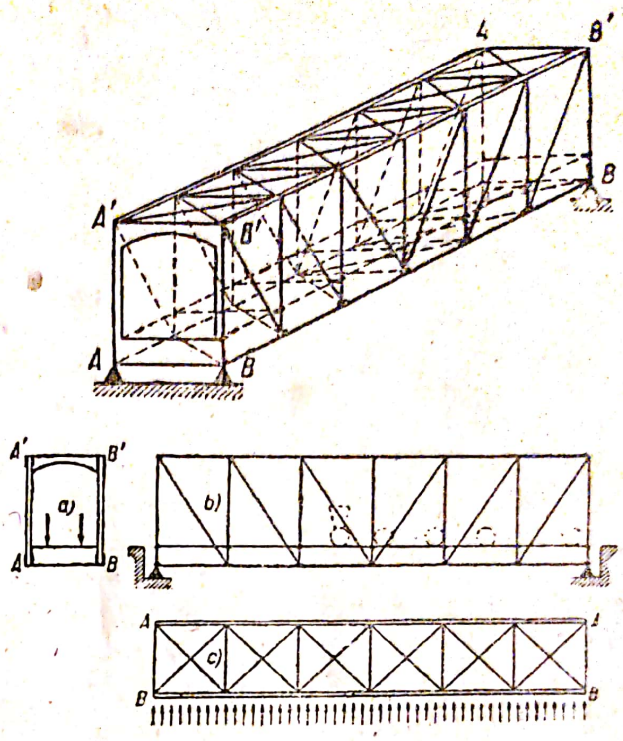


Fig. 6

In fig. 11-b este înfăţişată o construcţie alcătuită din două culee de zidărie *C* şi *D*, dintr'o grindă cu zăbrele principală *A B* şi din grinzi cu zăbrele secundare 1 — 2, 2 — 3 etc.

Sistemele la care articulaţiile sunt înlocuite cu îmbinări rigide (încastrări) se numesc în limbaj tehnic *cadre* (fig. 12-a şi b) *).

Cadrele se deosebesc de sistemele de grinzi cu zăbrele, prin aceea că îmbinarea rigidă a extremităţilor barelor (încastrarea) permite numai o *deformaţie elastică a unghiului format de bare.*

Prin această rigiditate a îmbinărilor, se realizează condiţia de indeformabilitate a sistemului, din care cauză utilizarea ca sisteme rigide a patrulaterului şi a conturelor poligonale este posibilă (fig. 12).

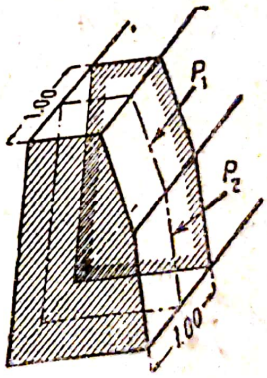


Fig. 7

§ 2. Sarcini

Orice construcţie se studiază sub acţiunea forţelor exterioare aplicate ei care pot fi reprezentate prin vectori, având deci punct de aplicaţie, direcţie, sens şi mărime.

Forţele exterioare care acţionează asupra oricărei construcţii se împart în *forţe active* şi *reacţiuni.*

Forţe active sunt sarcinile care acţionează efectiv asupra construcţiei : presiunea produsă de vânt, încărcarea dată de oameni, greutatea

*) **Nota revizorului editorial :** Caracteristica sistemelor în cadre este că unghiurile dintre bare rămân constante sub acţiunea solicitărilor.

Scanned with OKEN Scanner

proprie etc. Prin acţiunea lor acestea tind să deplaseze construcţia.

Reacţiuni se numesc forţele de legătură ce se nasc în punctele de sprijin ale construcţiei (reazime), care împiedecă deplasarea ei sub acţiunea încărcărilor active.

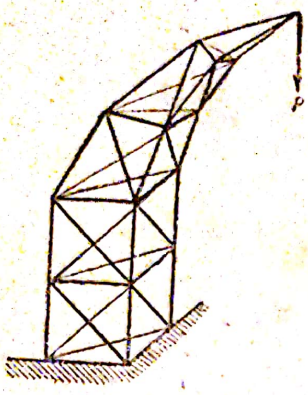


Fig. 8

Sarcinile se împart în *permanente* şi *temporare**) (accidentale). Sarcinile permanente sunt: greutatea proprie a construcţiei, greutatea tablierului, a acoperişului şi, în general, toate încărcările care solicită construcţia în mod permanent.

Sarcinile temporare accidentale se introduc în calcule în raport cu destinaţia construcţiei. Aceste sarcini sunt: convoaiele de trenuri, aglomeraţiile de oameni, vântul etc.

Sarcina temporară (accidentală) care poate să ocupe succesiv diferite poziţii într'o construcţie se numeşte *sarcină mobilă* (de exemplu: trenurile, autovehiculele, aglomeraţiile de oameni) spre deosebire de *sarcinile temporare* uniforme (imobile) — **) (accidentale) care acţionează, în general, asupra întregii construcţii deodată, ca de exemplu: presiunea vântului, greutatea zăpezii etc.

După modul de repartiţie, sarcinile pot fi *continue* sau *concentrate*.

Sarcină continuă se numeşte acea sarcină, care acţionează pe întinderea unei anumite suprafeţe (sau lungime) în aşa fel, încât o unitate de suprafaţă (sau lungime) este încărcată cu o anumită sarcină determinată ca valoare (intensitate). Sarcina continuă poate fi uniform distribuită, când ea are o intensitate constantă, pe toată suprafaţa (sau lungimea) pe care acţionează sau distribuită neuniform, când intensitatea ei variază pe suprafaţa (sau lungimea) construcţiei. Un exemplu de sarcină uniform distribuită este greutatea platelajului sau a unei aglomeraţii de oameni; un exemplu de sarcină neuniform distribuită este împingerea hidrostatică a apei pe un plan vertical, deoarece intensitatea acestei presiuni variază după un triunghiu.

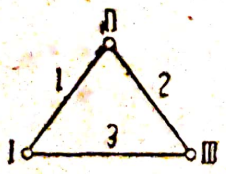


Fig. 9

O sarcină concentrată este reprezentată de obiceiu prin o forţă separată, care are un punct de aplicaţie determinat (de exemplu presiunea roţilor, a stâlpilor etc.) In realitate aceasta sarcină este şi ea repartizată pe o suprafaţă oarecare, însă această suprafaţă fiind foarte mică în raport cu suprafaţa construcţiei, sarcina se poate considera ca fiind aplicată într'un singur punct.

După modul cum acţionează asupra elementelor unei construcţii, sarcinile sunt *directe* sau *indirecte*. Această subîmpărţire este

---

*) **Nota traducătorului:** Deoarece denumirea de „forţe accidentale" are în mod obişnuit un alt înţeles, am socotit necesar a adopta denumirea de „forţe temporare" pentru termenul de „forţe accidentale" care figurează în textul original.

**) La noi aceste sarcini se numesc „sarcini accidentale".

Scanned with OKEN Scanner

explicată în fig. 13. Astfel sarcina concentrată P şi sarcina uniform repartizată q kg/ml, în raport cu calea, se consideră sarcini directe. Aceleaşi sarcini în raport cu grinda principală se consideră ca sarcini indirecte (sau transmise) deoarece ele se transmit grinzii în anumite puncte (noduri), prin intermediul unor grinzi auxiliare (transversale).

Valoarea sarcinilor (în greutate), variaţia lor în lungul elementului şi repartizarea lor reciprocă pot varia în limite foarte largi. Astfel desvoltarea progresivă a tehnicei este însoţită de o sporire a greutăţilor locomotivelor, autovehiculelor etc.; chiar şi încărcarea produsă de zăpadă poate să difere pentru construcţiile de acelaşi tip, după regiunile în care sunt situate. In scopul uniformizării proiectării, principalele sarcini teoretice de calcul s'au standardizat de către organele oficiale.

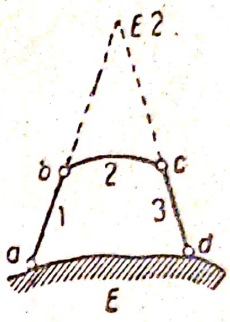


Fig. 10

§ 3. Metode de calcul

In Statica construcţiilor, se consideră că o construcţie este în stare de echilibru elastic sub acţiunea forţelor exterioare care o solicită.

Această ipoteză permite să se facă uz, în calcule, de condiţiile de echilibru static. Cu toate că în timpul deformării construcţiei, poziţiile sarcinilor se schimbă într'o oarecare măsură, totuşi valorile deformaţiilor sunt atât de mici în raport cu dimensiunile principale ale construcţiei, încât modificarea poziţiei punctului de aplicaţie al sarcinilor poate fi neglijată.

De exemplu, dacă o grindă încastrată la o extremitate şi acţionată la cealaltă extremitate de o sarcină concentrată (fig. 14) se încovoaie, atunci extremitatea liberă se deplasează în jos cu o valoare oarecare f, care, în general, este mai mică decât $0{,}002\ l$ (săgeata).

In raport cu această săgeată, deplasarea orizontală $\Delta\ l$ este o fracţiune şi mai mică din lungimea l. Este evident că influenţa acestei deplasări aşa de mici, asupra valorii momentelor ce apar în grindă, va fi atât de neînsemnată, încât ea poate fi neglijată.

Totuşi în anumite cazuri izolate, deformarea construcţiei în raport cu dimensiunile ei generale poate fi importantă şi atunci influenţa acestei deformări nu poate fi neglijată. Asemenea cazuri se întâlnesc, de exemplu, la funiculare, macarale şi alte construcţii alcătuite din cable flexibile. Săgeata cablului sub acţiunea unei sarcini concentrate este destul de mare şi de aceea înfluenţa ei trebue să fie luată în consideraţie.

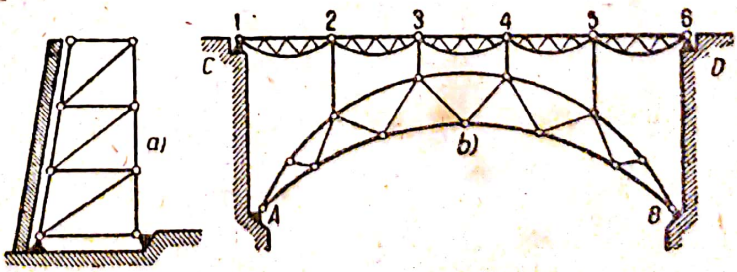


Fig. 11

Pentru determinarea eforturilor, Statica construcţiilor foloseşte metoda secţiunilor, care constă în a tăia în mod teoretic anumite piese ale construcţiei şi a aplica în secţiunile tăiate forţe de legătură (N, Q, M_i, M_r) care să înlocuiască acţiunea celorlalte părţi ale construcţiei asupra părţii secţionate. Partea tăiată se consideră ca un sistem rămas în stare de echilibru, sub acţiunea forţelor exterioare şi a celor de legătură. In această situaţie, eforturile şi momentele interioare, în raport cu partea secţionată, se consideră ca forţe şi momente exterioare.

Calculul analitic al construcţiei se face, de obiceiu, pe baza condiţiilor de echilibru static al sistemelor plane:

$$\Sigma X = 0;$$

$$\Sigma Y = 0;$$

$$\Sigma M = 0;$$

In unele cazuri ar fi însă mai raţional să se ia în consideraţie condiţiile de echilibru deduse din aplicarea principiului lucrului mecanic virtual şi anume: anularea lucrului mecanic în cazul deplasărilor virtuale infinit mici compatibile cu legăturile sistemului.

Paralel cu metodele analitice, în Statica construcţiilor se întrebuinţează pe o scară largă şi metodele grafice, bazate pe proprietăţile poligonului forţelor şi ale poligonului funicular. Prin utilizarea construcţiilor grafice se pot evidenţia variaţiile eforturilor, deformaţiilor etc.

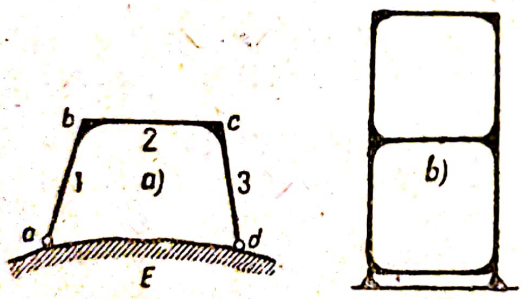


Fig. 12

In raport cu posibilitatea de a determina, cu ajutorul celor trei ecuaţii ale echilibrului static, eforturile şi reacţiunile, sistemele de construcţii se împart în *sisteme static determinate* şi *sisteme static nedeterminate*. Dacă într'un sistem geometric indeformabil, încărcat cu sarcini alese arbitrar, reacţiunile şi eforturile din fiecare element rigid, respectiv în fiecare bară, pot fi determinate cu ajutorul condiţiilor de echilibru static, atunci sistemul se numeşte *static determinat*.

Dacă însă aceste eforturi nu pot fi determinate numai cu ajutorul acestor trei ecuaţii, sistemul se numeşte *static nedeterminat*.

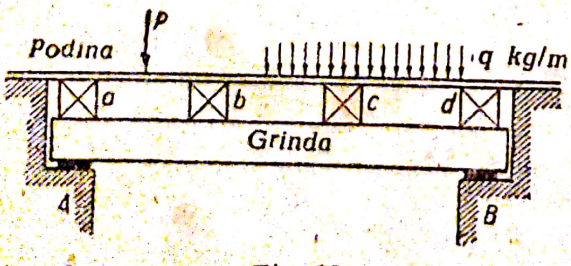


Fig. 13

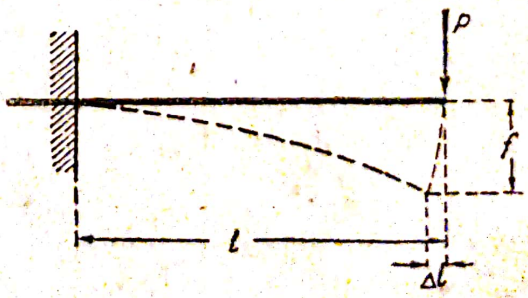


Fig. 14

Scanned with OKEN Scanner

§ 4. Reacţiunile în punctele de sprijin ale sistemelor plane

Posibilitatea de deplasare, de orice natură, a unei construcţii se înlătură prin rezemarea sau legarea ei de puncte fixe.

Dispozitivele de legătură ale construcţiilor cu pământul sau cu alte construcţii şi care se opun la toate deplasările sau numai la unele dintre ele se numesc *reazime*,

Legarea fixă a unui sistem sau a unui element rigid etc. poate fi asigurată cel puţin prin trei legături (sau bare) care nu sunt concurente sau paralele. Fixarea cu două legături (sau bare) nu asigură indeformabilitatea, întru cât un astfel de dispozitiv constitue o articulaţie virtuală sau reală (fig. 10). In calcule, sistemele de rezemare în punctele de sprijin se înlocuesc prin forţe şi momente corespunzătoare în raport cu particularităţile constructive ale reazimului. O astfel de construcţie, în care dispozitivele care se opun la deplasarea ei sunt îndepărtate şi înlocuite cu forţe şi momente, poate fi considerată ca un corp în echilibru sub acţiunea forţelor exterioare active şi a reacţiunilor.

Inlocuirea reazimelor prin forţe de legătură este posibilă numai în cazul când acestea sunt complet determinate, adică atunci când se cunoaşte: punctul lor de aplicaţie, direcţia şi mărimea, cu sensul lor. Mărimea reacţiunilor este în raport cu mărimea şi poziţia forţelor active, iar punctele lor de aplicaţie şi direcţia sunt în funcţie de modul de construcţie al reazimelor.

Intr'un sistem plan *punctul de aplicaţie* al reacţiunilor se determină uşor când reazimele sunt constituite din articulaţii (fig. 15) sau dintr'un dispozitiv analog, de exemplu o suprafaţă plană de contact care se rostogoleşte pe un cilindru (fig. 16). La unele construcţii nu există articulaţii bine pronunţate, însă ele au în schimb suprafeţele de reazim aşa de mici, în raport cu dimensiunile construcţiei, încât pot fi considerate ca puncte de aplicaţie a reacţiunilor; astfel la stâlpii care susţin un planşeu, pot fi considerate ca puncte de aplicaţie a reacţiunilor centrele secţiunii de rezemare a stâlpilor.

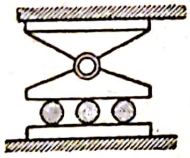


Fig. 15

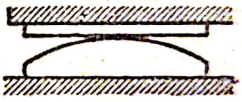


Fig. 16

Direcţia reacţiunilor pe reazime este determinată de planele mobile ale aparatului de reazim, pe care reacţiunea este întotdeauna normală.

Posibilitatea de deplasare a reazimului se asigură sau prin introducerea unor rulouri (fig. 15) sau printr'o suprafaţă de alunecare (fig. 16), ori prin montarea unei bare cu articulaţii la extremităţi, care pot oscila (reazim pendular) (fig. 17).

In raport cu aceste tipuri fundamentale, dispozitivele de rezemare pot fi:

Scanned with OKEN Scanner

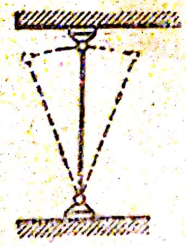


Fig. 17

1. *Reazim simplu mobil,* care permite rotirea şi translaţia într'o singură direcţie. La un astfel de reazim, numai mărimea reacţiunii este necunoscută; schematic un asemenea reazim poate fi reprezentat printr'o *singură bară articulată la extremităţi* (fig. 18 I). In această schemă punctul de aplicaţie este determinat de articulaţie, iar direcţia reacţiunii de direcţia barei. Existenţa unei singure bare convenţionale indică existenţa unei *singure necunoscute.*

2. *Reazim articulat fix,* care permite rotirea, însă nu şi deplasarea; un astfel de reazim are *două necunoscute: mărimea şi direcţia reacţiunii.* Schematic acest reazim poate fi reprezentat prin două bare articulate la extremităţi, având şi o articulaţie comună (fig. 18 II). Această articulaţie comună fixează punctul de aplicaţie al reacţiunii.

3. *Reazim mobil de translaţie (plan),* care permite deplasări numai într'o singură direcţie, nu însă şi rotirea. Un asemenea reazim are *două necunoscute: mărimea şi punctul de aplicaţie al reacţiunii.* Schematic acest dispozitiv se poate reprezenta prin două bare paralele articulate la extremităţi (fig. 18 III); direcţia reacţiunii este determinată de direcţia barelor; punctul de aplicaţie este însă necunoscut.

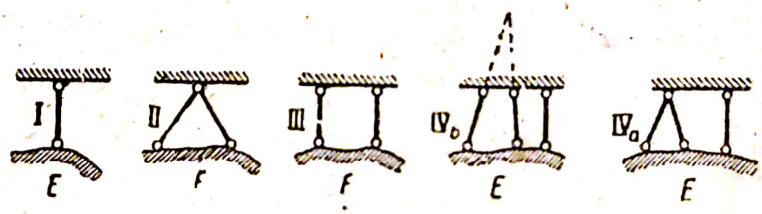


Fig. 18

4. *Reazim încastrat* (încastrare) este un reazim care nu permite niciun fel de deplasare a secţiunii transversale a elementului de construcţie fixat de acesta. Incastrarea are *trei necunoscute: mărimea, direcţia şi punctul de aplicaţie al reacţiunii.* Acest reazim poate fi reprezentat schematic prin trei bare care nu sunt concurente (fig. 18 IV a şi IV b);

Posibilitatea de rotire în jurul punctului de intersecţie al primelor două bare este înlăturată prin existenţa barei a treia.

In raport cu sistemul de reazim, reacţiunile unei construcţii pot fi *static determinate sau static nedeterminate.*

In cazul acţiunii forţelor complanare (într'un singur plan), statica ne dă trei condiţii de echilibru:

$$\Sigma X = 0$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$\Sigma M = 0$$

Prin urmare pentru ca *reacţiunile unei construcţii să fie static determinate, trebue ca în toate punctele ei de reazim să nu existe mai mult de trei necunoscute.*

Scanned with OKEN Scanner

Această condiție de determinare statică poate fi satisfăcută numai în cazul următoarelor trei combinațiuni între sistemele de reazim.

1. Când construcția are numai un singur reazim, după cum se întâmplă la grinzile încastrate la o extremitate, la zidurile de sprijin (fig. 19 a), la macarale în consolă (fig. 19 b) etc. acest reazim poate fi numai o încastrare având trei necunoscute: mărimea efortului, direcția și punctul lui de aplicație.

Mărimea și direcția efortului se determină din condițiile (fig. 19 b):

$$\Sigma Y = V - R\cos\alpha = 0$$

de unde

$$V = R\cos\alpha;$$

și

$$\Sigma X = H - R\sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

de unde

$$H = R\sin\alpha$$

Punctul de aplicație al reacțiunii în raport cu centrul reazimului se determină din condiția:

$$\Sigma M_k = -Rr + V\eta = 0$$

de unde

$$\eta = \frac{Rr}{V} \qquad (1')$$

2. Când o construcție are *două reazime* (fig. 20), unul din ele poate fi *articulat fix* (2 necunoscute), iar al doilea trebue să fie în acest caz *simplu mobil* (1 necunoscută).

La o astfel de rezemare, oricum ar fi îndreptată rezultanta R a forțelor active, aceasta poate fi întotdeauna descompusă grafic după două direcții, iar componentele reacțiunilor de pe reazim pot fi determinate din condițiile:

$$\Sigma M_b = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma X = 0;$$

$$A_y \cdot l - Rr = 0, \quad A_y + B_y - R\sin\alpha = 0$$

$$A_y = \frac{Rr}{l}; \quad B_y = R\sin\alpha - A_y; \quad B_x = R\cos\alpha. \qquad (2)$$

Remarcăm că mărimea componentelor verticale ale reacțiunilor pe reazime se determină direct din suma momentelor tuturor forțelor exterioare în raport cu celălalt reazim.

3. Când *construcția are trei puncte de reazim*, toate reazimele pot fi nu-

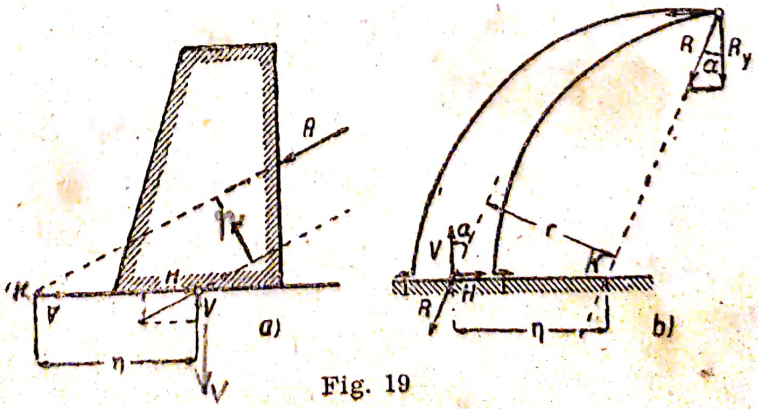


Fig. 19

mai *reazime simple mobile* (3 x 1 = 3 necunoscute). In acest caz de rezemare, rezultanta forţelor exterioare poate fi descompusă *numai cu condiţia ca cele trei direcţii ale reacţiunilor să nu fie concurente* (fig. 21).

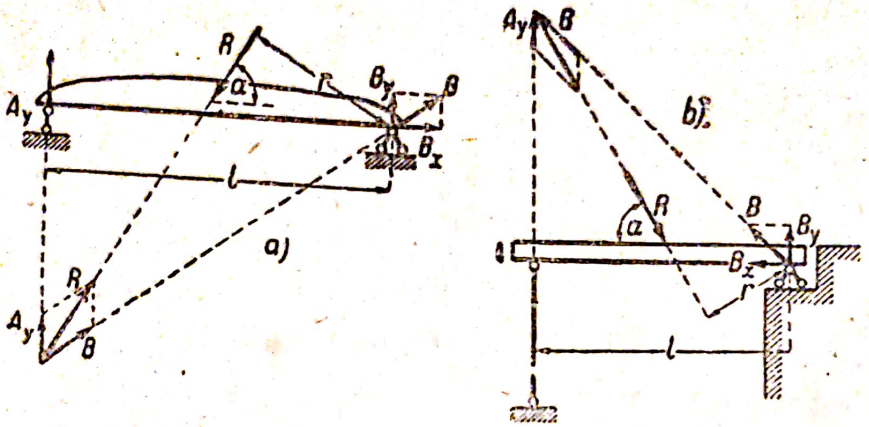


Fig. 20

Componentele reacţiunilor se determină în acest caz cu ajutorul condiţiunilor :

$$\Sigma X = A_x - C_x - R\cos\gamma = 0$$
$$\Sigma Y = A_y + B_y + C_y - R\sin\gamma = 0 \qquad (3)$$

utilizând şi condiţia ca suma tuturor momentelor, în raport cu un punct luat arbitrar în plan, să fie egală cu zero. In cazul reazimelor de acest fel este recomandabil să se ia suma momentelor în raport cu punctul de intersecţie a două reacţiuni alese arbitrar cum ar fi de exemplu, punctele *ac* şi *bc* (fig. 21).

In acest mod se obţine o ecuaţie cu o singură necunoscută, cu ajutorul căreia se determină direct a treia reacţiune, de exemplu :

$$M_{ac} = + Rr - B_y b = 0 \qquad (3a)$$

Deoarece

$$A_y = A_x \operatorname{tg}\alpha$$

şi

$$C_y = C_x \operatorname{tg}\beta$$

substituind aceste valori în ecuaţiile de echilibru (3), vom obţine trei

ecuaţii cu trei necunoscute, prin a căror rezolvare vom determina cele trei reacţiuni de pe reazime.

4. *Construcţia care are patru sau mai multe reazime este întotdeauna static nedeterminată în raport cu reacţiunile pe reazime.* Pentru reducerea ei la un sistem static determinat, trebue să se creeze unele condiţii speciale, problemă care se va trata în partea a II-a.

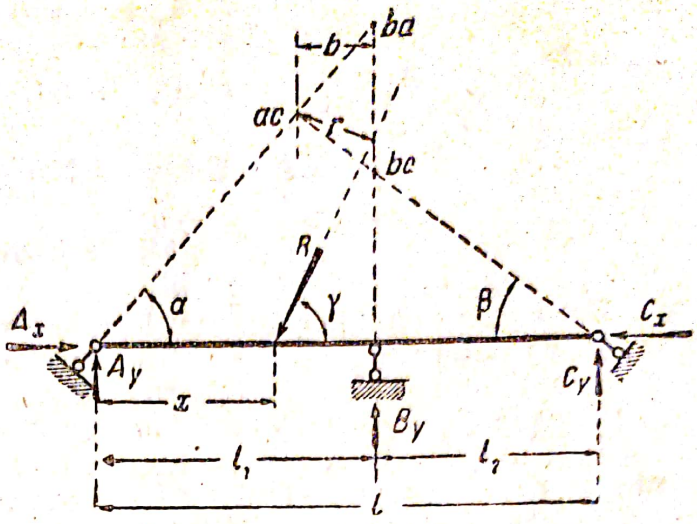


Fig. 21

Reazime elastice. In afară de reazimele descrise mai sus care nu permit deplasări verticale şi pot fi ori cu articulaţii sau cu o încastrare perfectă, există şi alte reazime care permit numai anumite deplasări şi rotiri, la care mărimea deplasărilor şi rotirilor este proporţională cu reacţiunile şi invers proporţională cu rigiditatea reazimelor. Acestea sunt reazimele elastice.—

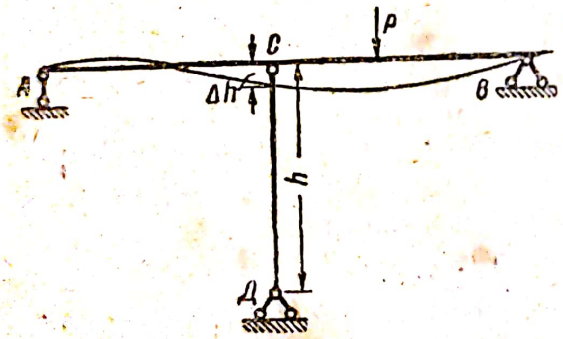


Fig. 22

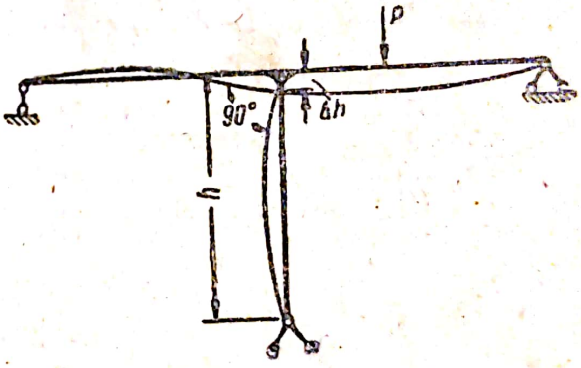


Fig. 23

De exemplu, grinda reprezentată în fig. 22, are reazimul din mijloc alcătuit dintr'o bară articulată la extremităţi. Sub acţiunea reacţiunii grinzii, bara *CD* capătă o deformare longitudinală însoţită de o deplasare pe verticală a punctului de articulaţie *C*, deci a unui punct de reazim al grinzii. Articulaţia *C* admite însă rotirea liberă a grinzii în dreptul reazimului.

Dacă această articulaţie lipseşte, grinda are o legătură rigidă cu stâlpul (montantul) (fig. 23) ceea ce creează o încastrare elastică, în care rotirea grinzii întâmpină o rezistenţă din partea stâlpului, rezistenţă care depinde de rigiditatea lui.

Din cele expuse mai sus, rezultă că în cazul unor reazime elastice, determinarea reacţiunilor şi a momentelor este legată de determinarea deformaţiilor, din care cauză sistemul este static nedeterminat (a se vedea partea II-a).

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 2

SARCINA MOBILA

§ 5. Linii de influenţă

Dacă asupra unei construcţii acţionează o sarcină fixă, nu este greu să se determine secţiunea în care se produce momentul maxim sau forţa tăietoare maximă. In majoritatea acestor cazuri este suficient să se construiască *curba* (diagrama) care reprezintă variaţia momentelor sau a forţelor tăietoare în lungul unei grinzi sau elementelor construcţiei, urmând ca pe baza lor să se determine secţiunea cea mai solicitată corespunzătoare sarcinii fixe date.

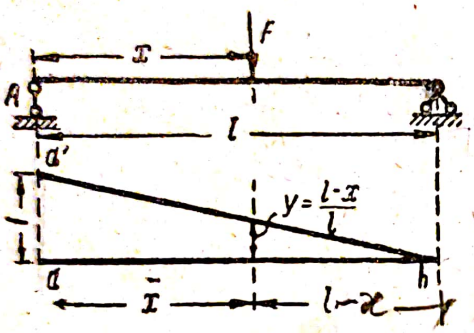


Fig. 24

In cazul când asupra construcţiei acţionează o sarcină mobilă, determinarea forţei tăietoare sau a momentului maxim se complică, deoarece valoarea momentului sau a forţei tăietoare într'o secţiune variază în raport cu poziţia sarcinilor. De aceea pentru determinarea forţei tăietoare sau a momentului maxim (de calcul) *trebue să se găsească, mai întâi, poziţia cea mai defavorabilă a sarcinii*. Pentru acest gen de calcule, liniile de influenţă sunt foarte utile.

Să analizăm cum variază valoarea reacţiunii într'o grindă simplu rezemată (fig. 24) sub acţiunea unei sarcini mobile P. La orice poziţie a sarcinii, valoarea reacţiunii A este dată de ecuaţia:

$$A = P\,\frac{l - x}{l}$$

în care x este distanţa sarcinii P dela reazimul din stânga A.

Să presupunem că sarcina $P = 1$. Atunci expresia reacţiunii va avea forma:

$$A = \frac{l - x}{l} = y \qquad (4)$$

Dacă luăm ca ordonată valoarea reacţiunii pe reazimul A, corespunzătoare sarcinii egale cu unitatea, atunci reacţiunea pe reazim variază liniar în raport cu poziţia sarcinii $P = 1$. Poziţia acestei drepte se determină din ecuaţia (4); pentru

$$x = 0; \qquad A = 1$$

şi pentru

$$x = l; \qquad A = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Fiecare ordonată a acestei drepte, măsurată în dreptul poziției sarcinii determină valoarea reacției din reazimul A (fig. 24). Dreapta $a'b$ astfel obținută se numește *linia de influență, a reacțiunii pe reazim.*

Exemplul de mai sus este un caz particular. In general *liniile de influență pot avea orice formă, care se obține reprezentând grafic ecuațiile de echilibru.*

Fiecare ordonată a liniei de influență, măsurată în dreptul punctului de aplicație al sarcinii, reprezintă valoarea momentului sau a forței tăietoare în secțiunea pentru care a fost construită linia de influență a unei sarcini egale cu unitatea.

In fig. 25 este reprezentată linia de influență a momentului de încastrare M_a pentru o grindă dublu încastrată; valoarea momentului de încastrare, în acest caz, se determină din ecuația:

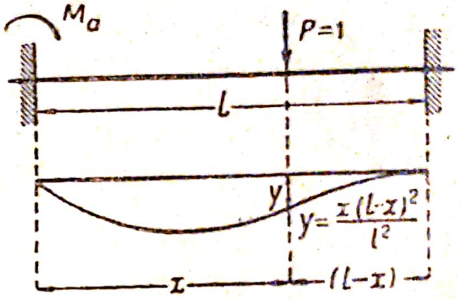


Fig. 25

$$M_a = y = \frac{x\,(l-x)^2}{l^2},$$

care este o curbă de gradul al treilea.[1])

Trebue să remarcăm o particularitate a formelor liniilor de influență și anume: pentru sistemele static determinate liniile de influență sunt formate din linii drepte, iar pentru sistemele static nedeterminate din curbe.

§ 6. Liniile de influență ale reacțiunilor, momentelor și forțelor tăietoare deduse din ecuațiile de echilibru static

In sistemele plane cu secțiune transversală plină, eforturile dintr'o secțiune pot fi înlocuite prin rezultanta R_x și momentul M_x. Pentru încărcări obișnuite, normale pe axa grinzii, rezultanta se reduce la forța tăietoare Q_x. Eforturile din barele grinzilor cu zăbrele se pot exprima în funcție de momentul încovoietor M și forța tăietoare Q, determinate ca și pentru o grindă simplă (vezi § 31). Astfel, liniile de influență ale momentelor și ale forțelor tăietoare, sunt linii caracteristice, ceea ce implică o cercetare mai amănunțită a metodelor pentru construirea lor.

Atât momentele încovoietoare cât și forțele tăietoare se exprimă în funcție de reacțiuni și de aceea studiul construcției liniilor de in-

[1]) Intru cât ecuația se referă la un sistem static nedeterminat, deducerea ei va fi expusă în partea a II-a.

fluență trebue început cu studiul liniei de influență a reacțiunilor pe reazim.

Liniile de influență ale reacțiunilor

Dacă o sarcină mobilă unitară (egală cu unitatea) este situată pe o grindă simplu rezemată, mărimea ambelor reacțiuni A și B va fi determinată din ecuațiile :

$$A = \frac{l - x}{l} \quad \text{și} \quad B = \frac{x}{l} \tag{5}$$

Ambele ecuații reprezintă linii drepte care pot fi ușor construite, deoarece :

pentru

$$x = 0 \; ; \; A = 1 \, , \; B = 0 \; ;$$

pentru

$$x = l \; ; \; A = 0, \; B = 1 \, .$$

In fig. 26 a și b sunt reprezentate construcțiile acestor două linii de influență ale reacțiunii din reazimele A și B.

Linia de influență a momentelor

Expresia momentelor variază după poziția sarcinii unitare în raport cu secțiunea, adică după cum va fi la dreapta sau la stânga secțiunii. Deoarece linia de influență a momentului este o reprezentare grafică a ecuației analitice a echilibrului static, ea se va compune din două părți.

Când sarcina este aplicată în partea din stânga secțiunii se utilizează ecuația de echilibru corespunzătoare părții din dreapta, unde figurează numai reacțiunea B. In acest caz, expresia momentului în acea secțiune (fig. 26 c) este :

$$M = B \, (l - a) = \frac{x}{l} \, (l - a) \tag{6}$$

Aceasta este linia de influență a reacțiunii din reazimul B, reprezentată la scara 1 (l — a) ; poziția ei se determină din condiția :

pentru

$$x = 0, \; M = 0 \, ,$$

iar pentru

$$x = l, \; M = (l - a) \, ;$$

In fig. 26 c, această linie este reprezentată prin dreapta ab' însă și *este valabilă numai atât timp cât sarcina unitară se deplasează pe porțiunea de lungime a dela stânga secțiunii.*

Dacă sarcina lucrează la dreapta secțiunii, expresia momentului, pentru porțiunea din stânga a grinzii, va fi și mai simplă :

$$M = Aa = \frac{l - x}{l} a \qquad (7)$$

Formula (7) este ecuația unei drepte care se poate ușor construi din condiția :

pentru

$$x = 0 \; ; \; M = a \; ,$$

iar pentru

$$x = l \; ; \; M = 0 \; ,$$

Această ecuație, în fond, reprezintă variația reacțiunii din reazimul A, înmulțită cu cantitatea a. Poziția acestei drepte ab se vede în fig. 26. *Valabilitatea ei este de asemenea limitată numai pentru cazul când sarcina unitară acționează pe porțiunea (l—a) a grinzii situată la dreapta secțiunii.*

Construirea unei linii cu influență are câteva reguli caracteristice, comune tuturor liniilor de influență ale momentelor încovoietoare și anume :

1. Linia de influență este alcătuită din două drepte ; linia din partea stângă și linia din partea dreaptă. Linia din partea stângă reprezintă variația ordonatelor liniei de influență *când sarcina acționează la stânga secțiunii* și este egală cu zero în dreptul reazimului din stânga. In dreptul reazimului din dreapta această linie este reprezentată prin segmentul $l - a$, a cărui mărime depinde de poziția secțiunii. Linia din dreapta, reprezintă variația liniei de influență când sarcina este în partea din dreapta ; în dreptul reazimului din dreapta valoarea ordonatei este egală cu zero, iar în dreptul reazimului din stânga este egală cu segmentul a, a cărui mărime este de asemenea în funcție de poziția secțiunii.

2. *Independent de particularitățile constructive ale sistemului, dreptele care formează linia de influență se intersectează întotdeauna pe verticala secțiunii pentru care se construește linia de influență a momentelor.* Această proprietate caracteristică tuturor liniilor de influență ale momentelor rezultă direct din condițiunea ca atunci când sarcina se găsește în secțiunea considerată, ordonata liniei de influență trebue să aparțină în același timp și liniei din stânga și celei din dreapta, ceea ce este posibil numai pentru punctul de intersecție al acestor linii.

Folosind aceste proprietăți ale liniilor de influență ale momentelor se poate simplifica construcția lor, limitând rezolvarea analitică numai la una din drepte. In adevăr, dacă de exemplu, se va cunoaște numai poziția *liniei a'b pentru ipoteza că sarcina este în partea din dreapta secțiunii* și care se obține raportând segmentul a pe verticala dusă în reazimul din stânga și unind acest punct cu punctul zero în dreptul reazimului B, atunci poziția *liniei din partea din stânga* este determinată direct prin două puncte și anume : punctul zero în dreptul reazimului din stânga și punctul c — intersecția liniei drepte $a'b$ cu verticala dusă prin secțiunea pentru care se construește linia de influență.

Scanned with OKEN Scanner

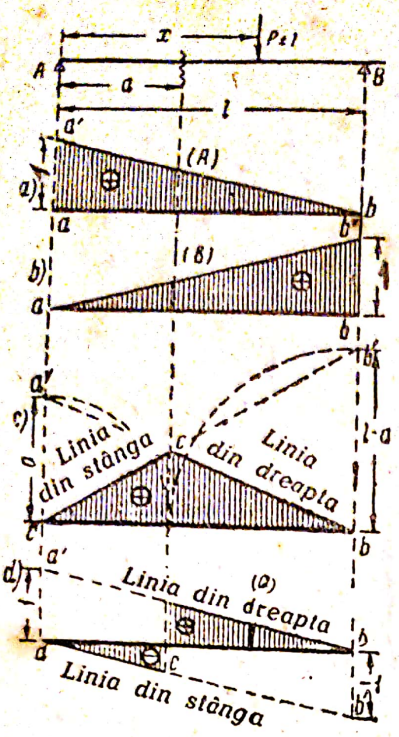


Fig. 26

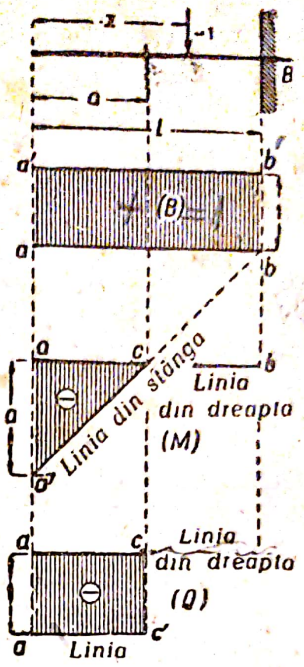


Fig. 27

Aceste proprietăţi ale liniilor de influenţă sunt valabile şi pentru o grindă încastrată la o extremitate şi liberă la cealaltă.

In fig. 27 este reprezentată construcţia liniei de influenţă a reacţiunii unei grinzi simplu încastrate, la care pentru orice poziţie a sarcinii unitare, reacţiunea pe reazimul B este egală cu unitatea ($B = 1$).

Linia de influenţă a momentelor încovoietoare într'o secţiune aflată la distanţa a dela extremitatea liberă a consolei este determinată de două drepte: linia din dreapta care se confundă cu axa absciselor, deoarece ordonatele ei, după cum rezultă din ecuaţia de echilibru a părţii din stânga, sunt egale cu zero ($M_{dr} = 0$) şi linia din stânga, care se poate determina în acest caz mai simplu şi anume din condiţiile de echilibru ale părţii din stânga $M_{st} = 1\,(a - x)$. Construcţia acestei linii de influenţă reprezentată în fig. 27 s'a făcut punând condiţia pentru

$$x = 0\,; \quad M_{st} = a$$

iar pentru

$$x = a\,; \quad M_{st} = 0.$$

Punctul de intersecţie al liniei din dreapta cu cea din stânga se găseşte pe verticala dusă prin secţiunea considerată.

Din cele expuse mai sus, rezultă că la construirea liniilor de influenţă, segmentele ridicate pe verticalele din reazime au fost măsurate la scara lungimilor. De aceea *ordonatele liniilor de influenţă ale momentelor încovoietoare se măsoară în unităţi de lungime.*

Scanned with OKEN Scanner

Liniile de influenţă ale forţelor tăietoare

Valoarea şi semnul forţei tăietoare în secţiunile unei grinzi simplu rezemate variază în raport cu poziţia sarcinii faţă cu secţiunea.

Când forţa se găseşte la dreapta secţiunii, expresia forţei tăietoare se determină mai simplu din *condiţiile de echilibru ale părţii din stânga*, pentru care (fig. 26 d) :

$$Q_{dr} = A = 1 \frac{l - x}{l} \tag{8}$$

Această ecuaţie reprezintă aceeaşi dreaptă ca şi în cazul liniei de influenţă a reacţiunii reazimului din stânga A, însă valabilitatea ei este limitată numai la partea din dreapta grinzii, adică dela secţiune până la reazimul din dreapta.

Dacă forţa se află în stânga secţiunii, expresia forţei tăietoare, rezultată din condiţiile de echilibru ale părţii din dreapta, va fi următoarea :

$$Q_{st} = - B = - \frac{x}{l} \tag{9}$$

ceea ce corespunde liniei de influenţă a reacţiunii reazimului din dreapta, însă cu semnul schimbat, *limitele ei de valabilitate sunt : dela reazimul din stânga până la secţiunea considerată*, deci numai când sarcina se găseşte în partea din stânga a grinzii.

Astfel *linia de influenţă a forţelor tăietoare este alcătuită din două drepte paralele, ramura din dreapta şi cea din stânga ;* fiecare fiind determinată de valoarea zero în reazimul respectiv şi ordonata egală cu unitatea în reazimul opus. In dreptul secţiunii, linia de influenţă are o treaptă bruscă, cu înălţimea egală cu unitatea, adică egală cu valoarea sarcinii, ceea ce corespunde cu variaţia valorii forţei tăietoare, la trecerea ei din partea din stângă în cea din dreapta a secţiunii.

Paralelismul dintre dreptele care conturează linia de influenţă a forţelor tăietoare se menţine şi la grinzile simplu încastrate (numai la o extremitate).

In fig. 27 este reprezentată construcţia liniei de influenţă a forţelor tăietoare în secţiunea care se găseşte la distanţa a dela extremitatea liberă a unei grinzi simplu încastrate (numai la o extremitate). Aplicând sarcina în dreapta secţiunii, forţa tăietoare se determină din ecuaţia de echilibru a părţii din stânga :

$$Q_{dr} = 0,$$

adică este linia dreaptă care se confundă cu axa absciselor. Aplicând sarcina la stânga secţiunii, forţa tăietoare se obţine tot din ecuaţia de echilibru a părţii din stânga :

$$Q_{st} = -1,$$

adică linia din stânga $a' c'$ este paralelă cu axa absciselor, fiind deci paralelă şi cu dreapta cb.

Scanned with OKEN Scanner

Poziția dreptelor care reprezintă liniile de influență ale forțelor tăietoare se determină, după cum se vede din cele expuse, prin segmente verticale abstracte, de aceea *ordonatele liniei de influență ale forțelor tăietoare se măsoară în unități corespunzătoare abstracte* (fără dimensiuni) *)

Metodele expuse mai sus pentru construirea liniilor de influență, bazate pe legile echilibrului static, sunt absolut suficiente pentru construirea liniilor de influență ale sistemelor simple static determinate.

In unele cazuri particulare de calcul și anume pentru sisteme mai complicate static determinate, sau pentru sisteme static nedeterminate, forma liniilor de influență se poate determina mai lesnicios aplicând procedeele cinematice.

§ 7 Construirea liniilor de influență pe baza metodelor cinematice .

Orice sistem precum și elementele sale rămân indeformabile și imobile, atât timp cât între aceste elemente există un număr suficient de legături, care pot fi înlocuite cu cel puțin o articulație și o bară, sau cu trei bare care nu sunt concurente.

In cazul când una din aceste condiții de legătură nu este îndeplinită, atunci întreg sistemul se transformă într'un mecanism, adică într'un lanț cinematic compus din elemente rigide separate, legate prin articulații între ele și având o oarecare mobilitate compatibilă cu legăturile, în urma jocului acestor legături.

Fig. 28

De exemplu, dacă suprimăm bara 3 din schema reprezentată în fig. 28, atunci corpul rigid S va avea posibilitatea să se rotească în jurul articulației 1 — 2 ; dacă suprimăm bara 2, corpul S va putea să se deplaseze în jurul articulației virtuale 1 — 3, aceasta fiind centrul instantaneu de rotație.

Diagrama deplasărilor virtuale.

Deplasarea compatibilă cu legăturile în oricare moment, a fiecărui element, poate fi considerată ca o rotire a lui în jurul centrului instantaneu de rotație k (fig. 29) cu o vitesă unghiulară ω. Pe această bază valoarea mm' a deplasării virtuale a oricărui punct al acestui element, se determină din condiția :

$$mm' = r.\omega ,$$

în care r este distanța dela punctul considerat la centrul instantaneu de rotație.

Ținând seama de valoarea mică a deplasărilor, arcul mm' se poate considera egal cu tangenta mn și atunci valoarea deplasării virtuale

*) **Nota revizorului editorial :** Forțele tăietoare vor fi reprezentate de ordonatele liniei de influență și măsurate pe scara adoptată pentru reprezentarea forțelor.

Scanned with OKEN Scanner

a punctului, în raport cu sistemul de coordonate, rezultă din expresia:

$$y = mn \cos(r\,x) = r \cos(r\,x).\ \omega$$

sau

$$y = x\ \omega$$

10

Aceasta este ecuația unei drepte la care pentru:

$$x = 0\,; \qquad y = 0\,;$$

Prin urmare ordonatele deplasărilor virtuale ale elementului sunt determinate de o linie dreaptă care intersectează axa absciselor pe o verticală ce trece prin centrul instantaneu de rotație.

De aci rezultă că, dacă deplasarea fiecărui element se consideră în raport cu o poziție invariabilă cum ar fi aceea a pământului, care de asemenea poate fi caracterizată printr'o dreaptă și care datorită poziției sale fixe poate fi considerată ca axa absciselor, atunci proiectând centrele instantanee de rotație pe axa absciselor, vom determina punctele de intersecție a dreptelor care caracterizează deplasarea diferitelor în raport cu această axă.

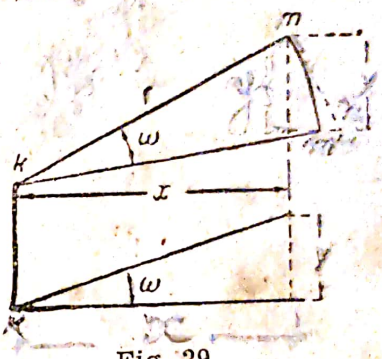


Fig. 29

Să cercetăm un sistem cinematic, compus din trei elemente rigide I, II și III (fig. 30), legat de axa fixă *E*, cu articulații în punctele IE și IIIE; elementele sistemului fiind legate între ele prin articulații în punctele I — II și II — III. Considerând ca axă a absciselor linia *1e 3e*, care reprezintă poziția invariabilă a pământului, atunci pe baza celor arătate mai sus, pe această linie trebue să se găsească ca centre instantanee de rotație proiecțiile articulațiilor IE și IIIE ale elementelor I și III; în raport cu axa fixă *E* acestea vor fi punctele *1e* și *3e*.

Centrul instantaneu de rotație al elementului II, în raport cu axa fixă *E* (pământul) trebue să se găsească, după cum se știe din cinematică, pe o dreaptă care trece prin centrul instantaneu de rotație absolută și prin centrele mobile, care în raport cu elementul II sunt: pentru elementul I centrul IE și articulația de legătură I—II, iar pentru elementul III centrul IIIE și articulația III—II; astfel încât centrul instantaneu de rotație al elementului II urmează să se afle pe dreptele care trec prin punctele I *E*, I—II și

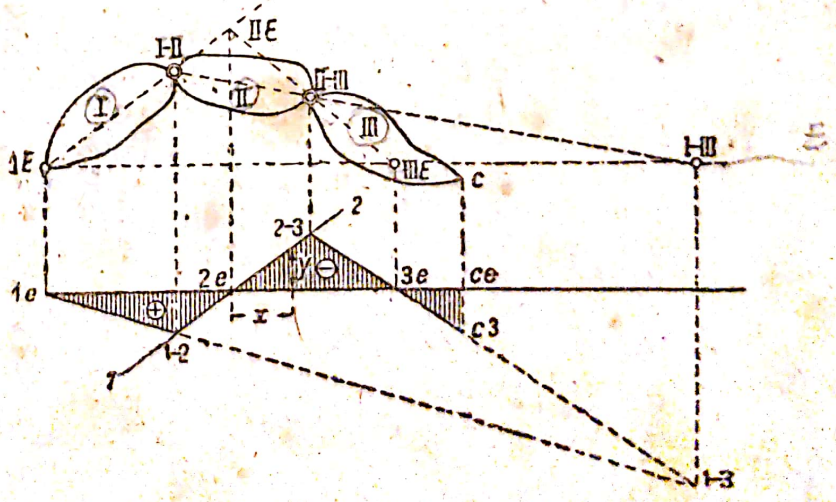


Fig. 30

punctele IIIE și III—II, deci el va fi, la intersecția acestor drepte, adică în punctul IIE.

Deoarece punctul IIE este centrul instantaneu de rotație în raport cu axa fixă E (pământul) a elementului II, atunci pe baza considerațiunilor de mai sus, proiecția acestui punct 2e pe axa absciselor trebue să se determine prin intersectarea axei absciselor cu dreapta care reprezintă deplasarea virtuală a elementului II.

Din ecuația (10) rezultă, că $y = x.\ \omega$, astfel, că orice dreaptă poate determina deplasările virtuale ale punctelor elementului cu condiția ca unghiul ei de înclinare, măsurat la o anumită scară, să corespundă cu vitesa unghiulară ω.

Bazându-ne pe cele de mai sus, putem alege în mod arbitrar ca linie a deplasărilor virtuale ale elementului respectiv, o dreaptă care trece printr'unul din centrele instantanee de rotație. De exemplu dreapta 2—2, care trece prin punctul 2e, poate fi considerată ca linia deplasărilor virtuale în raport cu axa fixă E (pământul) a elementului II; pe această linie trebue să se găsească proiecțiile punctelor I—II și II—III, deoarece ele fac parte din același element și se deplasează împreună cu el; aceste proiecții vor fi punctele 1—2 și 2—3. Insă articulațiile I—II și II—III sunt totodată și punctele care leagă elementul II cu elementele I și III și de aceea ordonatele care determină deplasările virtuale ale punctelor I—II și II—III trebue să fie comune atât pentru dreapta 2—2 cât și pentru dreptele 1—1 și 3—3. In acest fel poziția dreptelor 1—1 și 3—3 care determină deplasările virtuale ale elementelor I și III sunt determinate prin punctele 1—2, 1e și 2—3, 3e. Articulațiile I—II și II—III sunt centrele instantanee de rotație ale deplasărilor virtuale ale elementului II în raport cu elementele I și III și după cum se vede din figură, în dreptul lor se intersectează dreptele care determină deplasările virtuale ale elementelor respective. Același lucru se întâmplă și cu deplasările virtuale ale elementelor I și III; dreptele care determină deplasările lor virtuale se intersectează în punctul 1—3 pe verticala dusă din centrul instantaneu de rotație I—III.

In acest fel se stabilește o proprietate generală și anume: că *dreptele care determină ordonatele deplasărilor virtuale pentru elementele unui sistem cinematic se intersectează pe verticalele coborîte din centrele instantanee de rotație.* Această proprietate ușurează simțitor construirea diagramelor (epurelor) deplasărilor virtuale. Aceste, diagrame reprezintă o suprafață limitată de linii drepte.

In fig. 30, suprafața diagramei deplasărilor virtuale este hașurată.

Ordonatele liniilor din diagramă determină mărimea deplasărilor virtuale ale diferitelor puncte ale sistemului; mărimea acestor deplasări va fi relativă, până când se va stabili fie valoarea vitesei unghiulare, fie o scară pentru ele.

Diagramele deplasărilor virtuale ca linii de influență

Dacă într'un sistem oarecare indeformabil, care se află în echilibru sub acțiunea unor încărcări date, vom îndepărta o legătură (bară) oarecare, sistemul se transformă într'un sistem cinematic, care se poate deplasa într'un mod determinat.

De exemplu dacă la grinda reprezentată în fig. 31, îndepărtăm

reazimul din stânga, această grindă va avea posibilitatea să se rotească în jurul articulației din reazimul din dreapta. In locul reazimului pe care l'am îndepărtat se poate însă aplica o forță atât de mare, încât să echilibreze sistemul cinematic. Această forță în raport cu sistemul cinematic este o forță exterioară. De aceea, această forță prin acțiunea ei asigură echilibrul barei, iar valoarea ei poate fi dedusă după principiul lui Lagrange, care spune, că dacă un sistem material se află în stare de echilibru sub acțiunea unor anumite forțe care îl solicită, lucrul mecanic al acestor forțe pentru orice deplasări infinit mici compatibile cu legăturile sistemului este egal cu zero.

$$\Sigma\, P\cos\,(P.Y)\triangle y = 0 \qquad (11)$$

Dacă deplasarea $\triangle\, y$ coincide cu direcția forței, expresia se simplifică și devine

$$\Sigma\, P\triangle y = 0 \qquad (12)$$

Aplicând această ecuație în cazul grinzii din fig. 31, putem scrie:

$$-A\,\delta + Py = 0\,; \qquad (13)$$

de unde:

$$A = P\,\frac{y}{\delta}$$

în care A este reacțiunea necunoscută;

δ — deplasarea virtuală compatibilă cu legăturile sistemului în direcția forței A și

y — deplasarea corespunzătoare în direcția forței P.

Direcția forței de echilibru care se introduce în locul legăturii care a fost înlăturată (reazim), trebue să fie întotdeauna de sens opus cu sensul deplasării, care devine compatibilă cu acel sistem prin suprimarea legăturii, astfel lucrul mecanic al acestei forțe se introduce cu semnul minus (—) în ecuația lucrului mecanic (13). Dacă la rezolvarea ecuației (13) forța care rezultă va avea semn negativ, aceasta arată că sensul deplasării virtuale a sistemului cinematic trebue să fie considerat în direcție opusă și în consecință sensul forței trebue schimbat.

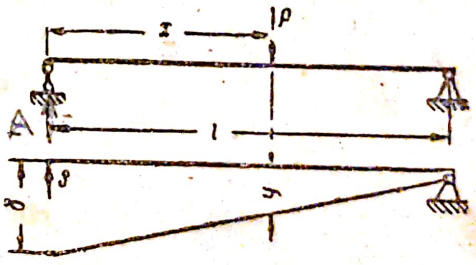


Fig. 31

Atragem atenția că în fig. 31, poziția forței P este luată arbitrar și că toate valorile y determină prin ordonatele diagramei deplasările virtuale compatibile în cazul deplasării reazimului din stânga cu valoarea δ

Dacă presupunem că forța $P = 1$, efortul în reazimul care a fost îndepărtat se va scrie astfel:

$$A = \frac{y}{\delta}\,; \qquad (14)$$

In această expresie:

δ este o mărime constantă;

y — o mărime variabilă ce caracterizează variația forței A în raport cu poziția pe grindă a sarcinii $P = 1$.

Această relație corespunde cu proprietatea liniei de influență (5), însă diferă prin aceea că ordonatele y ale diagramei deplasărilor la transformarea lor în ordonate ale liniei de influență, trebuesc modificate în raport cu scara deplasărilor în direcția legăturii suprimate, adică considerând $\delta = 1$.

In acest fel, diagrama deplasărilor virtuale măsurate la scara deplasărilor în direcția elementului suprimat este linia de influență a mărimii forței ce se aplică piese menționate.

Din fig. 31 se vede ușor că:

$$A = \frac{y}{\delta} = \frac{l - x}{l}$$

ceea ce corespunde cu ecuația (5) de mai înainte.

§ 8. Construirea liniilor de influență pentru o grindă simplu rezemată cu ajutorul metodelor cinematice

Orice grindă este un sistem rigid și indeformabil. Dacă facem o secțiune și separăm grinda în două elemente rigide, iar în locul în care am făcut secțiunea aplicăm două momente M egale și de sens opus și două forțe tăietoare Q de asemenea egale și de sens contrar (fig. 32), echilibrul acestor două porțiuni de grindă se menține. Fiecare dintre forțele de legătură interioare introduse în secțiune pot da naștere la o mișcare după caracterul lor; astfel momentul poate da o rotire unghiulară, iar forța Q o deplasare transversală (alunecare).

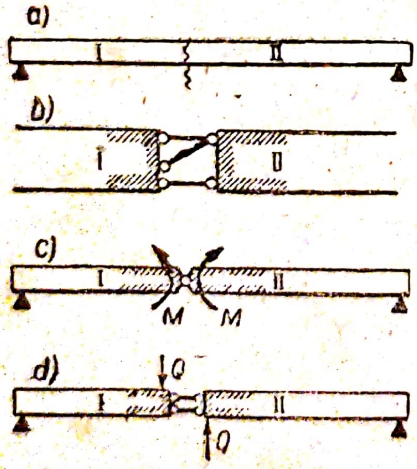


Fig. 32

Indeformabilitatea grinzii secționate se poate reprezenta în exterior sub forma a două elemente legate rigid între ele cu trei bare sau o articulație și o bară (fig. 32). Prin îndepărtarea uneia dintre aceste legături, ambele tronsoane ale grinzii au posibilitatea să se deplaseze în mai multe feluri. De exemplu, dacă păstrăm în secțiune numai articulația, dăm posibilitate tronsoanelor grinzii să se rotească în jurul acestei articulații fictive. Rotirea va fi însă înlăturată și echilibrul va fi restabilit, dacă în aceeași secțiune în locul barei înlăturate se vor aplica două momente egale și de sens contrar.

Dacă din secțiune se îndepărtează articulația, însă se va păstra legătura formată de cele două bare paralele (fig. 32 d), atunci tronsoanele grinzii vor avea posibilitatea să alunece în plan vertical, însă

nu vor a putea să se rotească unul față de celălalt. Posibilitatea de deplasare pe verticală poate fi împiedecată aplicând în secțiune două forțe tăietoare Q egale și de sens contrar.

Liniile de influență ale momentelor.

Facem o secțiune în grindă și presupunem că în această situație introducem articulația I—II care permite rotirea tronsoanelor I și II, însă nu permite deplasarea lor reciprocă (fig. 33).

Introducerea articulației I—II va da posibilitate grinzii să coboare în jos, iar diagrama deplasărilor virtuale ale tronsoanelor compatibile cu legăturile, va fi caracterizată prin două drepte care se intersectează în punctul 1—2 pe verticala coborîtă din articulație și care se intersectează cu axa absciselor în punctele $1e$ și $2e$. Restabilirea echilibrului este posibilă prin aplicarea în secțiune a două momente M egale și de sens contrar.

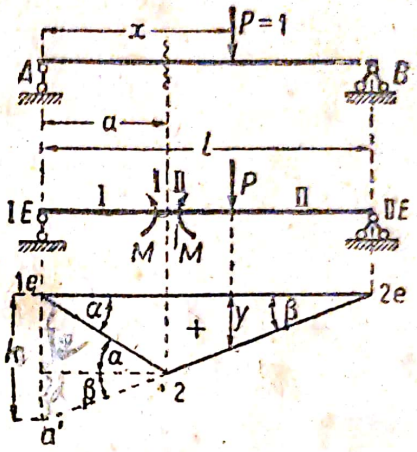


Fig. 33

Deoarece punctele de reazim A și B nu se pot deplasa, expresia lucrului mecanic virtual va fi :

$$-M\alpha - M\beta + P \cdot y = 0$$

de unde pentru $P = 1$

$$M = \frac{1 \cdot y}{\alpha + \beta} = \frac{y}{\delta}.$$

Valorile deplasărilor unghiulare α și β, fiind foarte mici, pot fi înlocuite cu tangentele corespunzătoare și anume :

$$\alpha + \beta = \delta : a \quad \text{(fig. 33)}$$

Atunci expresia momentului va fi :

$$M = \frac{y}{\alpha + \beta} = \frac{y}{\delta} \cdot a \qquad (15)$$

In această ecuație (pentru ca ordonata y să reprezinte chiar momentul M) trebue să avem :

$$\delta = \alpha + \beta = \frac{h}{a} = 1$$

Linia de influență a forței tăietoare

Secționând grinda după ss (fig. 34), să ne închipuim că ambele

tronsoane I și II sunt legate cu două bare paralele, care permit deplasarea relativă a tronsoanelor între ele — cu condiția ca ele să poată să se rotească în jurul articulațiilor *E* I și *E* II — însă nu și rotirea unui tronson față de celălalt. Centrul instantaneu de rotație relativă a acestor tronsoane se află la infinit și de aceea dreptele care alcătuesc diagrama deplasărilor virtuale trebue să fie paralele.

Limitele de aplicare ale dreptelor sunt formate de barele articulate, introduse în secțiunea grinzii ; proiecția acestor bare articulate și anume punctele 1—3 și 2—3, având în vedere lățimea infinit mică a secțiunii, se vor găsi pe aceeași verticală coborîtă din secțiune. In acest mod diagrama deplasărilor virtuale va fi alcătuită din două triunghiuri.

Expresia lucrului mecanic virtual va fi :

$$-Q\,c - Q\,c' + Py = 0$$

de unde

$$Q = \frac{1}{c+c'} \cdot y = \frac{y}{\delta} \tag{16}$$

și

$$\delta = c + c' = 1$$

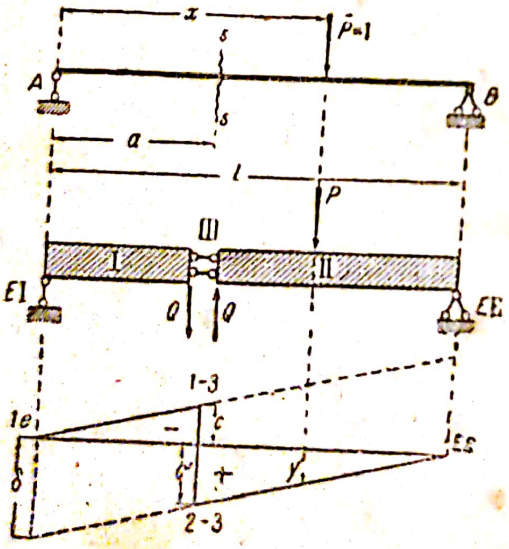


Fig. 34

§ 9. Proprietățile liniilor de influență

Cu ajutorul liniilor de influență se poate determina valoarea momentului, sau a forțelor tăietoare produse de orice fel de încărcare.

1. Dacă o construcție este solicitată de o sarcină oarecare *P*, diferită de unitate, valoarea momentului sau a forței tăietoare într'o secțiune va fi egală cu *P*. *y*, adică va fi de *P* ori mai mare decât cea produsă de sarcina egală cu 1 (unitatea).

Dacă o construcție va fi solicitată de un convoiu de sarcini $P_1, P_2 \ldots, P_n$ (fig. 35) atunci în baza legii independenței de acțiune a forțelor, *valoarea momentului sau a forței tăietoare produsă de convoiul de sarcini concentrate este egală cu suma produselor dintre valorile sarcinilor înmulțite cu ordonatele respective ale liniei de influență.*

$$S = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \ldots + P_n y_n = \sum_1^n Py \tag{17}$$

II. Dacă o construcție este încărcată cu o sarcină continuă (într'un mod oarecare) având intensitatea q_x, atunci determinarea momentului sau a forței tăietoare cu ajutorul liniei de influență este posibilă dacă considerăm această sarcină continuă ca împărțită în sarcini elementare concentrate de mărimea $q_x\,dx$ (fig. 36). Aceasta permite ca momentul sau forța tăietoare produsă de această sarcină continuă să fie exprimat printr'o integrală de forma :

$$S = \int_a^l (q_x\,dx)\,y_x,$$

care poate fi calculată, dacă se cunoaște variația sarcinii continue. In cazul unei sarcini uniform distribuite de q kg/m, calculul integralei se simplifică și avem :

$$S = q \int_a^l y_x\,dx = q\,\omega_a^l, \qquad (18)$$

în care ω_a^l este suprafața liniei de influență corespunzătoare lungimii pe care sarcina continuă este distribuită.

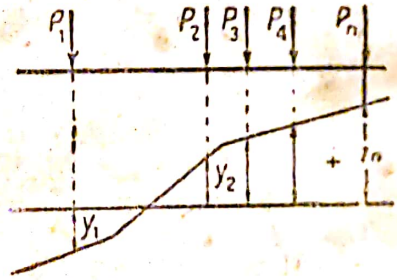


Fig. 35

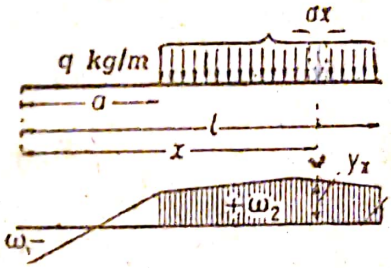


Fig. 36

Rezultă deci că în cazul unei *sarcini continue uniform distribuită, momentul sau forța tăietoare este dată de produsul dintre suprafața liniei de influență, în limitele porțiunii încărcate și valoarea sarcinii ce revine pe unitatea de lungime.*

Dacă linia de influență are porțiuni cu suprafețe pozitive și negative și dacă se încarcă din porțiunea pozitivă suprafața ω_1, iar din cea negativă suprafața ω_2, valorile momentelor și ale forțelor tăietoare ce rezultă din încărcarea acestor porțiuni se vor exprima prin diferența suprafețelor.

$$S = (\omega_1 - \omega_2)\,q$$

III. Orice sarcină, care acționează indirect asupra unei construcții, se concentrează în punctele ei de transmisiune (noduri). Generalizarea proprietăților liniilor de influență impune ca acestea, transformându-se, să-și păstreze totuși pe de o parte proprietățile principale (fig. 37) după care momentele și forțele tăietoare rezultă din relația $S = Py_x$,

Scanned with OKEN Scanner

iar pe de altă parte, această valoare să satisfacă condițiunile de transmitere a sarcinilor indirecte, astfel încât:

$$S = P_n\, y_n + P_{n+1}\, y_{n+1} = P\, y_x$$

Descompunând sarcina P pe antretoaze, avem:

$$P_n = P\,\frac{d - x}{d}$$

și

$$P_{n+1} = P\,\frac{x}{d}$$

de unde, după substituirea valorilor P_n și P_{n+1} și după reducerea cu P obținem:

$$(d - x)\, y_n + x\, y_{n+1} = d.y_x\,;$$

Această expresie este ecuația unei drepte care trece prin punctele cu ordonatele y_n și y_{n+1}.

Rezultă deci că *în cazul sarcinilor care acționează indirect, linia de influență între două noduri variază liniar.*

In cazul când sarcina calcă pe nod (antretoază), acțiunea ei asupra sistemului este identică cu acțiunea directă, deci ordonatele liniei de influență în dreptul nodurilor rămân aceleași ca și în cazul încărcării directe; ceea ce se modifică sunt numai ordonatele liniei de influență între noduri.

De aceea în cazul sarcinilor indirecte, linia de influență are forma unui poligon înscris în linia de influență trasată pentru sarcini aplicate direct, având deci vârfurile sale în dreptul nodurilor. In fig. 38, este reprezentată construcția liniei de influență pentru reacțiunea din reazimul A al unei grinzi la care sarcinile acționează indirect.

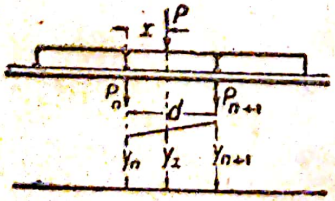


Fig. 37

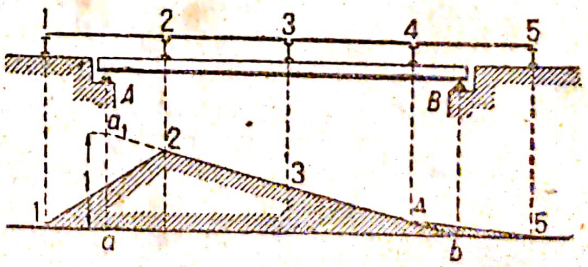


Fig. 38

Linia frântă aa_1b conturează linia de influență a reacțiunii din reazimul A la o grindă simplu rezemată, acționată de sarcini directe. Dacă pe această grindă și pe culee se așază o serie de antretoaze (grinzișoare transversale) 1, 2....., 5, linia de influență a aceleiași reacțiuni se va transforma în poligonul 1—2—3—4—5 la care ordonatele, în dreptul nodurilor, își păstrează aceeași valoare ca și în ca-

Scanned with OKEN Scanner

zul încărcării directe, însă conturul pe sectoarele 1 — 2 și 4 — 5 se schimbă.

§ 10. Determinarea celei mai defavorabile poziții a sarcinilor

Este evident că atunci când o sarcină concentrată se deplasează pe o construcție valoarea maximă a momentului se va obține când sarcina calcă în dreptul ordonatei maxime y_{max} a liniei de influență

$$S_{max} = P.y_{max}$$

Este de asemenea evident că, pentru ca să determinăm — utilizând metoda liniilor de influență — valoarea maximă a momentului sau a forței tăietoare dată de un convoiu de sarcini, trebue să căutăm *ca sarcinile cele mai grele să fie așezate în dreptul ordonatelor celor mai mari ale liniei de influență.* Nu se poate însă preciza dinainte care anume va fi poziția critică *). Aflarea acestei poziții critice este mult ușurată dacă se aplică următoarea proprietate bine cunoscută a liniilor de influență și anume : *poziția cea mai defavorabilă a convoiului în raport cu linia de influență se realizează numai atunci când o sarcină din convoiu calcă în dreptul unui vârf oarecare al liniei de influență.*

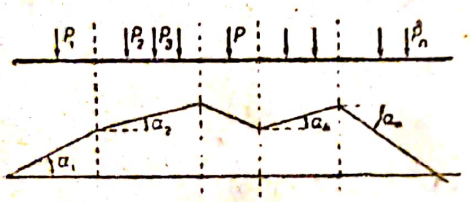


Fig. 39

Pentru a demonstra, să presupunem că avem o linie de influență poligonală (fig. 39) cu laturile înclinate cu unghiurile α_1, α_2, . . . , α_n față de orizontală, semnul lor fiind determinat prin poziția relativă a laturilor poligonului față de orizontală și un sistem arbitrar de forțe P_1, P_2 . . . , P_n, așezate oarecum în raport cu linia de influență.

Valoarea forței tăietoare sau a momentului S se determină cu ajutorul liniei de influență, folosind expresia (17) :

$$S = \sum_1^n P.y .$$

Convoiul poate fi însă considerat și fracționat, prin descompunerea lui în grupe de forțe, care acționează în regiunile liniei de influență ce are aceeași înclinare tg α_R. Rezultatul este același dacă înlocuim sarcinile de pe fiecare regiune prin rezultantele lor R_1, R_2 . . . . , R_n ; obținem :

$$S = \sum_1^n P\ y = R_1 y_1 + R_2 y_2 + \ldots + R_n y_n \qquad (19)$$

*) **Nota traducătorului.** Sub denumirea de poziție critică, se înțelege poziția care dă solicitarea cea mai mare.

Scanned with OKEN Scanner

în care y este ordonata liniei de influenţă în dreptul fiecărei rezultante.

Dacă presupunem că întregul convoi s'a deplasat cu dx spre stânga sau spre dreapta, valoarea momentului sau a forţei tăietoare va căpăta o creştere ds şi toate ordonatele din membrul din dreapta egalităţii (19) se vor modifica cu valoarea $dx\ tg\ \alpha_R$. Astfel creşterea forţei tăietoare sau a momentului se va exprima prin:

$$ds = (R_1\ \text{tg}\ \alpha_1 + R_2\ \text{tg}\ \alpha_2 + \ldots + R_n\ \text{tg}\ \alpha_n).\ dx \qquad (20)$$

Semnul creşterii ds a forţei tăietoare sau a momentului este în funcţie de semnul produsului termenilor dx şi $\Sigma\ R\ \text{tg}\ \alpha$ din partea dreaptă.

Intru cât unghiurile de înclinare a laturilor liniei de înfluenţă $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ rămân invariabile şi au semne diferite, expresia (20) poate să-şi schimbe semnul numai prin variaţia valorilor $R_1, R_2 \ldots, R_n$; aceasta este posibil numai dacă o sarcină oarecare P trece dintr'o regiune într'alta, aceasta fiind tocmai trecerea acestei sarcini printr'un vârf al liniei de influenţă, ceea ce era de demonstrat.

La căutarea celei mai defavorabile poziţii a convoiului de sarcini, trebue să ţinem seama de semnul creşterii $\pm\ ds$ ce se obţine prin încercări. Dacă admitem că dx este pozitiv în cazul deplasării convoiului spre dreapta, este evident că atâta timp cât expresia $\sum R\ \text{tg}\ \alpha$ va rămâne pozitivă, creşterea lui ds va fi de asemenea pozitivă, deci deplasarea convoiului spre dreapta trebue să continue până când $\sum R\ \text{tg}\ \alpha$ va deveni negativă, ceea ce va indica o micşorare a valorii lui S, adică o trecere a funcţiei prin valoarea sa maximă.

Deoarece în cazul deplasării convoiului spre stânga dx este negativ, atunci atât timp cât $\sum R\ \text{tg}\ \alpha$ va fi negativ, creşterea lui ds va fi tot negativă, de aceea mişcarea convoiului spre stânga trebue să continue până când expresia $\sum R\ \text{tg}\ \alpha$ va deveni pozitivă.

Aceste proprietăţi uşurează găsirea poziţiei critice. De exemplu, dacă la prima poziţie de încărcare luată arbitrar, valoarea lui $\sum_1 R\ \text{tg}\ \alpha$ este negativă, atunci în baza celor de mai sus, tot convoiul trebue deplasat spre stânga, până când această valoare devine pozitivă şi invers: dacă acea expresie este pozitivă, urmează ca convoiul să fie deplasat spre dreapta.

Exemplu. Să se determine poziţia critică, cea mai defavorabilă, a unui convoiu de sarcini, pentru o linie de influenţă ce are forma unui patrulater $A\ B\ C\ D$ (fig. 40).

Expresiile tangentelor unghiurilor liniei de influenţă sunt:

$$\text{tg}\ \alpha_1 = \frac{H}{15}$$

$$\text{tg}\ \alpha_2 = \frac{h_2 - h_1}{6} = -\frac{H}{6}\left(\frac{12}{15} - \frac{6}{9}\right) = -\frac{H}{45}$$

$$\text{tg}\ \alpha_3 = \frac{H}{9}$$

Presupunem că poziţia critică va fi aceea când osia 4 a convoiului va călca în dreptul ordonatei h_1 (fig. 40, schema I). Când în cursul deplasării osia 4 trece în porţiunea din stânga $A\ B$, vom avea:

$$R_1 = 4.22 = 88 \text{ t} ; \qquad R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = 88 \frac{H}{15} ;$$

$$R_2 = 22 + 16 = 38 \text{ t} ; \qquad R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = -38 \frac{H}{45} ;$$

$$R_3 = 3.16 = 48 \text{ t} ; \qquad R_3 \operatorname{tg} \alpha_3 = -48 \frac{H}{9} ;$$

și $$\sum R \operatorname{tg} \alpha = \frac{264 - 38 - 240}{45} H = -\frac{14}{45} H$$

Deoarece la deplasarea spre stânga a convoiului se constată că suma valorilor $R \operatorname{tg} \alpha$ este negativă, rezultă că osia 4 nu este sarcina critică, funcția continuând să crească. Continuăm să deplasăm convoiul spre stânga, până ce una din sarcini ajunge în dreptul unuia din vârfurile liniei de influență. Poziția următoare, în care o sarcină cade în dreptul unui vârf al liniei de influență va fi aceea când osia 7 calcă în dreptul vârfului C (fig. 40, schema II). Când osia 7 trece în porțiunea $B\,C$, toate sarcinile vor rămâne pe lungimea liniei de influență, astfel că vom avea :

$$R_1 = 4.22 = 88 \text{ t} ; \qquad R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = +88 \frac{H}{15}$$

$$R_2 = 22 + 2.16 = 54 \text{ t} ; \qquad R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = -54 \frac{H}{45} ;$$

$$R_3 = 2.16 = 32 \text{ t} ; \qquad R_3 \operatorname{tg} \alpha_3 = -32 \frac{H}{9} ;$$

$$\sum R \operatorname{tg} \alpha = \frac{+264 - 54 - 160}{45} H = \frac{50}{45} H .$$

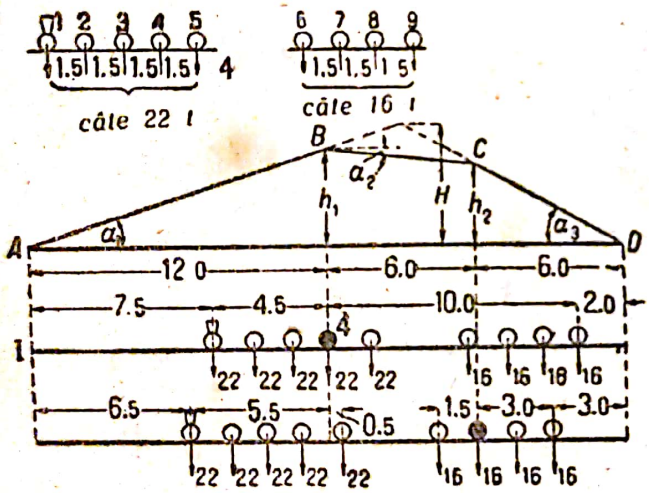


Fig. 40

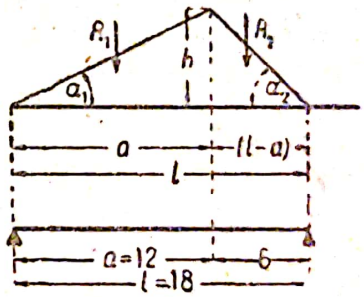


Fig. 41

Deoarece odată cu trecerea osiei 7 din partea dreaptă în cea stângă, suma valorilor $R \operatorname{tg} \alpha$ a devenit pozitivă rezultă că osia 7 este sarcină critică, adică poziția critică se realizează când o,sia 7 calcă în dreptul ordonatei C.

Linia de influență de formă triunghiulară

În unele cazuri particulare, când linia de influență este de formă triunghiulară (fig. 41), expresia (20) devine :

$$ds = (R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2)\, dx$$

Valoarea maximă a acestei funcții va avea loc când :

$$R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = 0$$

Substituind în această expresie valorile tangentelor din fig. 41, vom obține:

$$R_1 \frac{h}{a} - R_2 \frac{h}{l-a} = 0$$

Schimbarea semnului acestei sume este determinată de egalitatea:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{a}{l-a}$$

Pe baza proprietăților proporțiilor, vom avea:

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{a}{l}$$

sau

$$R_1 = R \frac{a}{l} \tag{21}$$

în care:

$$R_1 + R_2 = R$$

R fiind deci rezultanta tuturor sarcinilor de pe lungimea liniei de influență. Din cele expuse, rezultă că sarcina critică P_{cr} este determinată de condiția:

$$\sum_1^{k-1} P < R \frac{a}{l} < \sum_1^{k} P \tag{22}$$

Rezultă deci că: *pentru o linie de influență de formă triunghiulară, poziția critică (cea mai defavorabilă) a sarcinilor se realizează atunci, când raportul dintre greutatea sarcinilor de pe fiecare porțiune a ei și greutatea sarcinilor de pe întreaga lungime a liniei de influență este egal cu raportul dintre lungimea acestei porțiuni și lungimea totală a liniei de influență.*

Exemplu: O linie de influență triunghiulară (fig. 41) are lungimea $l = 18$ m, iar porțiunea $a = 12$ m. Să se găsească poziția critică corespunzătoare convoiului reprezentat în fig. 40.

Greutatea sarcinilor pe deschiderea grinzii este:

$$R = 5.22 + 4.16 = 174 \text{ t}$$

Numărul sarcinilor ce trebue să încapă pe porțiunea din stânga de lungimea $a = 12$ m este:

$$R_1 = R \frac{a}{l} = 174 \frac{12}{18} = 116 \text{ t}$$

Sarcina critică va fi osia 6 întru cât, atât timp cât această osie se va găsi în porțiunea din dreapta, suma sarcinilor ce se găsesc pe sectorul din stânga

$$\sum P = 5.22 = 110 \text{ t} < R_1 = 116 \text{ t};$$

Când această osie va trece în porțiunea din stânga, suma sarcinilor din această porțiune va fi:

$$\sum P = 5.22 + 16 = 126 \text{ t} > R_1 = 116 \text{ t}$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 11. Calculul momentelor şi forţelor tăietoare cu ajutorul liniilor de înfluenţă

In cazul unei linii de înfluenţă, ce are conturul alcătuit din linii drepte, variaţia valorilor ordonatelor y se poate exprima în funcţie de abscise şi de unghiurile de înclinare α, β, γ ale liniilor de înfluenţă faţă de orizontală (fig. 42).

Considerând punctul A ca origine a sistemului de coordonate, atunci toate ordonatele liniei de înfluenţă corespunzătoare porţiunii $A\ B$ se pot exprima prin formula generală :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha$$

Pe porţiunea $B\ C$ ordonatele y ale liniei de înfluenţă pot fi exprimate prin diferenţa segmentelor $mn - nq$:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - (x - a)\ (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)$$

Pe porţiunea $C\ D$, aceste ordonate y pot fi exprimate prin diferenţa segmentelor respective :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - (x-a)\ (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) - (x - b)\ (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)$$

şi aşa mai departe.

In consecinţă, expresia $\sum Py$ corespunzătoare ambelor porţiuni se poate formula astfel :

$$\sum_{o}^{c} Py = \sum_{o}^{a} Px \operatorname{tg} \alpha + \sum_{a}^{b} P \left[x \operatorname{tg} \alpha - (x-a)\ (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \right] +$$

$$+ \sum_{b}^{c} P \left[x \operatorname{tg} \alpha - (x-a)\ (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) - (x-b)\ (\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta) \right] + \ldots + \ldots \text{ etc.}$$

sau în alt mod :

$$\sum_{o}^{c} Py = \sum_{o}^{c} Px \operatorname{tg} \alpha - \sum_{a}^{c} P\ (x-a)\ (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) -$$

$$- \sum_{b}^{c} P\ (x - b)\ (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) + \ldots + \ldots \text{-etc.} \qquad (23)$$

Deoarece valorile $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$ . . . sunt constante, $\sum_{o}^{c} Px$ nu este decât momentul tuturor sarcinilor convoiului cuprinse pe linia de influenţă în raport cu punctul A şi

$$\sum_{a}^{c} P\ (x - a)$$

este momentul în raport cu punctul B al tuturor sarcinilor ce se află în dreapta acestui punct, iar

$$\sum_{o}^{c} P\ (x - b)$$

Scanned with OKEN Scanner

este momentul în raport cu punctul C al sarcinilor ce se găsesc în partea din dreapta etc. Rezultă deci că expresia (23) poate fi scrisă într'o formă generalizată, astfel :

$$\sum_{o}^{c} Py = M_a tg\ \alpha - M_b\ (\text{tg}\ \alpha - \text{tg}\ \beta) - \\ - M_c\ (\text{tg}\ \beta + \text{tg}\ \gamma)\ , \tag{24}$$

în care semnul tangentei rezultă din înclinarea liniei de influenţă faţă de orizontală.

Simplificările şi transformările ce se pot face asupra acestei expresii (24) depind de formele particulare ale liniilor de influenţă.

De exemplu în cazul când linia de influenţă a momentului pentru o secţiune a grinzii are o formă triunghiulară (fig. 43), expresia (24) poate fi pusă sub forma următoare :

$$\sum Py = M_a\ \text{tg}\alpha - M_b\ (\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta)$$

Întru cât într'o linie de influenţă de formă triunghiulară a momentului

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{l - a}{l} \text{ şi } \text{tg}\ \beta = \frac{a}{l}\ ,$$

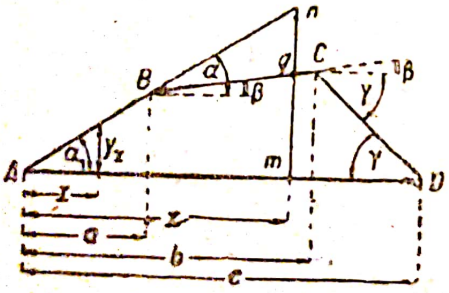


Fig. 42

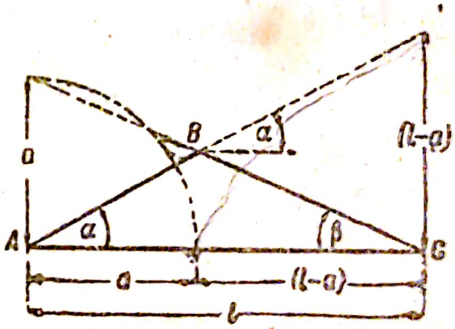


Fig. 43

după substituirile şi reducerile corespunzătoare, obţinem

$$\sum Py = \frac{l - a}{l}\ M_a - M_b\ ,$$

în care toate valorile rezultă din dimensiunile geometrice ale liniei de influenţă.

In cazul convoaielor de sarcini normalizate (trenuri, autovehicule etc.) calculul valorilor M_a, M_b,.. se simplifică simţitor prin întocmirea de tablouri similare cu tabloul 1, alcătuit pentru schema II-a a convoiului de trenuri de tip normal după circulara din 1921 (tablouri de

calcul pentru sarcinile convoaielor după circulara din 1921, normele *NKPS* ediția 1923 *)

In tablou sunt date momentele și rezultantele în raport cu fiecare osie a convoiului, ceea ce dă posibilitatea să se calculeze momentul în raport cu orice punct al abscisei aplicând formula:

$$M = M_n + R_n \cdot c,$$

în care M_n și R_n sunt valorile momentului și ale rezultantei în raport cu osia n; c — distanța dela această osie până la punctul în raport cu care se ia momentul (tabloul 1)

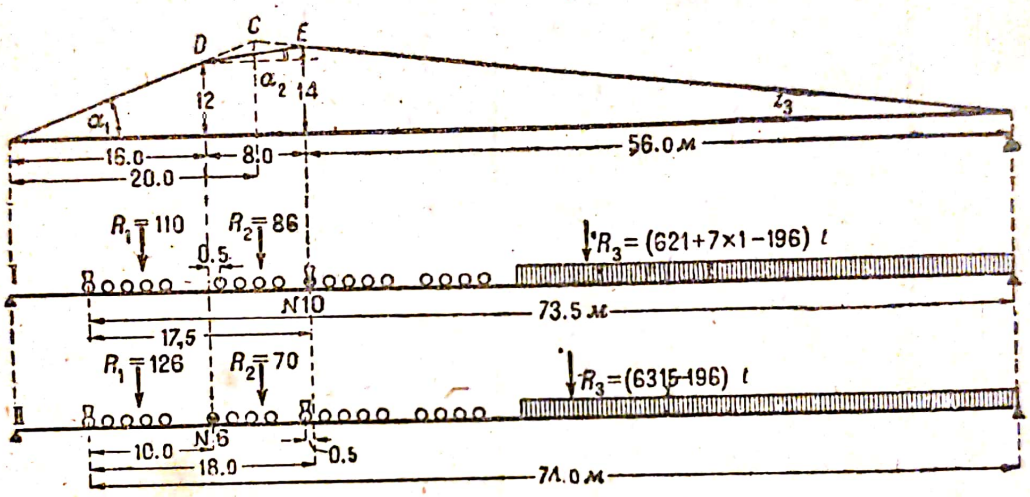


Fig. 44

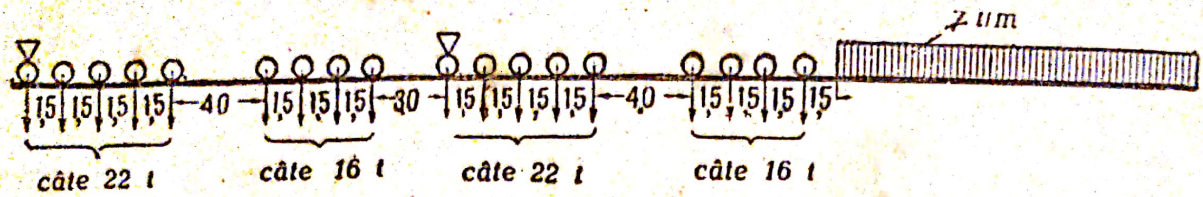
Exemplu: Să se calculeze cu ajutorul liniei de influență din fig. 44 momentul maxim dat de convoiul din tabloul 1.

Valoarea tangentelor unghiurilor între orizontală și dreptele ce formează linia de influență va fi:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{1}{4} \quad \operatorname{tg} \alpha_3 = -\frac{1}{4}$$

*) **Notă.** Aceste tabele sunt indicate numai ca exemplu; în prezent în URSS, calculele — în majoritatea cazurilor — se fac cu ajutorul tabelelor de sarcini echivalente, după cum se va vedea în paragraful următor.

Tabloul momentelor şi al rezultantelor convoiului nr. 1, după schema II a normelor din 1921



Numărul osiilor n	Lungimea de încărcare l_n în m	Rezultanta $\sum_1^n P$ în t	Momentul M_n în t m	Lungimea de încărcare l_n în m	Rezultanta $\sum_1^n P$ în t	Momentul M_n în t m
1	0	22	0	39,5	390,0	8 599,0
2	1,5	44	33,0	41,0	400,5	9 191,875
3	3,0	66	99,0	44,0	421,5	10 424,875
4	4,5	88	198,0	47,0	442,5	11 720,875
5	6,0	110	330,0	50,0	463,5	13 079,875
6	10,0	126	770,0	53,0	484,5	14 501,875
7	11,5	142	959,0	56,0	505,5	15 986,875
8	13,0	158	1 172,0	59,0	526,5	17 534,875
9	14,5	174	1 409,0	62,0	547,5	19 145,875
10	17,5	196	1 931,0	65,0	568,5	20 819,875
11	19,0	218	2 225,0	68,0	589,5	22 556,875
12	20,5	240	2 552,0	71,0	610,5	24 356,875
13	22,0	262	2 912,0	74,0	631,5	26 219,875
14	23,5	284	3 305,0	77,0	652,5	28 145,875
15	27,5	300	4 441,0	80,0	673,5	30 134,875
16	29,0	316	4 891,0	83,0	694,5	32 186,875
17	30,5	332	5 365,0	86,0	715,5	34 301,875
18	32,0	348	5 863,0	89,0	736,5	36 479,875
	35,0	358,5	6 914,875	92,0	757,5	38 720,875
	38,0	379,5	8 021,875	95,0	778,5	41 024,875

Determinarea preliminară a poziţiei critice (cea mai defavorabilă) a sarcinilor se face pornind dela proprietăţile liniilor de influenţă de formă triunghiulară *A B C* (fig. 44) aşezând convoiul într'o astfel de poziţie încât osia 10 să calce în dreptul vârfului *E* (fig. 44 I).

In acest caz :

$$\sum R \operatorname{tg} \alpha = 110\frac{3}{4} - 86\frac{1}{4}\left(610{,}5 + \frac{631{,}5 - 610{,}5}{3} \cdot 2{,}5 - 196\right)\frac{1}{4} = -4 < 0$$

Deplasând convoiul spre stânga, poziţia următoare în care o osie calcă în dreptul unui vârf al liniei de influenţă corespunde cu osia 6 în dreptul vârfului D (fig. 44 II) ; şi în acest caz avem :

$$\sum R \operatorname{tg} \alpha = 126\frac{3}{4} + 70\frac{1}{4} - (631{,}5 - 196)\frac{1}{4} = 3{,}1 > 0$$

Astfel poziţia în care osia 6 calcă în vârful *D*, determină poziţia critică (cea mai defavorabilă) a convoiului.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea momentului maxim, utilizăm expresia (24) :

$$S = M \operatorname{tg} \alpha_3 - M_E (\operatorname{tg} \alpha_3 + \operatorname{tg} \alpha_2) - M_D (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2)$$

Introducând datele din tabloul 1, vom avea :

$$S = 26219{,}875 \frac{1}{4} - \left[1931{,}0 + 196 \left(18 - 17{,}5 \right) \right] \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) =$$

$$- 770 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) = 5155{,}47 \text{ tm}$$

Dacă valoarea lui M_B nu ar fi coincis cu una din datele tabloului 1, valoarea lui putea fi calculată prin interpolare între valorile momentelor și ale rezultantelor corespunzătoare lungimilor vecine 71 și 74 din tablou, utilizând formula :

$$M_3 = \sum_1^n Pc + q \cdot 0{,}5c^2$$

De exemplu pentru o lungime de încărcare de 73,5 m, expresia momentului va fi :

$$25.881 + 628.0{,}5 + 7 \cdot \frac{1}{2} \, 0{,}5^2 = 26195{,}875$$

§ 12. Calculul forțelor tăietoare și al momentelor, cu ajutorul sarcinilor echivalente

Sarcină echivalentă) se numește acea sarcină uniform distribuită care produce într'o secțiune sau element același moment sau forță tăietoare ca și convoiul de sarcini concentrate.*

După cum s'a arătat mai sus, în cazul calculului cu sarcini concentrate, forța tăietoare se determină prin formula (17)

$$S = \sum Py$$

în care y_1 , y_2 ... reprezintă ordonatele liniei de înfluență în dreptul sarcinilor P_1, P_2, ...

După definiția de mai sus a sarcinii echivalente, același moment sau forță tăietoare trebue să rezulte și din formula :

$$S = p. \omega$$

în care ω este suprafața liniei de influență ;

p este sarcina echivalentă.

Egalând cele două expresii ale lui S vom obține pentru o linie de înfluență anumită, valoarea sarcinii echivalente și anume :

$$p = \frac{\sum Py}{\omega}$$

---

*) **Nota traducătorului.** In loc de sarcină echivalentă, se poate spune și „echivalent",

Valoarea sarcinii echivalente este deci funcție de felul și forma liniei de influență. Pentru linii de influență asemănătoare care se pot obține una dintr'alta prin transformarea în același raport a tuturor ordonatelor*), sarcinile echivalente au aceeași valoare.

Intr'adevăr, dacă ordonatele liniei de influență sunt transformate în același raport

$$Y_n = n\,y,$$

atunci atât suma $\sum P Y_n$ cât și suprafața ω_n se vor transforma și ele în același raport, adică tot de n ori în raport cu valorile $\sum Py$ și ω și vom avea deci:

$$P_n = \frac{\sum P\,Y_n}{\omega_n} = \frac{n \sum Py}{n\omega} = p$$

Această proprietate de similitudine permite să se întocmească tablouri de sarcini echivalente pentru lungimi de încărcare determinate (deschideri), acționate de convoaie de sarcini concentrate (trenuri etc.) și să se utilizeze aceste tablouri la determinarea forțelor tăietoare și a momentelor la grinzi care au linii de influență asemenea.

In tabloul 2 sunt indicate sarcinile echivalente pe 1 m pentru cale simplă ce se întrebuințează în prezent în URSS pentru a înlocui efectul sarcinilor convoiului normal H_1. Aceste tablouri sunt întocmite pentru linii de influență triunghiulare în trei variante: triunghiul având vârful pe reazim, la sfertul și la mijlocul deschiderii.

Dacă vârful liniei de influență triunghiulare nu coincide cu reazimul, nici cu sfertul și nici cu mijlocul deschiderii, ci se găsește la o distanță a (de exemplu între reazim și primul sfert al deschiderii), atunci valoarea sarcinii echivalente corespunzătoare acestei linii de influență se determină prin interpolare, utilizând formula:

$$p_a = p_0 - (p_0 - p_{0,25})\,\frac{a}{0{,}25\,l}$$

In mod analog se stabilesc și sarcinile echivalente pentru deschideri care nu figurează în tablou.

Exemplu. Să se determine, cu ajutorul sarcinilor echivalente, forțele tăietoare corespunzătoare unei linii de influență dată.

Presupunem că avem linia de influență reprezentată în fig. 45.

Suprafața liniei de influență este:

$$\omega\,\frac{1}{2}\,109{,}2 \cdot 1{,}17 = 63{,}9\ \text{m}^2$$

Deoarece în tablou nu există date pentru linia de influență de lungime $l = 109{,}2$ m, sarcina echivalentă trebue să fie determinată prin interpolare.

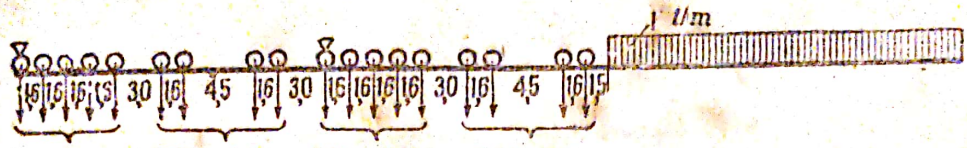
Utilizând datele din coloana a doua a tabloului 2, corespunzătoare la 100 și 110 m, obținem pentru deschiderea de 109,2 m următoarele sarcini echivalente: pe reazim

$$q_0 = 1{,}34 - \frac{1{,}34 - 1{,}32}{10} \cdot 9{,}2 = 1{,}322$$

*) **Nota traducătorului.** Asemenea linii se pot denumi și „linii afine".

Tabloul 2

Încărcările echivalente pe 1 m cale pentru convoiul tip H1



Deschiderea în m	Pentru regim			Pentru sferlul deschiderii			Pentru mijlocul deschiderii		
	Încărcarea echivalentă k_0 în t/m	Greutatea totală		Încărcarea echivalentă $k_{0,25}$ în m/t	Greutatea totală		Încărcarea echivalentă $k_{0,5}$ în t/m	Greutatea totală	
		locomotivă în t	vagoane în t		locomotivă în t	vagoane în t		locomotivă în t	vagoane în t
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	7,00	3,5	—	7,00	3,5	—	7,00	3,5	—
2	4,20	7,0	—	3,50	3,5	—	3,00	3,5	—
3	3,42	7,0	—	3,01	7,0	—	2,51	3,5	—
4	3,15	10,5	—	2,57	7,0	—	2,45	10,5	—
5	2,91	14,0	—	2,41	10,5	—	2,41	10,5	—
6	2,80	14,0	—	2,26	10,5	—	2,26	10,5	—
7	2,71	17,5	—	2,26	17,5	—	2,26	17,5	—
8	2,63	17,5	—	2,28	17,5	—	2,28	17,5	—
9	2,51	17,5	—	2,23	17,5	—	2,23	17,5	—
10	2,42	20,5	—	2,16	17,5	—	2,16	17,5	—
12	2,29	23,5	—	2,05	20,5	—	1,98	17,5	—
14	2,16	23,5	—	1,97	23,5	—	1,88	23,5	—
16	2,03	26,5	—	1,88	23,5	—	1,82	26,5	—
18	1,95	29,5	—	1,77	23,5	—	1,79	29,5	—
20	1,88	29,5	—	1,69	26,5	—	1,74	29,5	—
25	1,77	40,0	—	1,60	33,0	—	1,59	32,5	—
30	1,73	47,0	—	1,54	47,0	—	1,52	41,5	—
35	1,70	53,0	—	1,52	50,0	—	1,46	45,0	1,4
40	1,65	59.0	0,8	1,49	53,0	—	1,44	55,5	2,1
45	1,61	59,0	0,8	1,46	59,0	0,9	1,44	59,0	3,9
50	1,58	59,0	10,8	1,43	59,0	4,7	1,43	59,0	6,4
60	1,51	59,0	20,8	1,37	59,0	15,2	1,37	59,0	13,0
70	1,46	59,0	30,8	1,33	59,0	22,7	1,32	59,0	19,6
80	1,41	59,0	40,8	1,29	59,0	31,8	1,27	59,0	26,2
90	1,37	59,0	50,8	1,26	59,0	43,8	1,22	59,0	32,8
100	1,34	59,0	60,8	1,24	59,0	52,9	1,18	59,0	42,4
110	1,32	59,0	70,8	1,22	59,0	63,9	1,15	59,0	51,9
120	1,29	59,0	80,8	1,20	59,0	71,4	1,13	59,0	61,0
130	1,27	59,0	90,8	1,18	59,0	80,5	1,11	59,0	71,0
140	1,26	59,0	100,8	1,16	59,0	89,6	1,10	59,0	81,0
150	1,24	59,0	110,8	1,15	59,0	97,1	1,08	59,0	91,0
160	1,23	59,0	120,8	1,14	59,0	106,2	1,07	59,0	101,0
170	1,21	59,0	130,8	1,12	59,0	113,7	1,06	59,0	112,0
180	1,20	59,0	140,8	1,11	59,0	122,8	1,06	59,0	121,5
190	1,19	59,0	150,8	1,10	59,0	133,3	1,05	59,0	132,5
200	1,18	59,0	160,8	1,09	59,0	140,8	1,05	59,0	142,0

când $l \geq 40$

$$k_0 = l + \frac{39,6}{l} - \frac{539}{l^2}$$

când $l \geq 120$

$$k_{0,5} = 1 + \frac{1660}{l^2}$$

la sfertul deschiderii

$$q_{1/4} = 1{,}24 - \frac{1{,}24 - 1{,}22}{10} \cdot 9{,}2 = 1{,}222$$

Vârful liniei de influență se găsește la distanța a = 18,2 m, între reazim și sfertul deschiderii, de aceea sarcina echivalentă corespunzătoare pentru această linie de influență trebue să fie determinată prin interpolare :

$$q_a = 1{,}322 - (1{,}322 - 1{,}222) \cdot \frac{18{,}2}{27{,}3} = 1{,}255$$

Tabloul 2 de mai sus este alcătuit în ipoteza încărcării teoretice de 3,5 t pe osie ; în calculele pentru încărcările corespunzătoare unei alte „clase" de convoiu, aceste valori vor fi înmulțite cu coeficientul k aferent clasei respective.

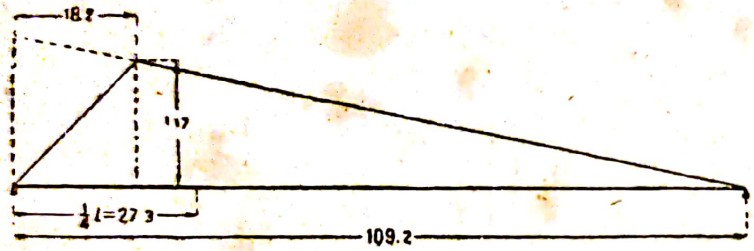


Fig. 45

De exemplu pentru căile ferate secundare $k = 6$ și $H_6 = 6\ H_1$; pentru căile ferate principale $k = 7$ și $H_7 = 7\ H_1$ etc.

Astfel forța tăietoare corespunzătoare liniei de influență din exemplul de mai sus va fi :

$$S = 7 \cdot 63{,}9 \cdot 1{,}255 = 561{,}3\ t$$

CAPITOLUL 3

GRINZI SIMPLU REZEMATE

§ 13. Momente şi forţe tăietoare din sarcini permanente

Calculul momentelor şi forţelor tăietoare în grinzile simplu rezemate, încărcate cu sarcini concentrate sau distribuite acţionând direct şi construirea curbelor respective este cunoscută din cursul de „Rezistenţa materialelor". De aceea lăsând la o parte bazele acestor calcule, ne vom ocupa numai de influenţa transmiterii indirecte a sarcinilor asupra momentelor şi forţelor tăietoare ce se nasc în grinzile principale.

Grinzile de transmitere (antretoazele) (fig. 46), transmit grinzii principale — în anume puncte numite noduri — orice sarcini sub forma unor forţe concentrate, care reprezintă reacţiunile grinzişoarelor longitudinale (numite la poduri-longeroni) care sunt aşezate pe aceste grinzi de transmitere (antretoaze). In cazul acţiunii indirecte a sarcinilor, curba momentelor incovoietoare are forma unui poligon cu vârfurile în dreptul nodurilor (antretoazelor). Curba momentelor încovoietoare la o grindă acţionată indirect se poate trasa ţinând seama că momentele şi forţele tăietoare ale grinzii principale în dreptul nodurilor (antretoazelor) au aceleaşi valori ca şi atunci când sarcina ar fi solicitat direct grinda principală ; valorile acestor momente M_1, M_2 ..... se calculează cu ajutorul metodelor obişnuite, în raport cu poziţia sarcinilor. In porţiunile dintre noduri (antretoaze) curba momentelor variază liniar, deoarece în aceste porţiuni grinda principală nu este solicitată de nici o sarcină. [1])

In cazul când curba momentelor se trasează grafic, aceasta trebue să se facă mai întâi pe baza metodei cunoscute a poligonului funicular pentru sistemul de sarcini dat ; acest poligon reprezentat în fig. 46 este trasat prin conturul *a b c d e f* ; ordonatele lui, în dreptul nodurilor 1, 2, 3, 4, 5, 6 îşi păstrează valorile şi atunci când transmiterea sarcinilor se face indirect prin antretoaze. Rezultă deci că pentru a trasa curba momentelor în cazul acţiunii indirecte a sarcinilor, trebue să unim prin linii drepte ordonatele 1, 2, . . . 6. Din construcţie se vede că în cazul sarcinilor indirecte ; curba momentelor este un poligon înscris în poligonul curbei momentelor pentru cazul când sarcinile acţionează direct.

1) **Notă.** Trebue totuşi să luăm în consideraţie că acest lucru este valabil numai în cazurile în care antretoazele dela capetele grinzii (frontale) se găsesc deasupra articulaţiilor reazimelor. Dacă această condiţie nu este îndeplinită, sarcinile care acţionează pe panourile de lângă reazime (marginale) sunt repartizate pe antretoazele cele mai apropiate, deci şi la grinzile ce se găsesc în afara deschiderii grinzii principale, ceea ce schimbă şi valoarea reacţiunilor din reazime şi caracterul general al curbei, faţă de aceea rezultată din încărcarea directă. In astfel de cazuri curba momentelor trebue construită în raport cu sarcinile concentrate ce se transmit prin antretoaze.

Scanned with OKEN Scanner

In fig. 47 este reprezentată construcția curbei momentelor pentru o sarcină uniform distribuită transmisă indirect (prin antretoaze). Curba momentelor este reprezentată în acest caz prin poligonul 0 — 1 — 2 — 3 — 4 — 5, înscris în parabola care înfățișează curba momentelor când sarcina uniform distribuită acționează direct.

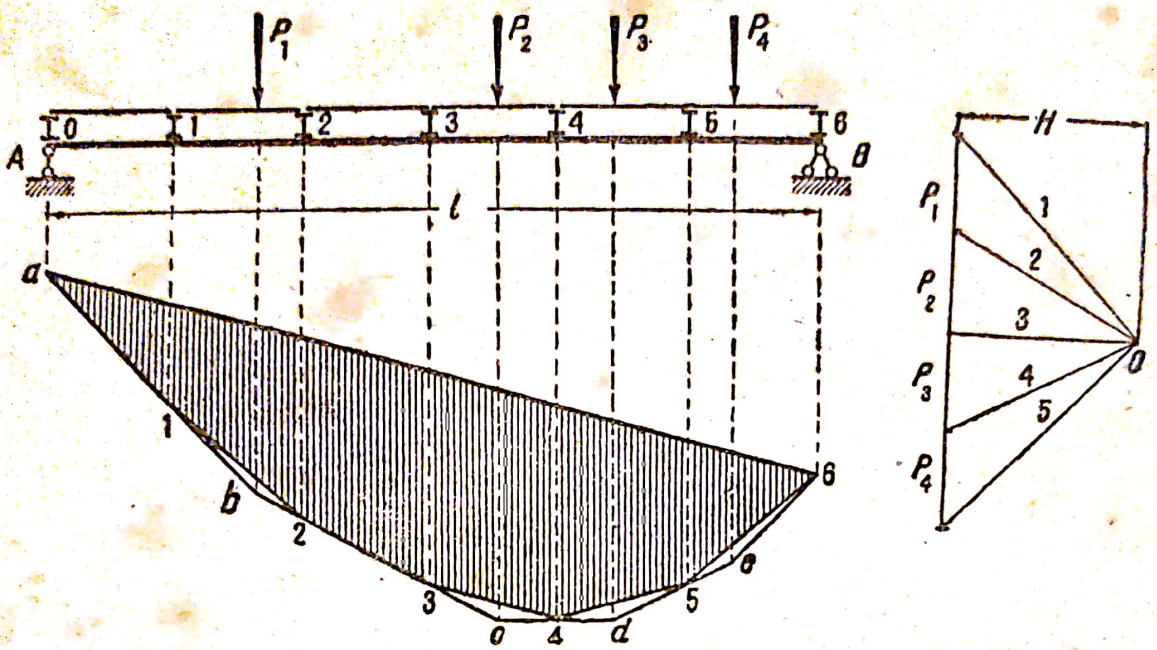


Fig. 46

Din cele de mai sus rezultă că, în cazul acțiunii indirecte a sarcinilor, valoarea cea mai mare a momentului se găsește în dreptul unui nod (antretoază). Acest fapt dă posibilitatea să se reducă, în oarecare măsură, valoarea momentului maxim în raport cu așezarea corespunzătoare a nodurilor (antretoazelor).

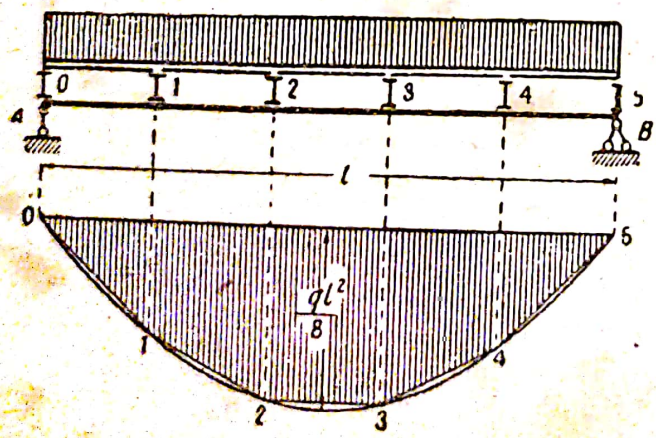


Fig. 47

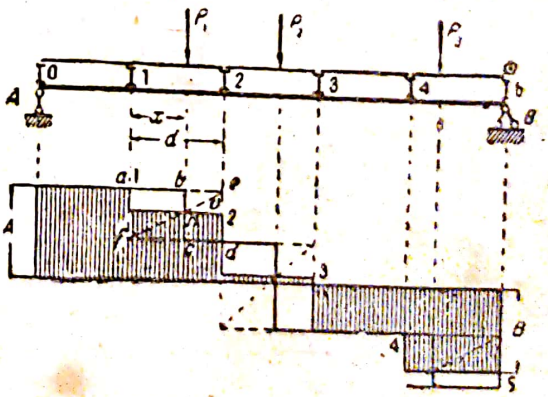


Fig. 48

Curba forțelor tăietoare, în cazul acțiunii indirecte, este formată întotdeauna din o serie de linii drepte în formă de trepte, salturile treptelor fiind în dreptul nodurilor (antretoazelor) (fig. 48 și 49).

Conturul curbei forțelor tăietoare poate fi stabilit atât pe cale analitică, prin determinarea mărimii forțelor concentrate ce se transmit

prin fiecare nod (antretoază), cât şi pe cale grafică, pornind dela curba construită pentru ipoteza că sarcinile acţionează direct asupra grinzii principale.

Construcţia grafică a curbei, în cazul acţiunii unor sarcini concentrate, se bazează pe faptul că aceste sarcini, ce se găsesc pe intervalul dintre noduri (antretoaze) (fig. 50), se transmit la noduri invers proporţional cu distanţa până la acestea, adică:

$$S_1 = P\,\frac{d-x}{d} \text{ şi } S_2 = P\,\frac{x}{d}$$

Dacă pentru această poziţie a sarcinilor, presupuse ca acţionând direct, avem conturul $a\ b\ c\ d$, prelungim liniile orizontale $a\ b$ şi $c\ d$ până la punctele e respectiv f şi trasăm diagonala $e\ f$, vom obţine pe dreapta verticală $b\ c$ a conturului iniţial segmentele $b\ n$ şi $n\ c$, ale căror valori sunt respectiv:

$$b\ n = P\,\frac{x-a}{d} = S_1\ ,$$

$$n\ c = P\,\frac{x}{d} = S_2\ ,$$

De aceea conturul curbei, în cazul acţiunii indirecte a sarcinilor, trebue să treacă prin punctul n şi va fi format din linia frântă $a\ u\ v\ d$ (fig. 50). Acest procedeu de construcţie al curbei forţelor tăietoare este arătat de asemenea în fig. 48.

Din construcţia curbei rezultă că valoarea maximă a forţelor tăie-

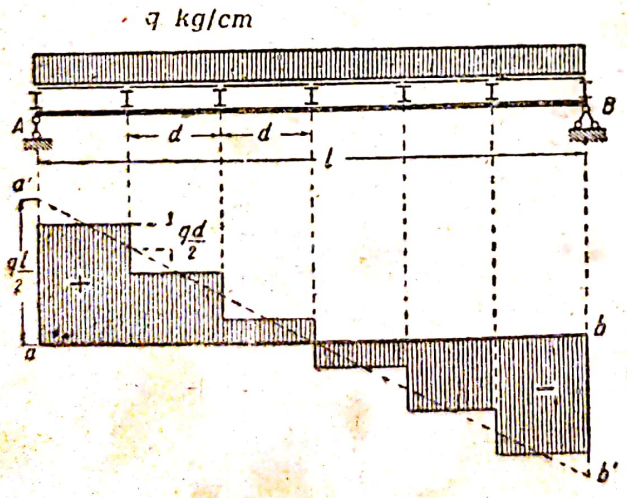


Fig. 49

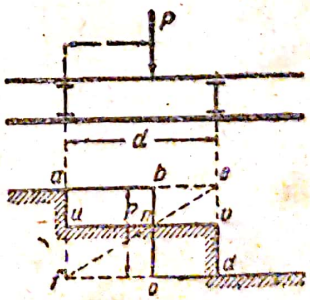


Fig. 50

toare este pe reazim, iar prezenţa nodurilor (antretoazelor) reduce într'o măsură oarecare valorile forţelor tăietoare în comparaţie cu acelea ce se realizează în cazul încărcării directe.

§ 14. Momente şi forţe tăietoare în cazul sarcinilor mobile

Momente încovoietoare

Valoarea momentului încovoietor variază în raport cu poziţia sarcinilor mobile pe grindă, nu numai în lungul grinzii (deschiderii), ci şi în aceeaşi secţiune.

Pentru fiecare secţiune a grinzii, linia de influenţă are o formă triunghiulară (fig. 51) conturată prin două linii, partea din dreapta şi din stânga, determinate de ecuaţiile (§ 6) :

$$M_{dr} = A\ a = \frac{l - x}{l}\ a\ ,$$

$$M_{st} = B\ (l - a) = \frac{x}{l}\ (l - a) \qquad (25)$$

Ordonata maximă a liniei de influenţă se găseşte în dreptul secţiunii şi atunci când $x = a$, este egală cu

$$y_{max} = c\ d = \frac{a\ (l - a)}{l}$$

Din această relaţie rezultă că vârfurile liniilor de influenţă corespunzătoare tuturor secţiunilor grinzii sunt situate pe o parabolă, al cărei vârf coincide cu ordonata liniei de influenţă aferentă secţiunii din mijlocul grinzii :

$$y_o = \frac{l^2}{4\ l} = \frac{l}{4}$$

La grinzile simplu rezemate, liniile de influenţă ale momentelor în toate secţiunile sunt întotdeauna de acelaşi semn, de aceea încărcarea cea mai defavorabilă a acestor linii de influenţă se realizează încărcând întreaga deschidere a grinzii. Valorile momentelor în diferitele secţiuni ale grinzii cresc pe măsură ce ne apropiem de mijlocul ei.

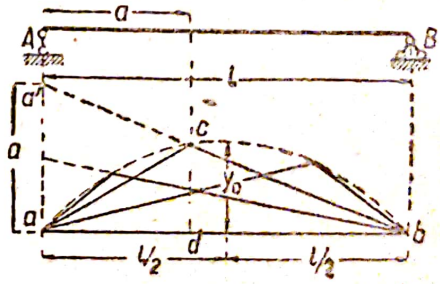


Fig. 51

In cazul sarcinilor indirecte (fig. 52), ecuaţiile principale pentru cele două linii drepte — din dreapta şi din stânga — care alcătuesc linia de influenţă, rămân aceleaşi şi ambele linii se intersectează în dreptul secţiunii considerate. Dacă secţiunea se află între noduri (antretoaze), linia de influenţă are forma unui triunghiu cu vârful tăiat, având suprafaţa mai mică decât în cazul acţiunii directe a sarcinilor. Rezultă deci că : *în cazul acţiunii indirecte a sarcinii, valorile maxime ale momentelor se realizează în dreptul nodurilor (antretoazelor).*

Forţe tăietoare

Atât mărimea cât şi semnul forţelor tăietoare corespunzătoare diferitelor secţiuni ale grinzii variază în raport cu poziţia convoiului de sarcini mobile pe grindă.

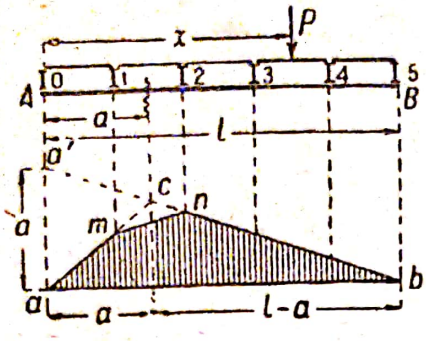


Fig. 52

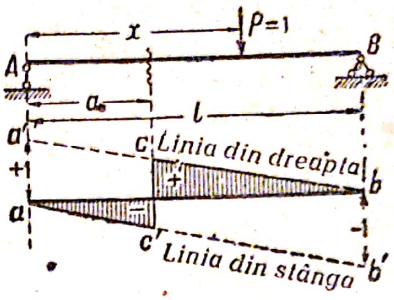


Fig. 53

Limitele poziţiilor critice (cele mai defavorabile) ale încărcării rezultă din forma liniei de influenţă, care — pentru orice secţiune a unei grinzi simplu rezemate — are înfăţişarea arătată în fig. 53, fiind determinată de ecuaţiile a două linii drepte :

pentru partea din dreapta

$$Q = \frac{l - x}{l}$$

pentru partea din stânga (26)

$$Q = -\frac{x}{l}$$

Dacă analizăm variaţia curbei forţelor tăietoare maxime, produse de sarcina mobilă, separat pentru încărcarea părţii din dreapta şi separat pentru cea din stânga, observăm că creşterea ei se va produce după o parabolă (fig. 54).

Astfel pentru încărcarea părţii din dreapta :

$$Q = p\,\frac{(l - x)^2}{2\,l}$$

iar pentru cea din stânga :

$$Q = -\,p\,\frac{x^2}{2\,l}$$

In cazul acţiunii simultane a unei sarcini mobile P şi a sarcinii fixe q, curba forţelor tăietoare totale rezultă din cumularea celor două curbe care sunt independente una de alta. Din fig. 54 se vede că în acest caz grinda va fi împărţită în trei porţiuni : două extreme $a\ b$ şi $c\ d$, unde curba forţelor tăietoare totale este întotdeauna de acelaşi semn (plus ori minus) şi porţiunea din mijloc $b\ c$, unde curba forţelor tăietoare, corespunzând sarcinii mobile, poate fi pozitivă sau negativă, în raport cu poziţia sarcinii.

In cazul sarcinilor care acţionează indirect, ecuaţiile dreptelor principale (26) care formează linia de influenţă pentru forţa tăietoare, rămân

aceleaşi, însă limitele lor de aplicare sunt determinate pentru linia din dreapta de către nodul (antretoaza) din dreapta, cel mai apropiat de secţiune, iar pentru linia din stânga, de către nodul cel mai apropiat din stânga secţiunii (fig. 55).

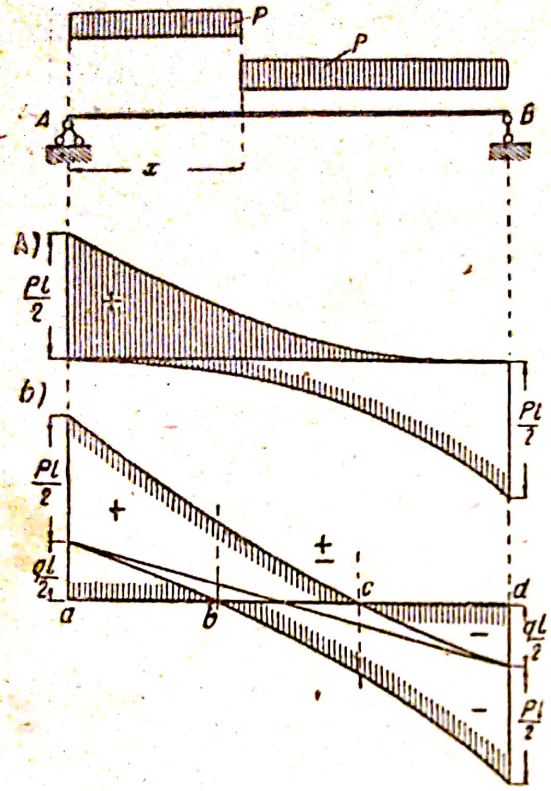


Fig. 54

Pe porţiunea dintre noduri (antretoaze), linia de influenţă, pe baza proprietăţilor sale generale, variază liniar. Poziţia punctului de intersecţie F a liniei de influenţă, în cazul unei sarcini ce acţionează indirect, se poate determina uşor din construcţia grafică a relaţiei :

$$a\,F = \frac{n \cdot d}{m - 1}$$

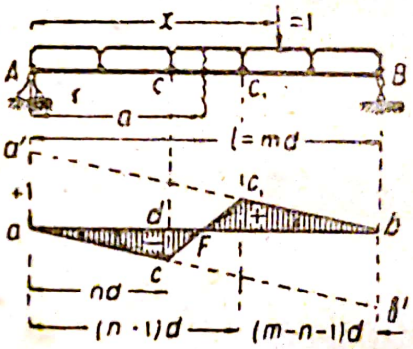


Fig. 55

Dacă secţiunea coincide cu nodul (antretoaza), linia de influenţă va fi aceeaşi ca şi în cazul când sarcina acţionează direct.

Probleme şi exerciţii

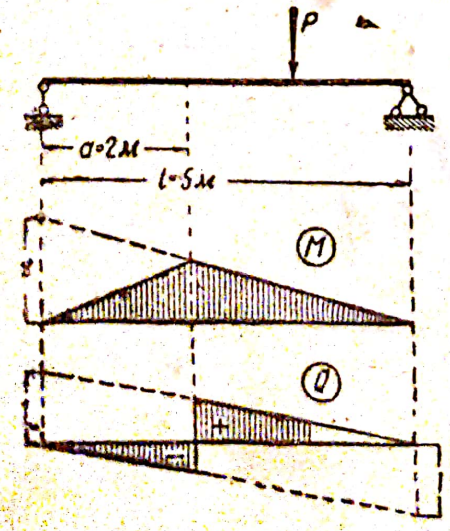


Fig. 56

1. In fig. 56 sunt reprezentate liniile de influenţă în secţiunea unei grinzi la distanţa a dela reazimul din stânga. Să se arate cum variază aceste linii de influenţă, dacă axa grinzii va fi înclinată cu un unghiu oarecare în raport cu orizontala (fig. 57), fără să se modifice distanţa între articulaţiile de reazim.

2. Să se construiască linia de influenţă a efortului axial în grinda înfăţişată în fig. 57, sub acţiunea unei încărcări verticale.

3. Să se arate cum variază valorile momentului şi forţei tăietoare în secţiunea dela mijlocul unei grinzi încărcate cu sarcină uniform repartizată, dacă antretoaza din mijlocul deschiderii (fig. 58 a) va fi înlăturată şi înlocuită cu alte două grinzişoare aşezate la treimea deschiderii (fig. 58 b).

Indicaţie. Determinarea valorii momentului şi a forţei tăietoare trebue să se facă de două ori : analitic şi după linia de influenţă. In ambele cazuri, trebue să se ţină seama de acţiunea indirectă a sarcinilor.

Scanned with OKEN Scanner

4. Să se construiască liniile de influenţă ale reacţiunilor unei grinzi înclicate sub un unghiu oarecare faţă de orizontală (fig. 59), sub acţiunea unei încărnări orizontale.

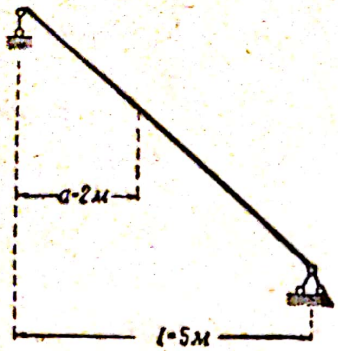


Fig. 57

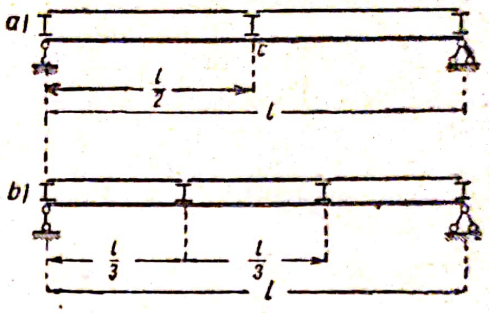


Fig. 58

Indicaţie. Reacţiunea A se descompune în două componente ; ambele au câte o linie de influenţă separată, al căror contur este arătat în fig. 59. Trebue ca prin

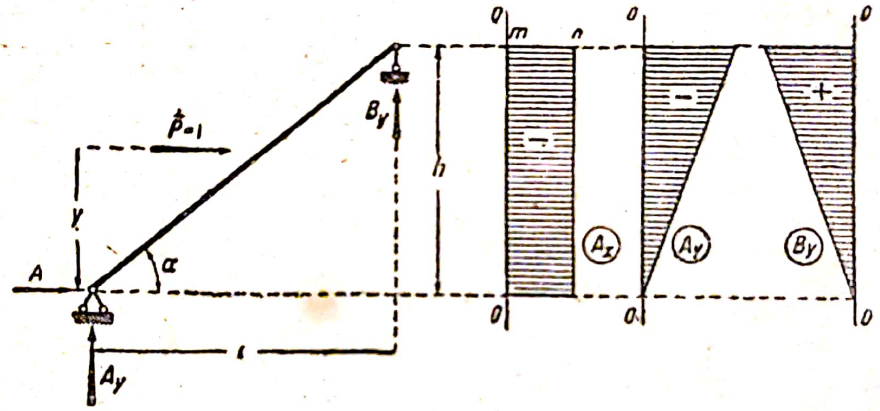


Fig. 59

alcătuirea ecuaţiei să se demonstreze că construcţia acestor linii de influenţă este corectă şi să se arate valorile ordonatelor.

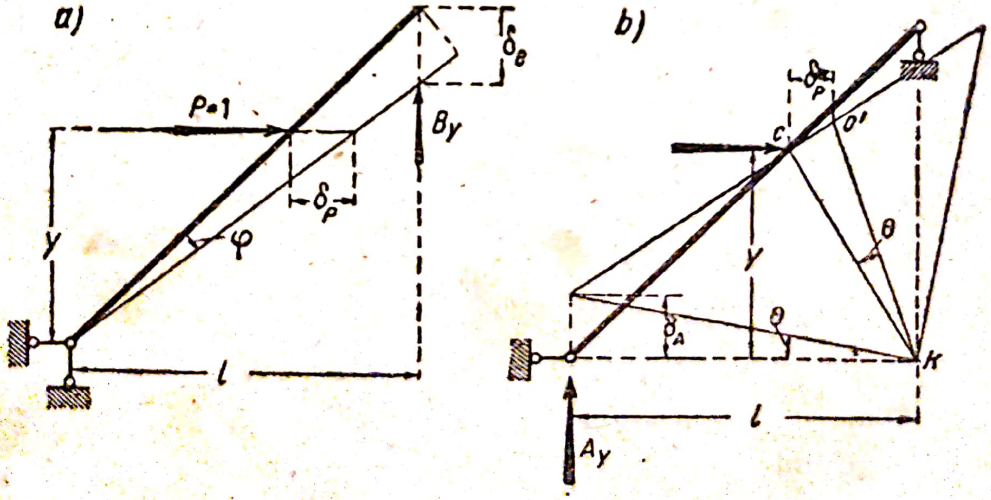


Fig. 60

5. Să se construiască linia de influenţă a momentului şi a forţei tăietoare într'o secţiune a grinzii reprezentate în fig. 59, sub acţiunea unei încărcări orizontale.

Scanned with OKEN Scanner

Indicații. Ecuația liniei de influență a momentului se alcătuește pe baza condiției $\sum M = 0$; linia de influență a forțelor tăietoare se construește egalând cu zero proiecțiile eforturilor pe o axă normală pe axa grinzii și considerând poziția sarcinii mai sus și mai jos de secțiune.

6. Să se arate cum se construesc prin procedee cinematice liniile de influență ale reacțiunilor grinzii din fig. 59.

Indicații. Prin înlăturarea reazimului A_x grinda va avea posibilitate să se deplaseze paralel cu ea însăși. Indepărtând reazimul B_y grinda va putea să se rotească în jurul articulației din reazim cu un unghiu φ (fig. 60 a). Prin îndreptarea reazimului A_y, grinda va avea posibilitatea de rotire în jurul centrului instantaneu de rotație K (fig. 60 b), la care rotire, extremitățile grinzii vor aluneca pe suprafețele reazimelor mobile A_x și B_y; grinda propriu zisă se rotește cu unghiul θ, toate punctele ei deplasându-se în mod corespunzător.

§ 15. Momentul maximum maximorum

Dacă o grindă este acționată indirect, valoarea momentului maxim se va găsi în secțiunile corespunzătoare nodurilor și fără indoială în dreptul unuia dintre nodurile apropiate de mijlocul grinzii. In cazul încărcării directe, grinda nu mai are astfel de puncte caracteristice și calculul se complică prin aceea că este necesar *să se determine cel mai mare moment* — adică momentul maximum maximorum — *dintre momentele maxime ce se pot realiza în diferite secțiuni ale grinzii, corespunzând oricărei poziții a sarcinilor aleasă arbitrar*. In acest caz determinarea momentului maximum maximorum este în funcție de două variabile: poziția secțiunii și poziția variabilă a sarcinilor.

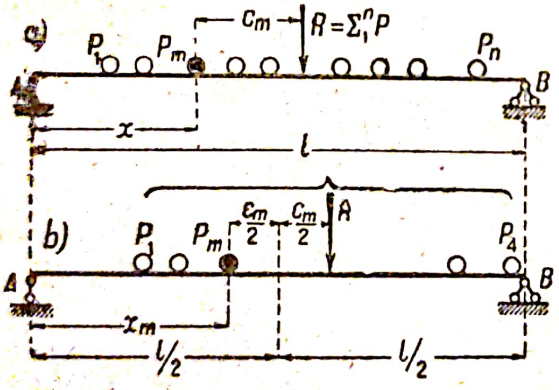


Fig. 61

Dacă am cunoaște poziția secțiunii periculoase, atunci pentru determinarea valorii maxime a momentului în această secțiune, ar fi necesar să mai determinăm care este sarcina critică P_c care, călcând în secțiunea periculoasă, satisface condiția (22); Atât timp însă cât nu cunoaștem poziția secțiunii periculoase, condițiunea exprimată prin formula (22) nu este suficientă.

Determinarea poziției secțiunii de moment maximum maximorum

Momentul maxim într'o secțiune se produce atunci când o sarcină oarecare P_m a unui convoiu dat calcă în acea secțiune. Dacă presupunem că secțiunea este situată la distanța x dela reazimul din stânga grinzii, atunci expresia momentului în această secțiune, când sarcina P_m din convoiu calcă în dreptul secțiunii, se poate exprima în funcție de o singură variabilă x.

Scanned with OKEN Scanner

Notând cu :

R — rezultanta tuturor sarcinilor din convoiu aflate pe grindă

c_m — distanța sarcinii P_m față de această rezultantă

expresia reacțiunii din reazimul A se poate scrie (fig. 61 a) :

$$A = \frac{R}{l}\ (l - c_m - x) \tag{27}$$

iar expresia momentului M_m din secțiune, în cazul când acolo calcă sarcina P_m a convoiului, va fi :

$$M_m = \frac{R}{l}\ (l - c_m - x)\ x - M_1^{(m-)} \tag{28}$$

în care $M_1^{(m-)}$ — este momentul tuturor sarcinilor P, care se află în stânga sarcinii critice, față de sarcina P_m. Valoarea acestui moment este constantă și nu depinde de poziția convoiului pe deschidere.

Valoarea momentului M_m variază în raport cu poziția secțiunii și pentru o anumită secțiune ce se găsește la distanța x_m dela reazimul din stânga, acest moment poate avea valoarea maximă. Poziția acestei secțiuni periculoase se determină din condiția ca derivata expresiei momentului (28) să fie egală cu zero, adică :

$$\frac{d\ M_m}{dx} = \frac{R}{l}\ (l - c_m - 2x_m) = 0$$

ceea ce este posibil numai dacă :

$$l - c_m - 2x_m = 0$$

de unde

$$x_m = \frac{l - c_m}{2} \tag{29}$$

Prin urmare poziția secțiunii în care, sub acțiunea sarcinii P, se produce valoarea maximă a momentului este determinată de condiția ca jumătatea distanței c_m între sarcina critică și rezultanta tuturor forțelor de pe grindă să coincidă cu jumătatea deschiderii (fig. 61).

Secțiunea periculoasă găsită astfel este numai una dintr'un șir de secțiuni cu momente maxime. Numărul acestor secțiuni este egal cu numărul sarcinilor din convoiu. Poziția fiecăreia din aceste secțiuni va rezulta din ecuația momentului (28), care are următoarea formă generală :

$$M_x = \frac{R}{l}\ (l - c - x)\ x - M_1^x \tag{30}$$

Variabilele din această ecuație în raport cu poziția sarcinii sunt :

c — care este distanța sarcinii critice până la rezultanta tuturor sarcinilor și

M_1^x — care este momentul, în raport cu această sarcină, al tuturor sarcinilor ce se găsesc la stânga ei.

Scanned with OKEN Scanner

Poziția secțiunii de moment maxim pentru fiecare sarcină a convoiului se determină din condiția (29)

$$x = \frac{l - c}{2},$$

care pentru sarcinile situate în dreapta rezultantei se transformă în:

$$x = \frac{l + c}{2}$$

Valoarea momentului maxim în secțiunea periculoasă, sub sarcina critică, este dată de următoarea expresie:

$$M_{max} = \frac{R}{l} x^2 - M_1^x = \frac{R}{l} \frac{(l - c)^2}{4} - M_1^x \qquad (31)$$

care se obține din expresia generală a momentului (30), prin substituirea valorii lui x luată din expresia (29).

Expresia momentelor (30) reprezintă ecuația unei parabole raportată la axele x și y, având originea în punctul A situat pe reazimul din stânga. Parametrul acestei parabole rămâne invariabil; de aceea toate parabolele care reprezintă curbele momentelor sub diferite încărcări sunt asemenea între ele, însă au înălțimi diferite și ocupă pe grindă poziții diferite, în raport cu variația valorilor lui c și M_1^x.

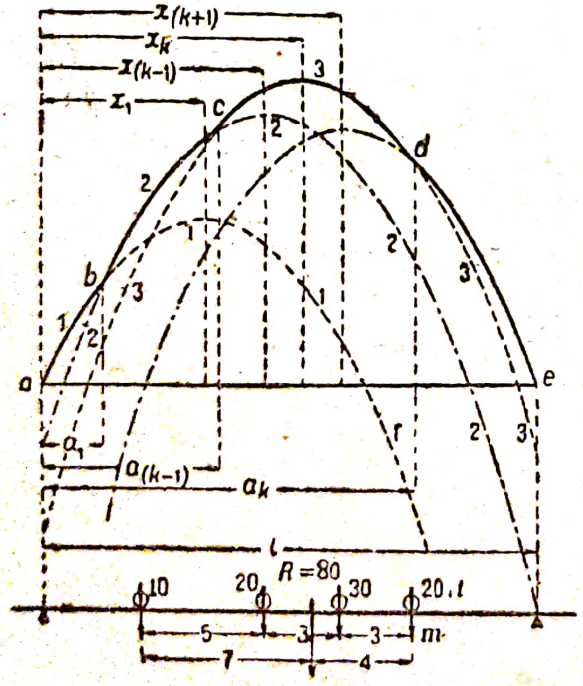


Fig. 62

In fig. 62 sunt reprezentate aceste parabole particulare, pentru un convoiu compus din patru sarcini. Fiecare parabolă caracterizează variația valorii momentului în diferitele secțiuni ale grinzii, sub acțiunea unei anumite sarcini, când convoiul se deplasează în lungul grinzii. Parabolele pot să aibă porțiuni negative, atunci când extremitățile grinzii trec dincolo de reazime, ceea ce permite să presupunem că o parte din sarcini vor acționa dincolo de reazime.

Curba generală a momentelor maxime va fi înfășurătoarea *a b c d e*, compusă din porțiunile cele mai ridicate ale parabolelor. Diferitele sarcini ale convoiului călcând în dreptul aceleiași secțiuni, vor provoca în această secțiune momente de valori diferite: unul din aceste momente va fi însă cel mai mare și va corespunde acelei sarcini a convoiului care este „critică" pentru această secțiune, în sensul că poziția ei este cea mai defavorabilă [condiția (22)].

Condiţiunile de realizare a momentului maximum maximorum. Momentul maximum maximorum se produce în una din secţiunile periculoase, însă totodată aceeaşi sarcină P_{cr}, care determină secţiunea periculoasă, trebue să fie sarcina critică şi sub raportul celei mai defavorabile poziţii a convoiului pe grindă faţă de linia de influenţă a aceleiaşi secţiuni.

Prima condiţie este satisfăcută, dacă ţinem seama de relaţia (29)

$$x = \frac{l - c}{2}$$

A doua condiţie este satisfăcută, dacă se ţine seama de relaţia (22)

$$\sum_1^k P \geqslant R \frac{a_k}{l}$$

A doua condiţie nu trebue considerată în sensul definiţiei $\sum_1^k P$, adică a numărului sarcinilor care trebue să se găsească la stânga secţiunii a_k, ci în sensul stabilirii limitelor porţiunilor unde sarcina P considerată a convoiului este critică pentru poziţia cea mai defavorabilă a convoiului. Limitele acestor poziţii (fig. 62), $a_1, a_2, \ldots\ldots a_k$ depind de valorile $\sum P_k$ şi se poate demonstra uşor că succesiv, valorile lor vor rezulta din condiţiile:

$$a_1 = \frac{l}{R} P_1;$$

$$a_2 = \frac{l}{R} (P_1 + P_2),$$

. . . . . .

$$a_{k-1} = \frac{l}{R} (P_1 + P_2 + \ldots + P_{k-1}),$$

. . . . . .

Valorile segmentelor a, arată că:

în porţiunea dela 0 la a_1 sarcina critică este P_1
„ „ „ a_1 la a_2 „ „ „ P_2
. . . . . .
„ „ „ a_{k-1} la a_k „ „ „ P_k

Astfel, pentru ca secţiunea periculoasă cu abscisa x_k să determine punctul momentului maximum maximorum, este necesar şi suficient ca acest punct să se găsească în porţiunea corespunzătoare sarcinii sale critice P_k, adică să fie satisfăcută condiţia:

$$a_{k-1} < x_k < a_k \qquad (32)$$

Condiţia dedusă pentru momentul maximum maximorum se referă

la toate sarcinile convoiului, rămânând astfel neclarificat care din sarcinile convoiului poate să satisfacă această condiție.

In general, secțiunile cu momentul maximum maximorum se caută printr'un șir de aproximații, la care nu se iau în considerare unele sarcini. La aceste determinări aproximative trebue să avem în vedere că indiferent de compunerea convoiului, secțiunea periculoasă se găsește întotdeauna în regiunea dela mijlocul deschiderii. De aceea ipoteza cea mai verosimilă este aceea, că sarcina corespunzătoare momentului maximum maximorum va fi chiar sarcina critică a secțiunii dela mijlocul grinzii. Afară de rare excepții, această ipoteză este întotdeauna justificată.

Ca încheiere, trebue să relevăm că, dacă la așezarea convoiului de sarcini în poziția cea mai defavorabilă, unele sarcini vor ieși din limitele deschiderii grinzii sau altele noi vor intra în aceste limite, atunci toate calculele trebuesc refăcute cu noua compunere a convoiului. De asemenea trebue să avem în vedere că la așezarea convoiului în poziția cea mai defavorabilă, una din sarcinile extreme se găsește foarte aproape de capătul grinzii și atunci valoarea momentului maximum maximorum poate să crească, dacă nu intervine această sarcină din convoiu, adică dacă deplasăm convoiul astfel încât acea sarcină să treacă afară din deschiderea grinzii. Același lucru poate să se petreacă și în cazul când intră pe grindă o sarcină care a fost în afara deschiderii, dar se află la o distanță apropiată de extremitatea grinzii.

Exemplu. Să determinăm momentul maximum maximorum într'o grindă cu deschiderea $l = 65$ m, sub acțiunea unui convoiu compus din patru vagoane de tramvai, după schema din fig. 63.

Rezultanta întregului convoiu este :

$$R = 4\,(2 \cdot 6{,}5 + 2 \cdot 3{,}25) = 4 \cdot 19{,}5 = 78 \text{ t}$$

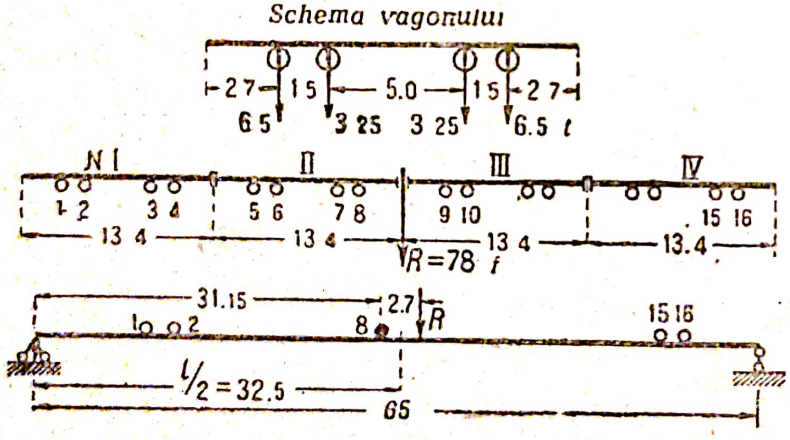


Fig. 63

și se găsește la mijloc între vagonul al doilea și al treilea la distanța $2 \cdot 13{,}4 = 26{,}8$ m dela capătul convoiului.

Dacă presupunem că secțiunea periculoasă se găsește la mijlocul deschiderii, suma sarcinilor aflate la stânga secțiunii trebue să fie :

$$P_{st} = \frac{1}{2} R = 39 \text{ t};$$

această rezultantă se poate forma din osiile 1—8 inclusiv :

$$\sum_{1}^{8} P = 39 \text{ t}$$

Bazându-ne pe aceasta, să considerăm că sarcina critică posibilă este sarcina P_8. Distanța acestei sarcini P_8 dela rezultantă este $c = 2{,}7$ m și de aceea poziția acțiunii periculoase este :

$$x = \frac{1}{2}\,(65 - 2{,}7) = 31{,}15 \text{ m}$$

Scanned with OKEN Scanner

Poziția pentru sarcina critică P_7

$$a_7 = \frac{65}{78} \sum_1^7 P - \frac{65}{78} \cdot 32{,}5 = 26{,}6 \text{ m};$$

Poziția pentru sarcina critică P_8

$$a_8 - \frac{65}{78} \sum_1^8 P = \frac{65}{78} \cdot 30 = 32{,}5 \text{ m};$$

Prin urmare, condiția (32) de probabilitate a momentului maximum maximorum este satisfăcută :

$$26{,}6 < 31{,}15 < 32{,}6$$

Valoarea momentului în această secțiune va fi :

$$M = 78 \frac{65 - 31{,}15 - 2{,}7}{65} \cdot 31{,}15 -$$

$$- 19{,}5 \left[\frac{1}{2} 13{,}4 + (13{,}4 - 2{,}7) \right] - 19{,}5 \left(\frac{1}{2} \cdot 5 + 1{,}5 \right) = 11242 \text{ tm}$$

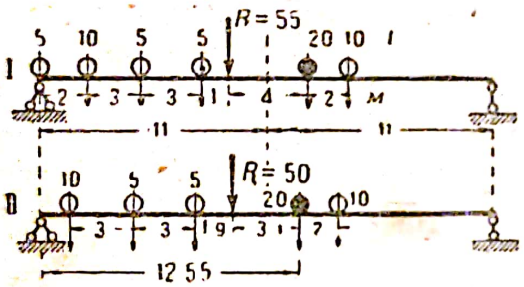


Fig. 64

Exemplu. Să se găsească momentul maximum maximorum într'o grindă cu deschiderea $l = 22$ m, produs de convoiul reprezentat în fig. 64.

Rezultanta convoiului este :

$$R = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 20 = 55 \text{ t}$$

Poziția rezultantei în raport cu sarcina a patra este :

$$r = \frac{5 \cdot 8 + 10 \cdot 6 + 5 \cdot 3 - 20 \cdot 5 - 10 \cdot 7}{55} = -1 \text{ m}$$

In cazul când secțiunea periculoasă coincide cu mijlocul deschiderii, rezultanta critică a sarcinilor este :

$$R_k = \frac{1}{2} R = \frac{1}{2} 55 = 27{,}5 \text{ t}$$

Această valoare a rezultantei critice se obține prin sarcina a cincea, în raport cu care :

$$\sum_1^5 = 45 \text{ t} > 27{,}5 \text{ t}$$

Distanța acestei sarcini dela rezultantă este $c = 4$ m

Poziția secțiunii periculoase este :

$$x = \frac{1}{2} (22 + 4) = 13 \text{ m}$$

Poziția sarcinii critice P_4 este :

$$a_4 = \frac{22}{55} \cdot 25 = 10 \text{ m}$$

iar aceea a sarcinii critice P_5 :

$$a_5 = \frac{32}{55} \cdot 45 = 18 \text{ m}$$

Astfel condiția (32) de posibilitate a momentului maximum maximorum este satisfăcută, întru cât :

$$10 < 13 < 18$$

Valoarea momentului în această secțiune, utilizând expresia (31), este :

$$M = \frac{55}{22} \frac{(22 + 4)^2}{4} - 5 \cdot 13 - 10 \cdot 11 - 5 \cdot 3 - 5 \cdot 5 = 182{,}5 \text{ tm}$$

Având în vedere ca prima sarcină ușoară s'a apropiat de reazimul din stânga, facem verificarea în ipoteza că această sarcină ar fi ieșit de pe grindă. In acest caz, rezultanta convoiului este $R = 50$ t, iar poziția rezultantei în raport cu sarcina a patra este :

$$r = \frac{1}{50} (10 \cdot 3 + 5 \cdot 3 - 20 \cdot 5 - 10 \cdot 7) = -1{,}9 \text{ m}$$

Rezultanta critică, în raport cu mijlocul deschiderii, este egală cu $\frac{1}{2} R = 25$ t și este acoperită de suma $\sum_1^5 P = 40 \text{ t} > 25 \text{ t}$.

Poziția sarcinii P_5 în raport cu rezultanta este $c = 3{,}1$ m.
Poziția secțiunii periculoase :

$$x = \frac{1}{2} (22 + 3{,}1) = 22{,}55 \text{ m}$$

Poziția sarcinii critice P_4 este :

$$a_4 = \frac{22}{50} (10 + 2{,}5) = 8{,}8 \text{ m}$$

Poziția sarcinii critice P_5 :

$$a_5 = \frac{22}{50} (20 + 20) = 17{,}6 \text{ m}$$

Astfel, condițiile pentru momentul maximum maximorum sunt satisfăcute, întru cât

$$8{,}8 < 12{,}55 < 17{,}6$$

Valoarea momentului în secțiunea periculoasă este :

$$M = \frac{50}{22} \left(\frac{22 + 3{,}1}{2}\right)^2 - 10 \cdot 11 - 5 \cdot 8 - 5 \cdot 5 = 182{,}8 \text{ tm}$$

In comparație cu prima ipoteză de încărcare, rezultatul este mai defavorabil, ceea ce este consecința ieșirii de pe deschiderea primei sarcini a convoiului.

CAPITOLUL 4

GRINZI CU CONSOLE SIMPLU REZEMATE

§ 16. Generalități

Grinzi cu console simplu rezemate se numesc acele grinzi care se reazimă în două puncte, având extremitățile prelungite dincolo de reazime (fig. 65). Grinzile cu console au două reazime, deci condițiile lor de determinare statică în raport cu reazimele sunt aceleași ca și ale grinzilor simplu rezemate.

Din simpla analiză a deformației unei astfel de grinzi, sub acțiu-

nea sarcinilor, se constată (fig. 65) că sarcinile situate în intervalul dintre reazime vor încovoia numai această parte, fără ca să deformeze și consolele. Acestea rămânând drepte, se vor ridica în sus după direcția tangentelor la axa deformată a porțiunii ce se află între reazime.

Este evident că în acest caz, nu va apare în console nicio solicitare.

In cazul când consolele vor fi încărcate (fig. 65), se va deforma nu numai axa lor, ci și întreaga porțiune cuprinsă între reazime. Prin urmare, încărcarea consolelor provoacă eforturi și în partea cuprinsă între reazime.

Incărcarea consolelor influențează asupra părții cuprinse între reazime în același fel ca și momentele M_a și M_b aplicate direct pe reazimele grinzii; valorile acestor momente se determină prin transpunerea rezultantelor încărcărilor R_a și R_b de pe console în punctele de reazim ale grinzii:

$$M_a = R_a r$$

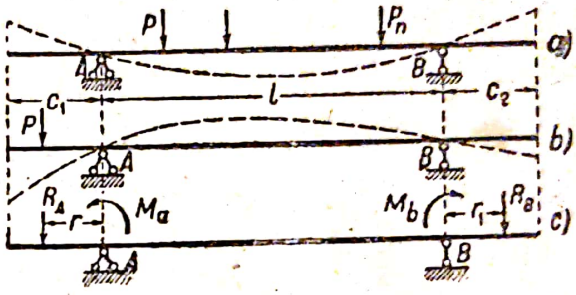


Fig. 65

(fig. 65), în care r este brațul de pârghie al rezultantei în raport cu punctul de reazim respectiv.

Incărcarea consolelor, care acționează de sus în jos, încovoaie în sus porțiunea dintre reazimele grinzii, ceea ce este analog cu acțiunea momentelor negative M_a și M_b.

Astfel, o grindă simplu rezemată cu console poate fi considerată ca o grindă simplu rezemată, încărcată cu momente negative în dreptul reazimelor.

Deformarea și modul cum lucrează consolele sunt asemănătoare cu acelea ale grinzilor încastrate la o extremitate și libere la cealaltă.

§ 17. Reacțiunea de pe reazime și linia ei de influență

Valoarea reacțiunii unei grinzi cu console, indiferent de felul încărcării (fig. 65 c), este determinată prin expresia:

$$A = R_a + A_o + \frac{M_a - M_b}{l} \qquad (33)$$

în care A — este reacțiunea reazimului din stânga;

R_a — rezultanta sarcinilor de pe consola din stânga reazimului;

A_o — reacțiunea de pe reazim a grinzii simplu rezemate, dată de încărcarea părții dintre reazime.

$\frac{1}{l}(M_a - M_b)$ reacțiunea dată de momentele de pe reazime, având sensul arătat în fig. 65.

Valoarea reacțiunii reazimului din dreapta se exprimă printr'o formulă simetrică :

$$B = R_b + B_o + \frac{1}{l} (M_b - M_a)$$

Linia de influență. Când o sarcină unitară se află în limitele porțiunii dintre reazime, la distanța x de reazimul din stânga A, valoarea reacțiunii pe reazimul din stânga este dată de ecuația :

$$A = A_o = \frac{1 (l - x)}{l} \qquad (34)$$

Prin urmare, în limitele porțiunii dintre reazime, linia de influență este o dreaptă, având în dreptul reazimului A, ca și în cazul grinzii simplu rezemate, ordonata egală cu 1 (unu), iar în dreptul reazimului B — ordonata egală cu zero.

Când sarcina unitară trece pe consola din stânga (fig. 66), ordonatele reacțiunii de pe reazim se determină din expresia :

$$A = \frac{l + x}{l}$$

Aceasta este ecuația aceleiași drepte care a fost obținută pentru porțiunea dintre reazime.

Când sarcina unitară trece pe consola din dreapta, valoarea reacțiunii A este dată de aceeași ecuație (34).

Astfel linia de influență a reacțiunii unei grinzi cu console este alcătuită de aceeași dreaptă ca și reacțiunea unei grinzi simplu rezemate, prelungită însă dincolo de punctele de reazim, până la extremitatea consolelor (fig. 66). Pe lungimea consolei adiacente reazimului și pe porțiunea dintre reazime, linia de influență este pozitivă, iar pe lungimea consolei adiacente celuilalt reazim, linia de influență este negativă.

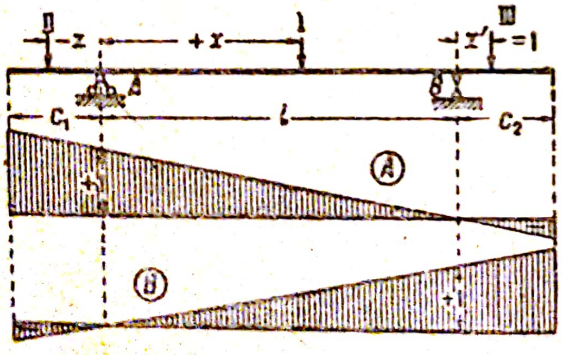


Fig. 66

Pe măsură ce lungimea consolelor crește, ordonatele liniei de influență a părții negative se măresc ; uneori pot avea loc cazuri, la o lungime prea mare a consolelor și pentru o sarcină temporară mare, ca valoarea negativă a reacțiunii produsă de această sarcină să depășească valoarea reacțiunii din sarcina permanentă, ceea ce poate provoca ridicarea grinzii de pe reazim.

Aceasta trebue să se aibă în vedere la alcătuirea aparatelor de reazim.

Linia de influență a reacțiunii reazimului din dreapta B va fi simetrică cu linia de influență a reazimului din stânga (fig. 66).

Scanned with OKEN Scanner

§ 18. Momentele şi forţele tăietoare în secţiunile consolei şi liniile lor de influenţă

Momente şi forţe tăietoare în secţiunile din lungul consolei pot să apară numai când sarcina activă este plasată între secţiunea considerată şi extremitatea consolei.

Dacă sarcina este fixă, valoarea momentelor şi forţelor tăietoare se determină din expresia (fig. 67):

$$M = -\sum_{0}^{x} P\,(x-a) - q\frac{(x-c)^2}{2}\,; \qquad Q = -\sum_{0}^{x} P - q\,(x-c) \tag{35}$$

Primul termen al părţii din dreapta a fiecăreia dintre cele două expresii caracterizează influenţa sarcinilor concentrate, iar al doilea, influenţa sarcinilor uniform distribuite. Valoarea momentului şi a forţelor tăietoare în secţiunile consolei cresc pe măsură ce secţiunea se îndepărtează de extremitatea consolei.

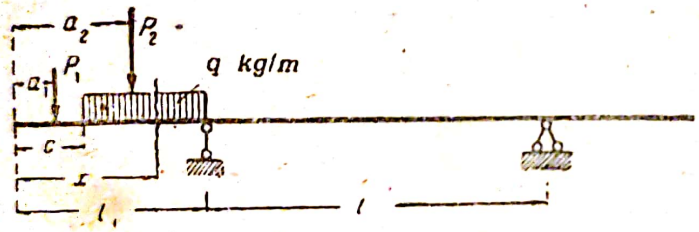


Fig. 67

Liniile de influenţă ale momentelor şi forţelor tăietoare în secţiunile consolelor se extind de asemenea numai pe porţiunea consolei situată între secţiunea considerată şi extremitatea ei.

Dacă forţa unitară nu se găseşte în partea secţionată a consolei (în fig. 67 la dreapta secţiunii), atunci pe baza condiţiunilor de echilibru ale părţii tăiate, momentul şi forţa tăietoare din secţiune trebue să fie egale cu zero. Prin urmare la consola din stânga, linia dreaptă care formează linia de influenţă se confundă cu axa absciselor. Dacă sarcina unitară se găseşte pe porţiunea tăiată a consolei (fig. 67), atunci pe baza condiţiunilor de echilibru ale acestei porţiuni, în secţiune trebue să acţioneze:

$$M = -1\,(a-x)\,; \qquad Q = -1 \tag{36}$$

Aceste linii de influenţă sunt reprezentate în fig. 68.

§ 19. Momentele şi forţele tăietoare în secţiunile porţiunii dintre reazime şi liniile lor de influenţă

După cum s'a arătat mai sus în § 16, intervalul dintre reazimele grinzilor cu console poate fi considerat ca o grindă simplu rezemată, solicitată de sarcina aşezată pe ea şi de momentele de pe reazime produse prin încărcarea consolelor. Valorile momentelor şi ale forţelor

tăietoare în acest interval al grinzii cu console, rezultă din următoarele expresii (fig. 68):

$$M = M^0 - M_a \frac{l - x}{l} - M_b \frac{x}{l}$$

$$Q = Q^0 + \frac{1}{l}(M_a - M_b) \qquad (37)$$

In aceste expresii M^0 și Q^0 reprezintă momentele încovoietoare și forțele tăietoare în diferite secțiuni, momentele și forțele tăietoare fiind date de încărcarea situată între reazime, iar M_a și M_b sunt momentele negative de pe reazime, produse de încărcarea consolelor.

Pe baza acestor ecuații se construesc curbele momentelor pentru diferitele cazuri de încărcare ale grinzilor. Procedeele de construire a curbelor, pentru grinzile simple cu console, sunt cunoscute din cursul de „Rezistența materialelor", de aceea nu le vom mai repeta.

Grinzile de transmisie (antretoazele) reduc orice fel de încărcare la forțele concentrate în anumite puncte. In cazul când grinzile de transmisie sunt așezate la extremitatea consolelor și pe reazime (fig. 69), curba momentelor corespunzătoare acestor grinzi reprezintă un poligon înscris în curba momentelor produse de aceleași sarcini, ce acționează direct. In fig. 70 sunt construite curbele momentelor și forțelor tăietoare produse de sarcini uniform distribuite, în cazul transmiterii indirecte a sarcinilor (prin antretoaze). Prin linii punctate sunt indicate curbele construite în ipoteza acțiunii directe a sarcinilor, iar cu linii pline — curbele în ipoteza acțiunii indirecte.

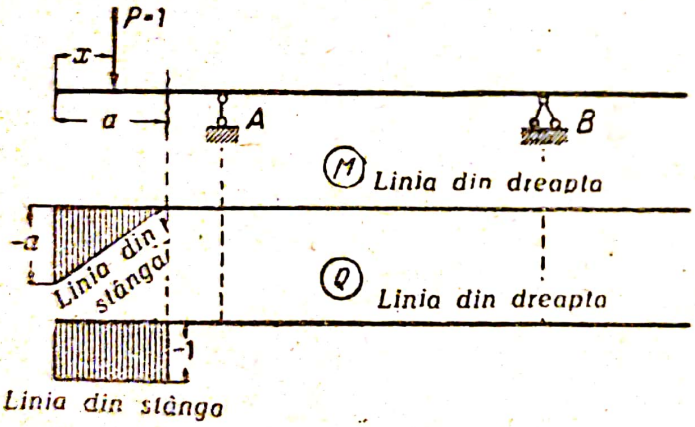


Fig. 68

Procedeul de construcție al curbelor este același ca și la grinzile simplu rezemate (§ 14). Din figură se vede că deoarece pe console există grinzi de transmisie, se măresc oarecum valorile momentelor în secțiunile consolelor cuprinse între grinzile de transmisie.

Linia de influență a momentului în porțiunea dintre reazime

Când sarcina unitară calcă pe deschidere, între reazime, ecuația care determină linia de influență a momentului în secțiunea dela distanța a la reazimul din stânga (fig. 71) va fi:

Scanned with OKEN Scanner

a) când sarcina calcă la dreapta secțiunii :

$$M = Aa = \frac{l - x}{l} a ;$$

b) când sarcina calcă în stânga secțiunii :

$$M = B\,(l - a) = \frac{x}{l}\,(l - a)$$

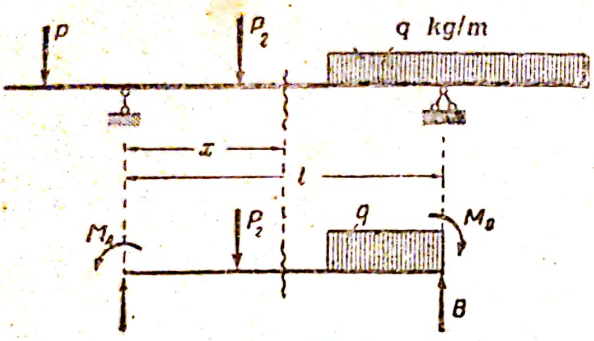


Fig. 69

Ambele ecuații reprezintă linii drepte : cea din partea din dreapta, cu ordonata *a* pe reazimul din stânga și zero pe reazimul din dreapta ; cea din partea din stânga, cu ordonata *(l — a)* pe reazimul din dreapta și cu zero pe reazimul din stânga. Ambele drepte se intersectează pe verticala secțiunii luate în considerare.

Când sarcina unitară trece pe console, ambele ecuații rămân neschimbate, cu ordonatele proporționale cu reacțiunile *A* și *B*. De aceea, în conformitate cu principiul trasării liniilor de influență pentru reazimele *A* și *B* (fig. 66), dreptele liniei de influență care reprezintă momentele pe deschidere trebue să fie prelungite până la

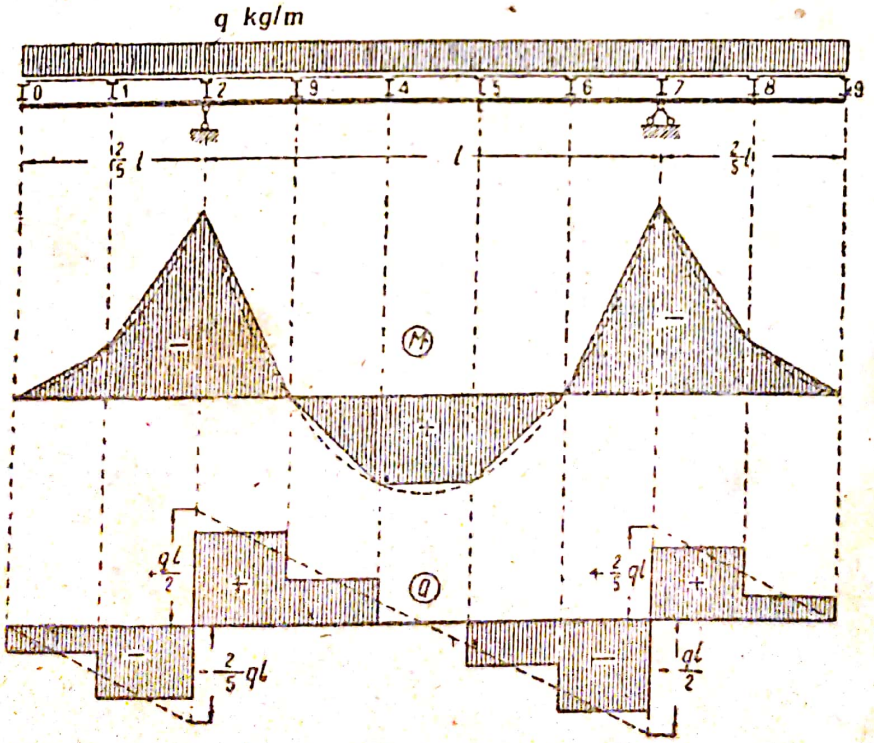


Fig. 70

extremitatea consolelor. Din fig. 71 se vede că linia de influență a momentelor este pozitivă pentru secțiuni situate pe deschidere și negativă

pentru secțiunile de pe console. De aci rezultă că cea mai mare valoare a momentului pentru secțiunile de pe deschidere se va produce în ipoteza că atât deschiderea cât și consolele se încarcă separat.

Linia de influență a forțelor tăietoare pe deschidere

După proprietățile generale ale liniilor de influență (fig. 71), linia de influență a forțelor tăietoare pe deschidere este formată din două linii drepte.

Când sarcina unitară se află la dreapta secțiunii, valoarea forței tăietoare în secțiune se determină prin ecuația (34) :

$$Q = A = \frac{1\,(l - x)}{l}$$

care este ecuația reacțiunii din reazimul A și este reprezentată prin dreapta $c'b$ (fig. 71).

Când sarcina unitară se găsește la stânga secțiunii, valoarea forței tăietoare se determină din ecuația (26) :

$$Q = A - 1 = -B = -\frac{x}{l}$$

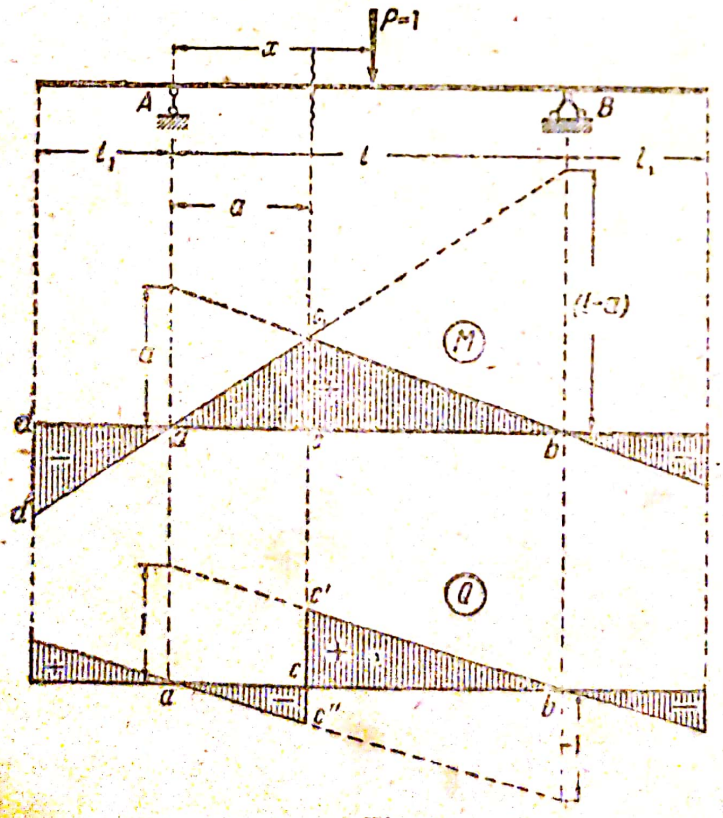


Fig. 71

adică din ecuația reacțiunii din reazimul B, însă cu semnul schimbat. Acestei ecuații îi corespunde dreapta $c''a$.

In acest fel liniile de influență ale forțelor tăietoare pentru o grindă cu console și secțiunile situate pe deschidere între reazime, este determinată de două linii drepte, partea din dreapta și cea din stânga, ale căror limite de valabilitate le formează poziția secțiunii și extremitățile consolelor.

Scanned with OKEN Scanner

§ 20. Grinzi complexe cu console (grinzi Gerber) și condițiile lor de determinare statică

Sub denumirea de grinzi complexe cu console *(grinzi Gerber)* se înțelege un sistem (fig. 72) alcătuit din grinzi simplu rezemate cu console AB, $A'B'$, . . . , la care capetele consolelor sunt legate între ele sau de reazimele extreme, cu ajutorul unor grinzi intermediare CD, respectiv $C'D'$, . . . Aspectul lor general este acela al unei grinzi continue în care, cu ajutorul articulațiilor, s'au introdus grinzi intermediare.

Dacă grinzile Gerber nu ar avea articulații intermediare, ele fiind grinzi cu mai mult de trei reazime, aceste grinzi în raport cu reacțiunile ar fi static nedeterminate. Pentru reducerea la un sistem static determinat, trebue să introducem în sistem dispozitive constructive speciale, care permit să se stabilească noi ecuații de echilibru pentru determinarea necunoscutelor suplimentare ale elementelor de pe reazime. Acesta dispozitive constructive sunt articulațiile intermediare, în raport cu care *momentele tuturor forțelor exterioare trebue să fie egale cu zero.* Această condiție este echivalentă cu condiția ca rezultanta forțelor exterioare, ce se găsesc la dreapta sau la stânga articulației, să treacă prin articulație. Dacă această condiție nu va fi îndeplinită, atunci rezultanta acestor forțe, trecând în afară de articulație, va tinde să rotească o parte a grinzii față de cealaltă, în jurul articulației intermediare, adică grinda nu se va găsi în stare de echilibru. In acest fel, numărul articulațiilor intermediare este strict legat de numărul necunoscutelor din reazime.

Dacă un sistem de grinzi Gerber are n reazime, dintre care $n - 1$ pot fi articulate mobil, iar pentru păstrarea indeformabilității, un reazim este cu articulație fixă, atunci numărul necunoscutelor din reazime va fi :

$$(n - 1)\cdot 1 + (1\cdot 2) = n + 1$$

Trei dintre aceste necunoscute pot fi determinate din condițiile de echilibru static, de aceea numărul de ecuații care lipsesc pentru ca sistemul să fie static determinat, este :

$$K = n + 1 - 3 = n - 2 \qquad (33)$$

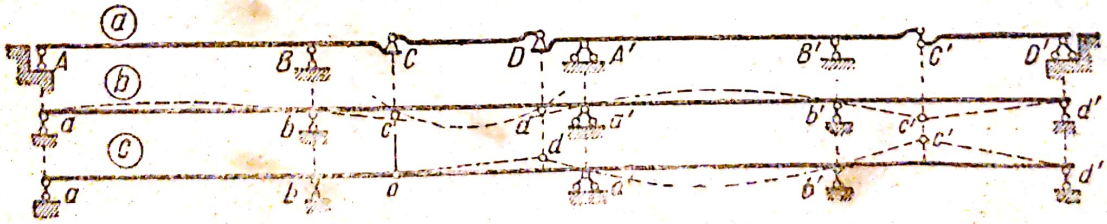


Fig. 72

Deoarece fiecare articulație fixă asigură o ecuație de echilibru suplimentară, atunci *într'un sistem de grinzi Gerber, numărul articulațiilor intermediare K trebue să fie egal cu numărul reazimelor, mai puțin 2.*

Această condiție este necesară și suficientă, în cazul când, după

cum s'a arătat, toate reazimele, în afară de unul singur, sunt mobile. Dacă printre reazime câteva vor fi fixe, atunci prin aceasta numărul necunoscutelor se va mări. Introducerea de noi condiții necunoscute în reazime va face necesară introducerea în sistem a unor noi condițiuni, ce vor permite ca sistemul să fie static determinat în raport cu reacțiunile. Aceasta se poate obține prin introducerea în construcție a unor articulații mobile într'un anumit sens. La un astfel de dispozitiv, rezultanta care trece prin articulația intermediară trebue să aibă direcția perpendiculară pe planul de mișcare al articulației, ceea ce va crea o a doua condiție pentru alcătuirea ecuațiilor de echilibru. Schematic o astfel de articulație este arătată în fig. 72 în punctul C'.

Distribuirea articulațiilor intermediare într'o grindă Gerber trebue să fie așa fel, încât să fie respectate condițiile principale ale alcătuirii sistemelor indeformabile (§ 4) și anume, legarea fiecărui element rigid să fie făcută cel puțin cu o articulație fixă și o bară reprezentând o articulație mobilă sau cu trei bare care nu se intersectează într'un punct comun.

Să luăm, de exemplu, o grindă pe șase reazime, care trebue să fie redusă la forma unei grinzi cu console static determinată (fig. 73). În raport cu numărul reazimelor, numărul articulațiilor suplimentare necesare va fi:

$$K = 6 - 2 = 4$$

Aceste articulații pot fi distribuite după una din schemele următoare:

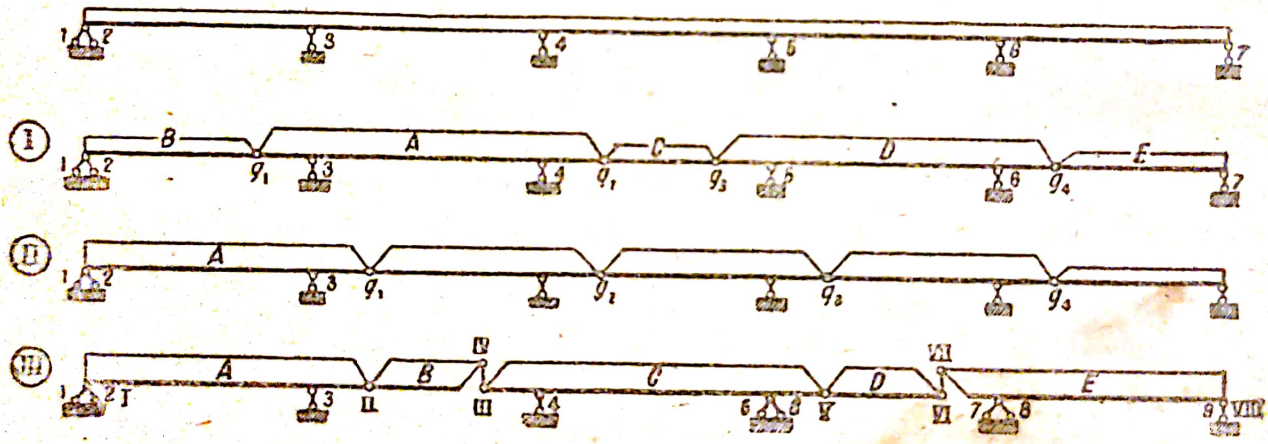


Fig. 73

In schema I, elementul rigid A este legat în mod indeformabil de pământ cu trei bare 3, 4 și cu elementul rigid B; apoi elementul rigid D este legat invariabil de pământ prin două bare 5 și 6 și prin elementul rigid C de sistemul A B; în sfârșit elementul rigid E este legat indeformabil prin articulația g_4 și bara 7.

In schema II, elementul rigid A este legat indeformabil de pământ cu barele 1, 2 și 3, iar toate elementele rigide care urmează sunt legate cu câte o articulație de sistemul precedent și cu o bară de pământ.

In schema III, fiecare din elementele rigide A, C și E este legat de pământ cu trei bare, ca și o grindă simplu rezemată; fiecare din

Scanned with OKEN Scanner

elementele rigide B și D sunt legate de primele elemente rigide cu o bară și o articulație.

In afară de soluțiile arătate mai sus pot să existe și altele. Totuși, dacă o grindă continuă este descompusă într'o serie de grinzi cu console prin introducerea de articulații intermediare, trebue să se aibă în vedere că soluția ce se va adopta este influențată de faptul că numărul articulațiilor intermediare nu trebue să fie mai mare de două într'o singură deschidere; în cazul când există trei articulații pe o singură deschidere, sistemul va deveni deformabil. Numărul de articulații mobile este determinat după numărul reazimelor fixe; cel mai recomandabil este ca așezarea lor să se facă în apropierea reazimelor fixe.

Grinzile intermediare dintre console, $C\ D$, $C'\ D'$ . . . (fig. 72 a) articulate la extremități, sunt în fond grinzi simplu rezemate, cu toate că ele reazimă direct pe console sau sunt suspendate de ele. Aceste grinzi lucrează și se deformează numai sub acțiunea sarcinilor ce se repartizează direct asupra lor. Deoarece ele sunt grinzi simplu rezemate și calculul lor se face în mod analog ca și în cazul unor grinzi obișnuite simplu rezemate. Reacțiunile lor în capetele consolelor, provoacă deformația consolelor adiacente și în consecință și deformația celor mai apropiate porțiuni cuprinse între reazime (fig. 72 b).

Când numai grinzile cu console sunt încărcate, grinzile intermediare cu toate că primesc o deplasare a extremităților (fig. 72 c), își păstrează, datorită articulațiilor, forma lor inițială și nu suportă niciun fel de deformații, prin urmare nici solicitări.

§ 21. Calculul grinzilor Gerber cu console încărcate cu sarcini permanente

După compunerea lor, grinzile Gerber sunt o combinație între grinzi simple cu console și grinzi intermediare simplu rezemate pe grinzile cu console. Întru cât grinzile intermediare transmit sarcinile la grinzile cu console, calculul trebue început cu grinzile intermediare, trecând apoi la console și în sfârșit la deschiderile dintre reazime ale grinzilor cu console.

Calculul grinzilor intermediare se face după formulele grinzilor simplu rezemate (§ 13). Calculul consolelor se face după formulele din § 18 ținând seama de sarcinile care acționează direct pe console cât și de sarcinile transmise de grinzile intermediare.

Calculul pentru deschiderile dintre reazime la grinzile cu console, se face cu ajutorul formulelor arătate în § 19.

Pentru a indica ordinea de calcul a unei grinzi Gerber, se arată mai jos — ca exemplu — construcția curbei momentelor și a forțelor tăietoare, pentru schema de încărcare arătată în fig. 74.

Exemplu. Se cere să se construiască curba momentelor și a forțelor tăietoare pentru o grindă Gerber (fig. 74) având grinda intermediară și consola $B\ C$ încărcate cu o sarcină continuă, uniform distribuită q kg/m.

Reacțiunile grinzii intermediare ce se transmit la extremitățile consolelor sunt:

$$C = D = \frac{1}{2} q l_1$$

Momentele negative pe reazimele grinzii cu console sunt :
la grinda din stânga $A\ B$:

$$M_a = 0\ ;\ M_b = -\left(\frac{1}{2}\ ql_1\ \lambda + q\ \frac{\lambda^2}{2}\right);$$

în grinda din dreapta $A_1\ B_1$

$$M'_a = -\frac{1}{2}\ ql_1\ \lambda\ ;\ M'_b = 0$$

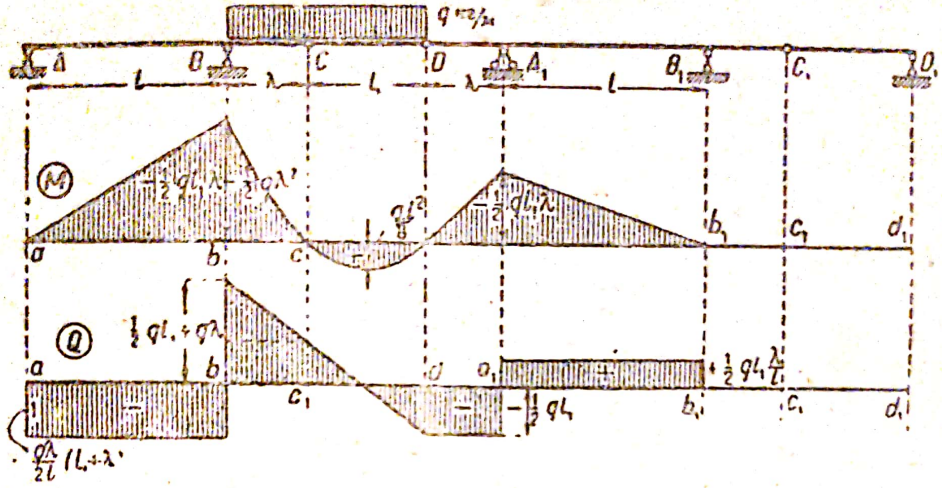


Fig. 74

Reacţiunile în grinda din stânga sunt :

$$A = -\frac{1}{l}\left(\frac{1}{2}\ ql_1\ \lambda + q\ \frac{\lambda^2}{2}\right);\ B = \frac{1}{l}\left[q\ \lambda\left(l + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\ ql_1\left(l + \lambda\right)\right];$$

iar în grinda din dreapta :

$$A_1 = \frac{1}{2}\ ql_1\ \frac{l + \lambda}{l}\ ;\ B_1 = -\frac{1}{2}\ ql_1\ \frac{\lambda}{l}$$

In limitele grinzii intermediare, momentul şi forţa tăietoare se vor calcula după formulele grinzii simplu rezemate :

$$M = \frac{1}{2}\ qx\ (l_1 - x)\ ;\ Q = \frac{1}{2}\ ql_1 - qx$$

Curba momentelor va avea forma unei parabole cu ordonata maximă $\frac{1}{8}\ q\ l_1^2$, iar curba forţelor tăietoare va fi o dreaptă înclinată având ordonatele maxime în dreptul reazimelor.

In limitele consolelor, valoarea momentelor se determină din expresia :
In consola $B\ C$:

$$M_x = -\left(\frac{1}{2}\ ql_1 x + \frac{1}{2}\ qx^2\right);$$

iar în consola $D\ A$:

$$M_x = -\frac{1}{2}\ ql_1 x\ ;$$

In primul caz punctul liniei de influenţă va fi curbiliniu, iar în al doilea rectiliniu.

Forţa tăietoare va fi :
în consola $B\ C$:

$$Q = \frac{1}{2}\ ql_1 + qx\ ;$$

iar în consola $D\ A_1$:

$$Q = -\frac{1}{2} q l_1 .$$

In consola $B\ C$ linia de influență este o dreaptă înclinată în raport cu axa absciselor ; în consola $D\ A_1$ această linie este tot o dreaptă însă paralelă cu axa absciselor.

Pe porțiunea din deschiderea grinzii momentele pot fi determinate direct din reacțiunile de pe reazime :
în grinda $A\ B$:

$$M_x = Ax = -\frac{1}{2}\frac{q}{l}(l_1\lambda + \lambda^2)x ;$$

în grinda $A\ B_1$;

$$M_x = B_1 x = -\frac{1}{2}\frac{q}{l} l_1 \lambda x ;$$

Ambele linii de influență sunt reprezentate prin linii drepte, care se reduc la zero în dreptul reazimelor A și B_1

Forțele tăietoare pe porțiunea din deschiderea grinzii pot fi determinate direct după reacțiunile respective :
în grinda $A\ B$:

$$Q_x = A = -\frac{q}{2l}(l_1\lambda + \lambda^2) ;$$

iar în grinda $A_1\ B_1$

$$Q_x = -B_1 = +\frac{q}{2l} l_1 \lambda .$$

In ambele grinzi, liniile de influență sunt constante.

In limitele consolei $B_1\ C_1$ și pe grinda intermediară, momentele și forțele tăietoare sunt egale cu zero, întru cât niciuna nici cealaltă nu suportă vreo sarcină.

§ 22. Construcția grafică a curbei momentelor într'o grindă Gerber

Valoarea momentelor în secțiunile de pe deschiderea grinzii se poate determina — în general — prin expresia :

$$M = M^0 - \frac{M_a}{l}(l - x) - \frac{M_b}{l} x .$$

Astfel, curba momentelor este compusă din curba momentelor M^0 a unei grinzi simplu rezemate și din curba momentelor de pe reazime M_a și M_b care au forma trapezoidală având ordonatele în dreptul reazimelor egale cu valorile momentelor pe reazime.

Această însumare a curbelor rămâne valabilă pentru orice grindă simplu rezemată, când influența asupra ei din partea deschiderilor vecine se produce sub forma unor momente aplicate pe reazime. Aceeași regulă este valabilă și pentru deschiderile în care se introduc articulații, însă *introducerea articulațiilor impune ca latura de închidere să intersecteze poligonul funicular pe verticala din dreptul articulațiilor*, deoarece în aceste puncte, momentele sunt egale cu zero, deci și ordonatele curbei trebue să fie egale cu zero. In acest fel introducerea de articulații într'o grindă continuă, permite să se determine poziția liniilor de închidere, ceea ce dă posibilitatea să se construiască grafic curba momentelor.

Să analizăm de exemplu construcția curbei momentelor, pentru grinda din fig. 75 a.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru construirea curbei momentelor, trasăm poligonul forțelor pentru sarcinile P_1, P_2 . . . , P_{10} și fixând polii O_1, O_2, O_3 și O_4 *cu aceeași distanță polară* H (fig. 75 c) și construim apoi pentru fiecare deschidere a grinzii continue poligoanele funiculare respective (fig. 75 b). La asemenea construcții se recomandă să se respecte ordinea succesivă și continuă a curbelor.

Proiectând pe laturile acestor poligoane pozițiile articulațiilor F_1, F_2 și F_3, determinăm pozițiile punctelor având ordonata zero, prin care trebue să treacă linia de închidere. În acest fel pe deschiderea B C linia de închidere va ocupa poziția b_1 c_1, trecând prin punctele f_1 și f_2 și va intersecta în dreptul reazimelor segmentele bb_1 și cc_1 care

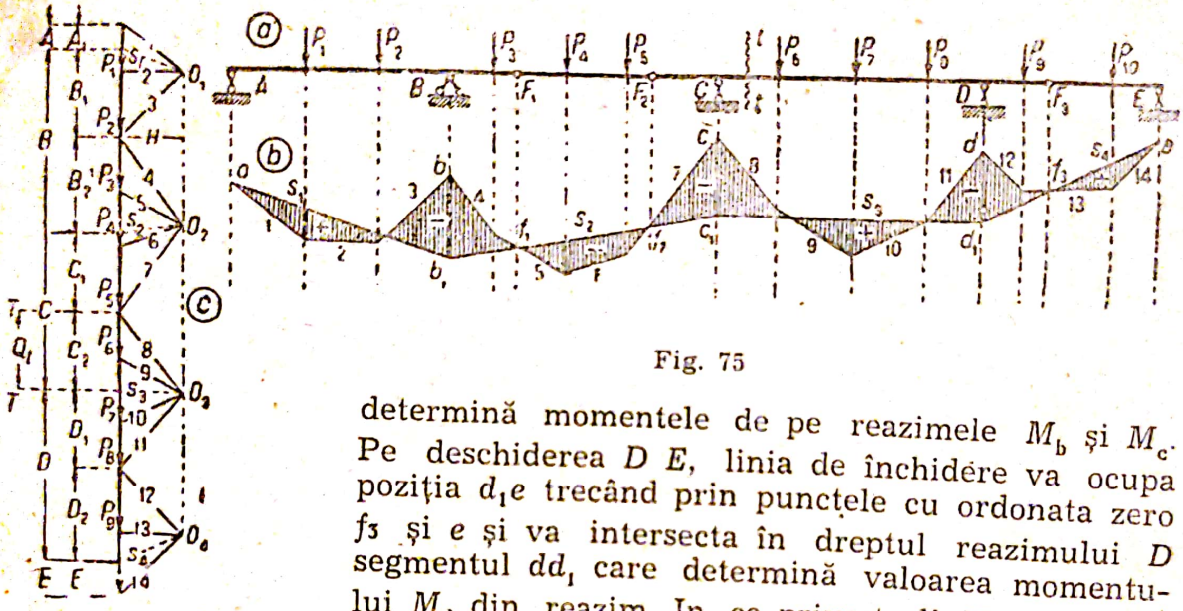


Fig. 75

determină momentele de pe reazimele M_b și M_c. Pe deschiderea D E, linia de închidere va ocupa poziția d_1e trecând prin punctele cu ordonata zero f_3 și e și va intersecta în dreptul reazimului D segmentul dd_1 care determină valoarea momentului M_d din reazim. In ce privește liniile de închidere pe deschiderile A B și CD, pozițiile lor se vor determina prin ordonatele momentelor din reazime, ele fiind drepte ab_1 și c_1 d_1 .

Valoarea reacțiunilor pe reazime se poate determina dacă în fiecare poligon al forțelor ducem linia corespunzătoare cu linia de închidere, segmentele poligonului de forțe determinate de aceste linii de închidere reprezintă valoarea reacțiunilor pe reazime ; reacțiunile pe reazimele intermediare se vor compune din cele două reacțiuni ale deschiderilor adiacente, astfel :

$$B = B_1 + B_2 \; ; \; C = C_1 + C_2 \text{ etc.}$$

Forțele tăietoare în fiecare secțiune se determină prin poligonul forțelor prin segmentul cuprins între laturile poligonului forțelor, corespunzătoare poligonului funicular, intersectate de linia verticală ce trece prin secțiunea considerată. Astfel în secțiunea tt care taie laturile 8 și s_3 forța tăietoare este determinată de segmentul T — T (fig. 75 c) și va avea semnul pozitiv, deoarece se găsește deasupra liniei de închidere.

Condițiunile pentru construirea curbelor nu se vor modifica dacă în loc de sarcini concentrate vom avea sarcini continue uniform repartizate.

§ 23. Liniile de influență ale grinzilor Gerber

Liniile de influență ale grinzilor Gerber diferă de liniile de influență ale grinzilor cu console prin introducerea influenței sarcinilor care se găsesc pe grinzile intermediare. Deoarece față de grinzile cu console, grinzile intermediare au rolul unor grinzi auxiliare (de transmisie) — după regula generală — liniile de influență în limitele acestor grinzi sunt formate din drepte care trec prin vârfurile ordonatelor corespunzătoare extremităților grinzilor auxiliare sau ale capetelor consolelor.

Dacă pentru o grindă simplu rezemată cu console $A_1 B_1$ (fig. 76, I) linia de influență a reacțiunii A_1 se determină prin dreapta db_1c_1, atunci la așezarea grinzilor intermediare $C D$, C_1D_1, linia de influență se va completa cu dreptele $c\ d$ și $c_1 d_1$. Deplasarea sarcinii unitare în limitele celorlalte grinzi ale sistemului nu va influența în nicio măsură grinda cu console A_1B_1, deci linia de influență a reacțiunii A_1 în celelalte părți ale sistemului va avea ordonata egală cu zero. In orice secțiune a grinzii, liniile de influență ale momentelor (fig. 76, II) și ale forțelor tăietoare (fig. 76, III) își păstrează aceeași formă și se aplică același procedeu de construcție ca și la grinzile simple cu console, însă vor fi completate în dreptul grinzilor intermediare $C D$ și C_1D_1 prin dreptele $c\ d$ și c_1d_1 care trec prin ordonatele liniei de influență dela capetele consolelor și prin zero în dreptul articulației la celălalt capăt al grinzii intermediare.

Această extindere a liniei de influență pe lungimea grinzii intermediare este valabilă și pentru liniile de influență corespunzătoare secțiunilor de pe consolă (fig. 76 IV și V).

Dacă grinzile Gerber sunt solicitate de sarcini indirecte, construcția liniilor de influență pentru grinda principală rămâne aceeași ca și în cazul încărcărilor directe. Ținând însă seama de regulile generale — după care linia de influență între antretoaze este o linie dreaptă — forma liniei de influență trebue să se modifice în acele puncte unde liniile principale își schimbă direcția, ceea ce se întâmplă de obiceiu, la extremitățile liniei de influență în dreptul articula-

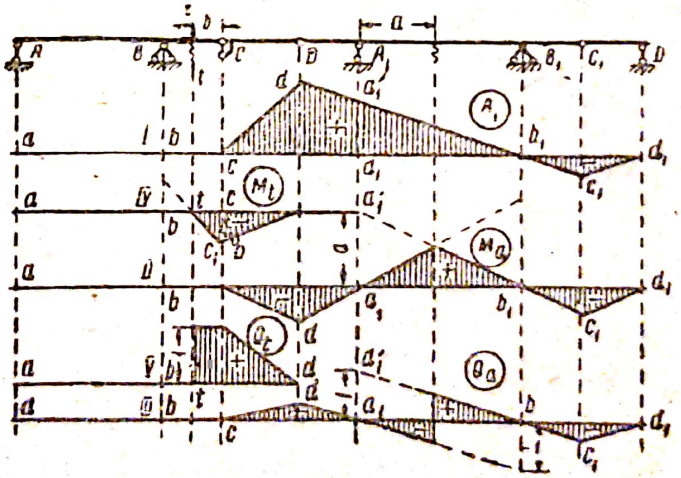


Fig. 76

ţiilor (D, C_1, C) precum şi în dreptul secţiunii considerate, dacă, bineînţeles toate aceste puncte se găsesc între grinzile auxiliare (antretoaze).

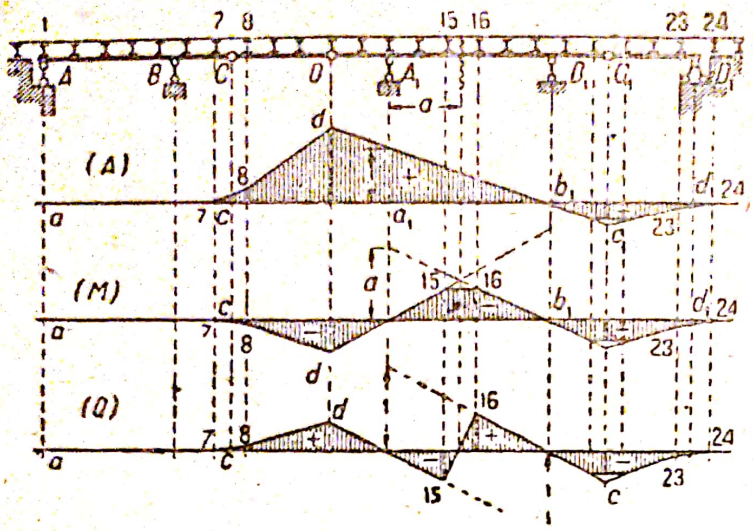


Fig. 77

In fig. 77 este reprezentată linia de influenţă a reacţiunii A_1, a momentului M în secţiunea de pe deschidere, ce se găseşte la distanţa a de reazimul A_1 şi a forţei tăietoare Q în aceeaşi secţiune.

Intru cât linia de influenţă a grinzilor Gerber diferă de liniile de influenţă ale grinzilor simple cu console, numai prin extinderea lor şi asupra porţiunilor grinzilor intermediare, toate indicaţiile din § 19—20 rămân valabile şi pentru grinzile Gerber.

Din comparaţia liniilor de influenţă ale grinzilor simple cu console (fig. 67 şi 70) şi grinzilor Gerber (fig. 76 şi 77) rezultă că liniile de influenţă ale primelor grinzi sunt limitate cu ordonate mari în dreptul extremităţilor consolelor, pe când la cele din urmă acest lucru se manifestă printr'o reducere treptată pe lungimea grinzii intermediare a liniei de influenţă până la zero. Această cădere bruscă a liniilor de influenţă la grinzile simple cu console, denotă că orice sarcină care intră pe consolă provoacă în grindă o variaţie accentuată a momentului sau a forţei tăietoare (după natura solicitării), ceea ce nu se întâmplă la consolele care au grinzi suspendate (sistem Gerber), datorită cărui fapt se ameliorează modul cum lucrează întregul sistem.

Probleme şi exerciţii

7. Să se reprezinte câteva variante de transformare într'o grindă sistem Gerber, ale grinzii continue din fig. 78.

Fig. 78

Indicaţie. Trebue să determinăm numărul de articulaţii intermediare necesare pentru obţinerea unei grinzi static determinate şi să le distribuim în aşa fel, încât după intrarea lor în funcţiune, sistemul să rămână totuşi indeformabil.

8. Să se construiască grafic şi analitic curba momentelor pentru grinda Gerber reprezentată în fig. 79, sub acţiunea sarcinilor indicate în figură. După obţinerea curbei momentelor, să se traseze şi conturul pentru forţele tăietoare.

Scanned with OKEN Scanner

Indicații. La construcția grafică, trebue să ne orientăm după schema din fig. 75, având în vedere că poligonul forțelor pe porțiunea $B\ C$ este format numai dintr'o singură linie.

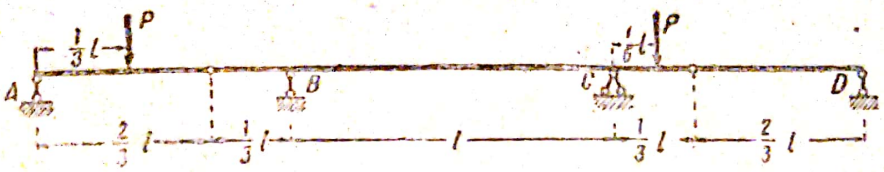


Fig. 79

De asemenea trebue să ne conducem de raportul dintre momente și forțele tăietoare.

9. Să se demonstreze că grinda Gerber reprezentată în fig. 80 este static determinată și indeformabilă. Să se arate pe baza cărei proprietăți se poate scrie expresia :

$$\sum M_b = Al - (C + D - pl)\ \frac{1}{4}\ l = O$$

Să se construiască apoi curba momentelor, determinând numai valoarea reacțiunilor din reazimul D.

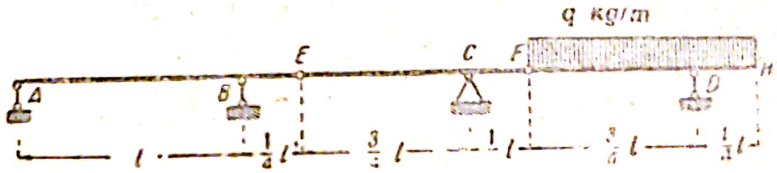


Fig. 80

Indicații. Cercetarea condițiilor de indeformabilitate trebue începută dela elementul AEE. Răspunsul relativ la expresia momentului $\sum M_b$ poate să fie dat după proprietățile articulațiilor și ale rezultantelor.

10. Să se construiască grafic curba momentelor pentru grinda reprezentată în fig. 80.

11. Să se construiască liniile de influență ale momentelor și forțelor tăietoare în secțiunile m și n ale grinzii cu console înfățișată în fig. 81.

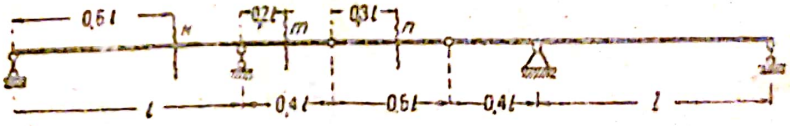


Fig. 81

Indicație. La alcătuirea ecuației liniei de influență trebue să ne conducem după indicațiile dela § 20.

12. Se arată în fig. 82 axa unei grinzi Gerber cu cinci reazime și conturul curbei momentelor ; se cere, ca pornind dela examinarea curbei momentelor, să se arate locul articulațiilor intermediare, indicându-se totodată felul încărcării îndreptate în jos.

13. In fig. 83 este reprezentată schema unei grinzi Gerber cu liniile de influență ale reacțiunilor pe reazimele B și C, a momentului în secțiunea n a porțiunii $B\ E$ și în secțiunea k a porțiunii EC. Să se arate dacă aceste construcții sunt corect executate.

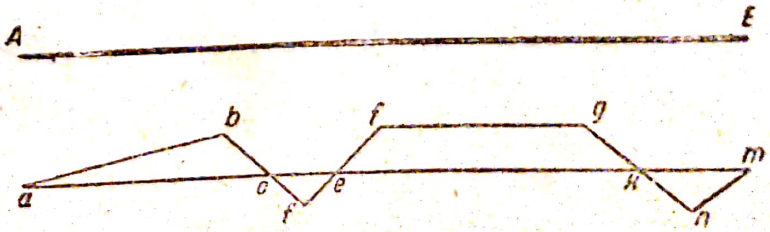


Fig. 82

Indicații. Pentru construirea liniei de influență a reacțiunii C, trebue să cunoaștem acțiunea reacțiunii D și linia ei de influență. Ecuația liniei de influență a reacțiunii din reazimul B se alcătuește considerând grinda $A\,B$ ca o grindă simplu rezemată. La alcătuirea ecuației liniei de influență a momentelor în secțiunile m și k, trebue să ținem seama ca pentru poziția sarcinii unitare în stânga secțiunii, reacțiunile din punctele C și D sunt egale cu zero.

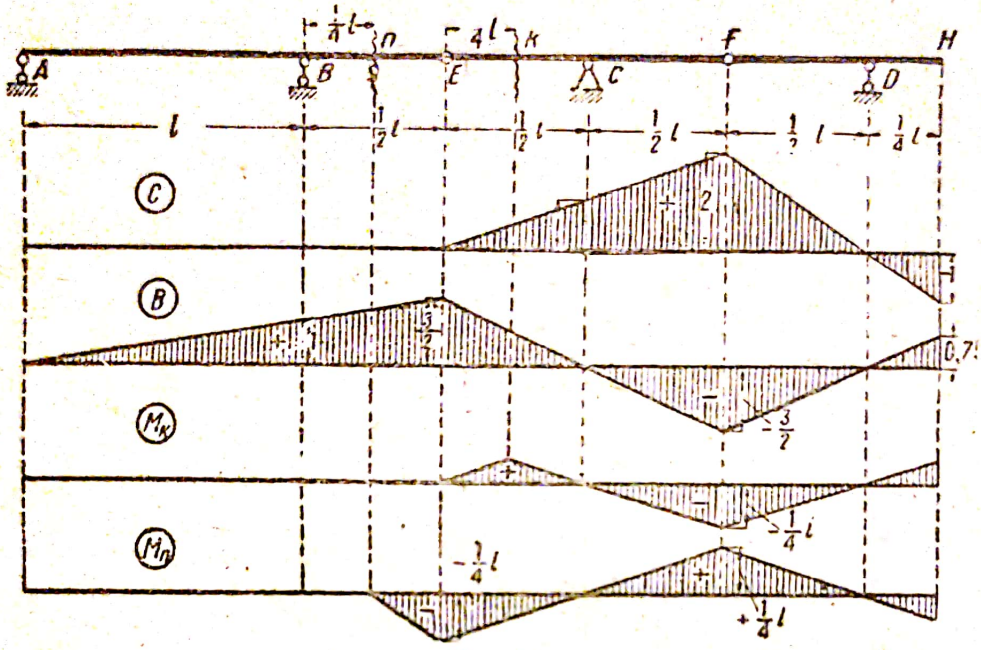


Fig. 83

Intrebare. Cum se explică din punct de vedere mecanic faptul, că o sarcină așezată în dreptul articulației F, provoacă în reazimul C o reacțiune de două ori mai mare decât sarcina propriu-zisă ?

CAPITOLUL 5

GRINZI CU ZABRELE

§ 24. Noțiuni generale

In calculele teoretice, sub denumirea de *grindă cu zăbrele* se înțelege *un sistem geometric plan alcătuit din elemente drepte* (bare) *legate între ele cu articulații fără frecare și încărcate numai la noduri.*

Elementele drepte — numite bare — care merg dela o articulație la alta, determină direcțiunea eforturilor principale axiale, care se produc în grinda cu zăbrele.

Dacă presupunem că într'o secțiune făcută într'o bară între articulațiile ei acționează un efort S care nu este orientat după bară, ci are o altă direcție, rezultă că sub acțiunea acestui efort bara trebue să tindă să se rotească în jurul articulațiilor până la poziția ei de echilibru care este posibil numai atunci când efortul S are direcția liniei drepte care unește centrele articulațiilor. Această condiție nu se modifică dacă există bare curbe (fig. 84) însă, în raport cu axa barei curbe efortul

axial S va fi excentric și de aceea bara va fi solicitată complimentar din cauza acțiunii excentrice determinată prin momentul:

$$M = S.f$$

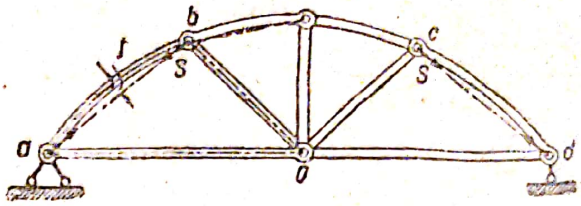


Fig. 84

Construcția de articulații fără frecare este practic irealizabilă. In grinzile metalice cu zăbrele îmbinările la noduri se fac cu ajutorul niturilor (fig. 85 a), buloanelor (fig. 85 b) sau prin sudură; la grinzile de lemn îmbinările se realizează prin crestări (fig. 85 c), cuie (dornuri) etc. Toate aceste îmbinări — în afară de cele cu buloane — nu au de fapt nicio articulație; există numai puncte unde se intersectează axele barelor ce se întâlnesc într'un nod. Insă, chiar și la nodurile cu buloane, frecarea ce se naște între peretele găurii făcute în bară și bulon sub acțiunea efortului îndreptat în sensul barei, este atât de mare încât de fapt barele nu se rotesc. In prezent îmbinările cu buloane se utilizează în cazuri foarte rare.

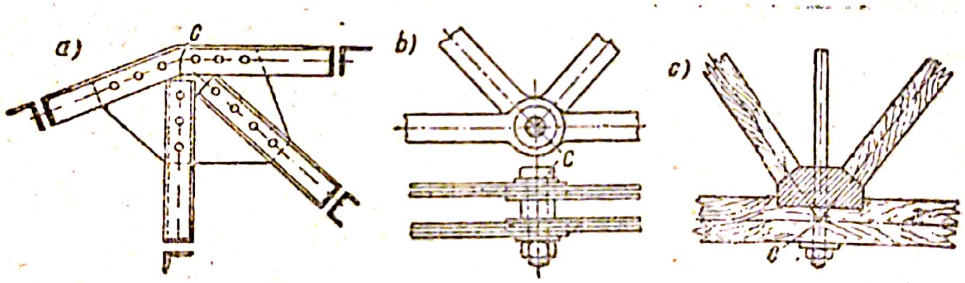


Fig. 85

Cercetările experimentale și calculele, au arătat că la o lungime mare a barei și o lățime relativ mică a secțiunii (mai puțin decât $^1/_{10}$ din distanța între două noduri) rezistențele suplimentare produse de influența îmbinării rigide a nodurilor nituite, nu sunt mari în raport cu rezistențele datorite eforturilor principale. Aceste rezistențe suplimentare datorite rigidității nodurilor, se calculează separat de eforturile principale. Această problemă se studiază la tratatele de poduri.

Condițiunea de aplicare a sarcinilor în nodurile grinzii cu zăbrele, este necesară, întru cât orice sarcină aplicată asupra unei bare în afara nodurilor (fig. 86) se va descompune în noduri și va provoca încovoierea barei. Din această cauză bara va fi solicitată și la eforturi suplimentare de încovoiere, independent de efortul principal axial S. Când sarcinile sunt aplicate numai în noduri, barele grinzii cu zăbrele vor fi solicitate numai de *eforturi principale axiale (longitudinale).*

Fig. 86

Pentru înlăturarea acestor influențe

suplimentare, descrise mai sus, în teorie se studiază numai eforturile principale în grinzile cu zăbrele, admițând că aceste grinzi sunt alcătuite din bare drepte, articulate la noduri și fără frecare, având sarcina aplicată numai în noduri.

§ 25. Condițiile de determinare statică și de indeformabilitate

Grinzile cu zăbrele trebue să satisfacă condițiunile de *indeformabilitate*, adică barele lor nu trebue să aibă *deplasări libere*; orice modificare de formă a grinzii este posibilă numai în limitele deformațiilor barelor ce o compun.

Cel mai simplu exemplu de indeformabilitate geometrică a unei grinzi cu zăbrele este triunghiul (fig. 87) la care modificarea formei este posibilă numai la o schimbare a lungimii laturilor.

Cel mai simplu exemplu de sistem geometric deformabil este patrulaterul (fig. 90 a) care poate să-și modifice forma fără să-și schimbe lungimea laturilor.

Grinzile cu zăbrele deformabile nu se întrebuințează în construcții, de aceea în cele ce urmează ne vom ocupa de grinzile indeformabile.

Grinda cu zăbrele, cu tălpile paralele, indeformabilă, după alcătuirea ei, poate fi comparată, sub raportul reazimelor, cu o grindă cu secțiune plină, de aceea condițiile de determinare statică a acestei grinzi cu zăbrele față de reacțiunile ei, rămân aceleași ca și în cazul grinzilor cu secțiunea plină (§ 4).

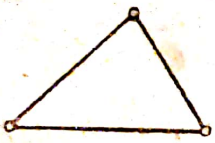


Fig. 87

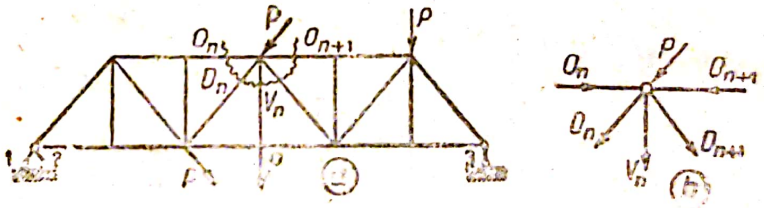


Fig. 88

Condițiile de determinare statică a grinzilor cu zăbrele depind de faptul dacă numărul ecuațiilor ce pot fi alcătuite pentru determinarea eforturilor în elementele grinzii cu zăbrele, este suficient sau insuficient; numărul eforturilor fiind egal cu numărul barelor în care apar.

Intru cât întreaga grindă cu zăbrele este considerată în stare de echilibru elastic, sub acțiunea unor forțe exterioare, atunci și elementele ei separate, de exemplu nodurile, considerate izolat, trebue să se găsească în stare de echilibru elastic sub acțiunea forțelor exterioare și a eforturilor aplicate în aceste noduri (fig. 88).

Deoarece în fiecare nod toate forțele trec printr'un singur punct, condiția lor de echilibru se reduce la două ecuații:

$$\sum X = 0 \quad \text{și} \quad \sum Y = 0:$$

Dacă notăm cu k numărul nodurilor într'o grindă cu zăbrele, atunci pentru determinarea eforturilor pe care nu le cunoaștem putem să scriem $2k$ ecuații, din care, după numărul barelor grinzii, vom deter-

mina nu numai cele m eforturi necunoscute, ci și cele trei eforturi necunoscute date de reazime, adică în total $m + 3$ necunoscute.

Intr'adevăr, dacă nodurile, inclusiv și cele de pe reazime, sunt în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare, atunci și grinda cu zăbrele propriu-zisă, care leagă toate aceste noduri, se găsește în echilibru sub acțiunea acelor forțe, deoarece cele trei ecuații de echilibru, care determină valorile necunoscute ale reacțiunilor sunt consecința celor $2k$ ecuații de echilibru ale nodurilor. Prin urmare, *o grindă cu zăbrele este static determinată în raport cu eforturile din bare, dacă numărul barelor ei m, este egal cu dublul numărului nodurilor $2k$ minus 3:*

$$m = 2k - 3 \qquad (39)$$

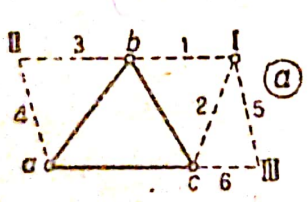
Această condițiune este satisfăcută de orice triunghiu articulat, deoarece $m = 3 = 2 \cdot 3 - 3$ și în general de orice *poligon care se formează prin adăugirea la un triunghiu inițial, a unui nod cu ajutorul a două bare.*

In acest caz, partea din stânga și cea din dreapta a egalității se majorează cu același număr

$$m + 2 = 2\,(k + 1) - 3,$$

iar ordinea și procedeul de adăugire este indiferent; *nu se admite, însă, ca barele și nodul ce se adaugă să fie în linie dreaptă.*

Grinzile cu zăbrele obținute prin adăugire la triunghiul inițial trecând succesiv dela un nod existent la un nod nou (fig. 89 d) și alcătuite dintr'un șir de triunghiuri, se numesc *grinzi simple cu zăbrele* spre



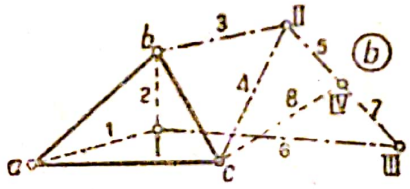


Fig. 89

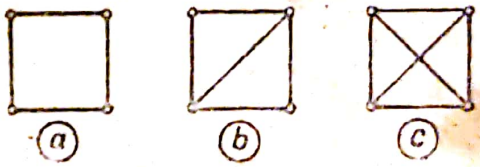


Fig. 90

deosebire de *grinzile cu zăbrele suplimentare* la care barele se intersectează reciproc (fig. 89 b) introducându-se și suprapunându-se un sistem de zăbrele peste altul etc.

Condiția introdusă care stabilește relația dintre numărul articulațiilor și numărul barelor

$$m = 2\,k - 3,$$

stabilește numărul ecuațiilor posibile de echilibru necesare pentru determinarea eforturilor în bare între articulații; dacă această condițiune este satisfăcută, atunci fiecărui fel de sarcină aplicată pe grinda cu zăbrele îi corespund anumite eforturi.

Dacă numărul barelor $m < 2k - 3$, aceasta arată că numărul barelor care formează legăturile între articulații nu este suficient pentru asigurarea imobilității celor k articulații; prin urmare *grinda cu zăbrele este deformabilă.*

Scanned with OKEN Scanner

Un exemplu de astfel de sistem deformabil este patrulaterul (fig. 90 a) în care:

$$m = 4 < 2 \cdot 4 - 3 = 5$$

Putem însă aduce sistemul la o formă indeformabilă prin introducerea unei a cincea bare (diagonală) (fig. 90 b).

Introducerea unei a doua diagonale (fig. 90 c) ar servi numai pentru consolidarea sistemului, care și fără această diagonală este indefor-

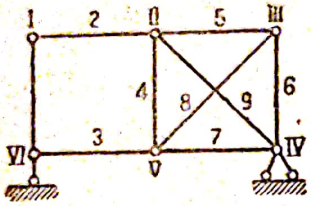


Fig. 91

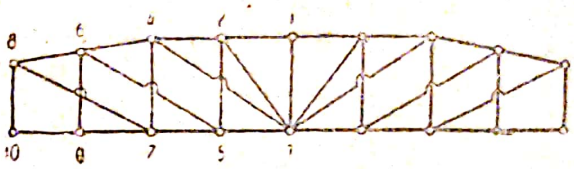


Fig. 92

mabil. Deoarece numărul articulațiilor nu se schimbă în acest caz, ci se introduce numai o bară în plus, numărul ecuațiilor necesare pentru determinarea eforturilor în grindă rămâne același; numărul ecuațiilor va fi însă insuficient pentru determinarea eforturilor în toate barele inclusiv în cele adăugate și de aceea *grinzile cu zăbrele la care;*

$$m > 2k - 3,$$

sunt static nedeterminate.

Statica construcțiilor tratează numai grinzile cu zăbrele indeformabile, în care

$$m \geqslant 2k - 3,$$

împărțind studiul lor în sisteme static determinate și cele static nedeterminate.

Condiția $m = 2k - 3,$

care fixează starea de determinare sau nedeterminare statică *este necesară dar nu este suficientă pentru stabilirea condiției de indeformabilitate.* Aceasta se poate înțelege ușor dacă studiem grinda cu zăbrele reprezentată în fig. 91, în care numărul barelor $m = 9$ și al articulațiilor $k = 6$, deci condiția (39) după care $9 = 2 \cdot 6 - 3$ este îndeplinită. Totuși este absolut evident, că partea din stânga a grinzii cu zăbrele fiind alcătuită dintr'un patrulater articulat este deformabilă; partea din dreapta însă conține un număr suplimentar de bare de legătură.

Condiția de indeformabilitate a sistemului se stabilește prin verificarea alcătuirii lui. Grinzile cu zăbrele compuse numai din triunghiuri articulate (fig. 88) sunt indeformabile și sunt totodată și cele mai simple prin alcătuirea lor; după cum s'a arătat mai sus, ele se formează prin adăugirea succesivă la triunghiul de bază a câte unui nod creat de două bare (fig. 89 a). Uneori în sistemul cu elemente încrucișate (fig. 92) acest procedeu de formare a grinzii nu este suficient de clar din cauza lipsei de triunghiuri bine conturate. În astfel de cazuri este

necesar să urmărim formarea grinzii cu zăbrele, luând ca bază un triunghiu ce se găsește în alcătuirea ei, de exemplu la grinda cu zăbrele reprezentată în fig. 92, ca triunghiu de bază trebue să fie considerat triunghiul 1—2—3, legându-l apoi succesiv cu două bare de nodurile 4, 5, 6, 7, 8, 9 și 10.

Grinzile cu zăbrele pot fi formate nu numai prin adăugirea succesivă de noduri, ci și prin îmbinarea reciprocă a unor grinzi separate considerate ca elemente rigide. Îmbinarea indeformabilă a unor astfel de elemente rigide, fără să se distrugă condițiile de determinare statică a întregului sistem, se poate obține prin legarea elementelor rigide cu o articulație și o bară (fig. 93) sau cu trei bare care nu sunt concurente (fig. 94).

Grinda cu zăbrele din fig. 93 este alcătuită din două grinzi simple cu zăbrele indeformabile, reprezentând elementele rigide îmbinate cu articulația S și cu bara ab. Această îmbinare satisface condiția (39) de determinare statică.

Ambele elemente rigide satisfac condiția (39) :

$$m_1 = 2k_1 - 3\,; \qquad m_2 = 2k_2 - 3\,; \tag{a}$$

In construcția astfel alcătuită, numărul nodurilor articulate este $k_1 + k_2 - 1$, deoarece articulația S reunește două noduri ; numărul barelor este însă $m_1 + m_2 + 1$, prin urmare dacă grinda nouă este static determinată, trebue să avem egalitatea (39) :

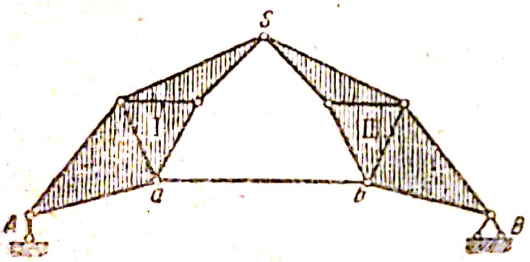


Fig. 93

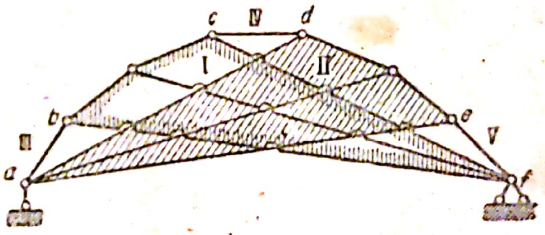


Fig. 94

$$(m_1 + m_2 + 1) = 2\,(k_1 + k_2 - 1) - 3 \tag{b}$$

Comparând această egalitate cu egalitatea (a) se poate constata că în condițiile de îmbinare indicate, această egalitate (b) este îndeplinită. Grinda cu zăbrele reprezentată în fig. 94, este o îmbinare indeformabilă a două elemente rigide I și II cu ajutorul a trei bare ab, cd și ef, care nu sunt concurente ; o astfel de îmbinare urmează să satisfacă condiția (39) și anume : numărul elementelor rigide și al barelor de legătură trebue să fie egal cu numărul articulațiilor inițiale (efective) mai puțin trei :

$$m = 2k - 3$$

Noțiunea de articulații principale (complete) este introdusă în scopul de a înlesni stabilirea condițiilor de determinare statică a grinzilor cu zăbrele ce se formează din elemente rigide, legate între ele cu

un număr oarecare de bare. Articulație principală se numește acea articulație, care determină poziția unui element rigid considerat ca o bară a sistemului. Fiecare element rigid poate avea numai două articulații principale așezate în diferite poziții ; restul articulațiilor elementului rigid servește numai pentru a le fixa de barele de legătură și nu pot fi incluse în numărul articulațiilor principale ce se iau în considerare pentru condițiunea (39). Analizând din acest punct de vedere compunerea grinzii cu zăbrele, reprezentată în fig. 94, putem stabili că această grindă este compusă din 5 elemente rigide dintre care elementele I și II se determină cu patru articulații principale *a*, *e*, *b*, *f*, ceea ce satisface condițiunea (39) :

$$5 = 2 \cdot 4 - 3$$

Considerând articulațiile *a*, *e* și *b*, *f* ca articulații principale, articulațiile *c* și *d* care intră în alcătuirea elementelor I și II nu sunt independente, deci nu se pot introduce în condițiunea (39). Articulațiile ce servesc pentru legarea barelor de legătură de elementele rigide, spre deosebire de articulațiile principale, pot fi denumite articulații de legătură (incomplete).

Independent de cele arătate mai sus, se poate demonstra că dacă ambele elemente rigide ce se îmbină, satisfac condițiile de determinare statică (39), atunci îmbinarea lor într'un singur tot, fără schimbarea numărului de articulații, însă cu introducerea a trei bare de legătură, trebue să satisfacă condițiunea :

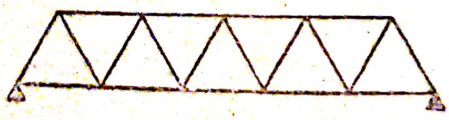
$$m_1 + m_2 + 3 = 2\,(k_1 + k_2) - 3$$

Aceasta reprezintă o simplă însumre a condițiilor de determinare statică a ambelor elemente rigide, î care includerea a trei bare de legătură a anulat condițiile care asigurau legătura unuia din aceste două elemente rigide cu pământul.

O alcătuire mai complicată a grinzilor cu zăbrele se verifică prin procedee speciale care sunt tratate mai departe în § 41.

§ 26. Terminologie

Grinzile cu zăbrele pot avea formele cele a mai variate în raport cu scopul lor, sau cu caracterul construcției pentru care sunt proiectate. Totuși în tehnică s'a stabilit o serie de termeni generali care definesc denumirea grinzilor cu zăbrele și a pieselor lor componente.



Fig, 95

Fig. 96

Barele care formează o grindă cu zăbrele se împart în *tălpi* și *zăbrele*.

Tălpi se numesc barele situate pe conturul exterior al grinzii cu zăbrele ; ele formează *talpa superioară* care limitează partea de sus a grinzii și *talpa inferioară*, care mărginește partea de jos.

Scanned with OKEN Scanner

Zăbrele se numesc barele care leagă talpa superioară de talpa inferioară. La zăbrele distingem două feluri de bare: verticale, care se numesc *montanți* și înclinate denumite *diagonale.*

După *contur,* grinzile cu zăbrele se împart în:

1. *Grinzi cu tălpi paralele* (fig. 95).

2. *Grinzi cu tălpi curbe,* la care centrele nodurilor sunt așezate după o curbă oarecare, de exemplu după un cerc (fig. 96), parabolă (fig. 97) etc, iar grinzile se numesc în consecință: circulare, parabolice, lenticulare etc.

3. *Grinzi cu tălpi poligonale* la care una sau ambele tălpi sunt conturate după o linie frântă; conturul acestor linii se determină pe considerente teoretice constructive sau estetice; în raport cu aceasta ele poartă denumirea de: grinzi poligonale (fig. 98), ferme (fig. 99) etc.

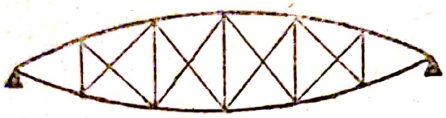


Fig. 97

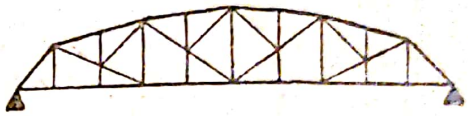


Fig. 98

După *felul zăbrelelor,* grinzile cu zăbrele se împart astfel:

1. *Dreptunghiulare* (fig. 96) la care sistemul de zăbrele se formează alternând montanții cu diagonalele.

2. *Triunghiulare* (fig. 95) la care zăbrelele se compun numai din bare înclinate.

3. *Cu diagonale în K* (fig. 100), care diferă de cele dreptunghiulare prin aceea că într'un panou, în loc de o diagonală lungă, se așază două diagonale scurte, care unesc extremitățile fiecărui montant cu mijlocul montantului următor.

Toate aceste feluri de zăbrele se numesc *zăbrele simple* spre deosebire de grinzile cu *zăbrele multiple (complexe),* care se formează prin următoarele procedee:

1. Prin *suprapunere* a două sau mai multor sisteme cu zăbrele simple, obținând astfel o *grindă cu două sisteme de zăbrele: triunghiulară dublă (romboidală) (fig. 103) dreptunghiulară dublă (fig. 101)* sau cu *zăbrele multiple* (fig. 102) etc. în raport cu numărul sistemelor simple de zăbrele care alcătuesc grinda. Numărul sistemelor simple care al-

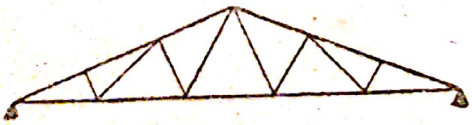


Fig. 99

Fig. 100

cătuesc un sistem multiplu (complex) de zăbrele, se determină făcând o secțiune transversală prin grindă; numărul zăbrelelor secționate va indica și numărul de sisteme elementare. De exemplu, grinda înfățișată în fig. 101, după cum se constată din secțiunea *SS*, are două sisteme, întru cât secțiunea taie două diagonale sau doi montanți.

2. Prin *introducerea,* impusă de considerente constructive, într'un

sistem simplu cu zăbrele, a *zăbrelelor suplimentare,* cu adăugarea nodurilor respective ; dintre acestea fac parte grinda cu zăbrele, sistem triunghiular, *cu contrafişe suplimentare* din fig. 98, grinda triunghiulară *cu triunghiuri suplimentare* din fig. 104 etc.

Această caracterizare nu epuizează toate formele posibile de grinzi cu zăbrele, ci defineşte numai terminologia lor tehnică.

Primele grinzi cu zăbrele (din anii 1820—1825) erau alcătuite din lemn, cu zăbrele multiple şi cu tălpi paralele, asemănându-se cu grinzile simple (grinzile Town, fig. 102) şi cu grinzile cu diagonale ce se intersectează (grinda Howe). Primele grinzi metalice cu zăbrele s'au proiectat mai târziu (în anii 1850—1860), cu tălpi paralele şi cu zăbrele multiple (fig. 102), numărul sistemelor elementare fiind până la 10 şi chiar mai mare ; diagonalele se făceau din platbande de fier. Grinzile de acest tip sunt static nedeterminate, iar întrebuinţarea lor se explica prin cunoştinţele reduse din acele timpuri. Insă chiar în anii 1870—1885 s'a stabilit modalitatea de trecere dela grinzile cu zăbrele multiple la cele cu zăbrele mai simple dreptunghiulare duble (fig. 101) şi triunghiulare duble (fig. 103).

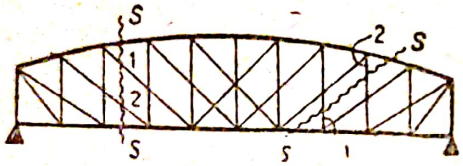


Fig. 101

Fig. 102

Totodată s'a început proiectarea grinzilor cu zăbrele cu talpă curbă şi cu montanţi la capete ; atribuirea unei forme curbilinii la grinzile cu zăbrele a fost rezultatul logic al căutării celei mai raţionale forme în raport cu creşterea momentelor. Odată cu rezolvarea problemei proiectării barelor cu secţiuni rigide, care rezistau satisfăcător la flambaj, a apărut posibilitatea de a trece la sisteme de zăbrele care nu mai aveau elemente ce se încrucişează între ele ; adică la sisteme dreptunghiulare simple (fig. 96) şi la sisteme triunghiulare simple (fig. 95). Modul cum lucrează elementele unor astfel de sisteme este mult mai bine determinat ; ele lucrează atât la tensiune cât şi la compresiune. Totodată s'a început să se facă tălpi poligonale (fig. 98), iar capetele grinzilor se tăiau (grinzi trapezoidale) ; ambele soluţii erau dictate în

Fig. 103

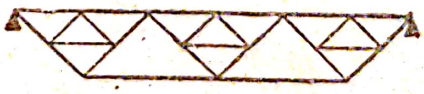


Fig. 104

vederea economisirii materialului. Ulterior (1855—1895) sistemul triunghiular a fost desvoltat, obţinându-se sistemul în K (fig. 100).

In cele ce urmează vom denumi :

Deschiderea grinzii cu zăbrele — distanţa între cele două puncte de reazim ale grinzii şi vom nota ; lungimea deschiderii cu *l*.

Panoul grinzii cu zăbrele — porţiunea grinzii încadrată între două

noduri succesive de pe o talpă; lungimea panoului măsurată pe orizontală se notează cu *d*.

Înălțimea grinzii cu zăbrele — distanța între axele tălpii superioare și a tălpii inferioare; înălțimea măsurată în mijlocul deschiderii este caracteristică și aceasta în cazul grinzilor de poduri se alege în limitele dela $^1/_6$ până la $^1/_{10}$ din deschidere, iar la ferme dela $^1/_2$ până la $^1/_6$ din deschidere în raport cu alcătuirea învelitorii.

Probleme și exerciții

14. Să se determine dacă grinzile cu zăbrele, reprezentate în fig. 105, sunt static determinate și indeformabile.

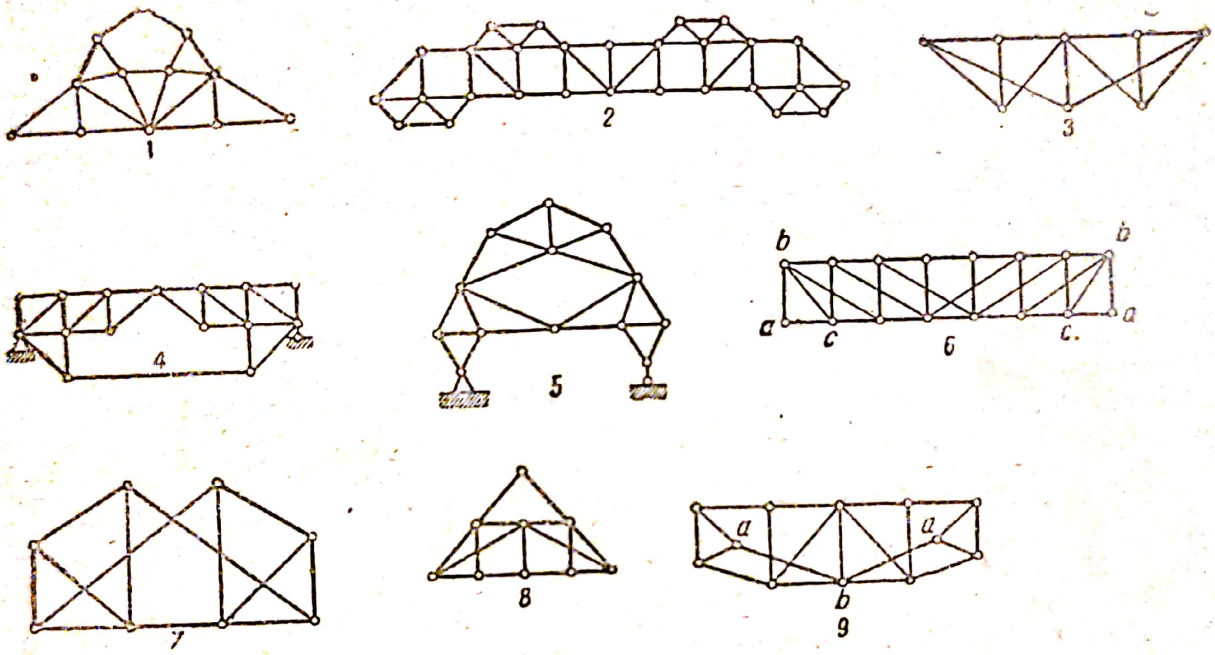


Fig. 105

15. Să se indice la care poziție a barei *ab* grinda cu zăbrele (fig. 105 g) se transformă instantaneu într'un sistem deformabil.

§ 27. Determinarea eforturilor în grinzile cu zăbrele după condițiile echilibrului static

Grinzile cu zăbrele, formând un sistem indeformabil, nu se deosebesc în ceea ce privește reazimele cu nimic de grinzile cu secțiune plină; de aceea procedeele de calcul al componentelor reacțiunilor la grinzile cu zăbrele, sunt aceleași ca și la grinzile cu secțiune plină.

Forțele interioare în grinzile cu zăbrele sunt reprezentate prin eforturile axiale din bare. Pentru a le determina trebue *să separăm o parte a grinzii* și să o analizăm din punct de vedere al echilibrului elastic, sub acțiunea sarcinilor exterioare și a eforturilor din bare.

Separarea unei părți de grindă cu zăbrele poate fi efectuată prin:

1. *secționarea grinzii în două părți*: partea din dreapta și partea din stânga (fig. 106, linia 1—1), ori prin
2. *separarea unui singur nod* (fig. 106, linia 2—2);

în cazul când procedeul din urmă este avantajos, el poate fi extins la câteva noduri. Fiecare din aceste procedee au avantajele lor, care vor fi analizate în cele ce urmează.

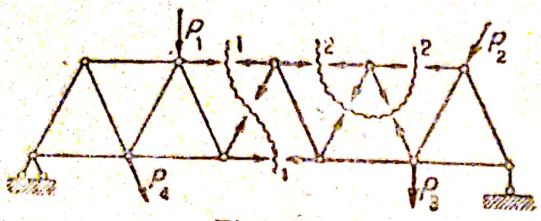


Fig. 106

Pentru alcătuirea ecuației de echilibru a părților secționate ale grinzii cu zăbrele, trebue să cunoaștem semnul efortului în bară; întru cât aceste direcții nu sunt încă cunoscute, *în mod convențional toate eforturile se consideră pozitive*, adică *de tensiune, îndreptate dela nod spre exterior* (fig. 106). Dacă la rezolvarea ulterioară a ecuației de echilibru, eforturile vor fi negative, aceasta se interpretează că sensul adoptat pentru efort trebue schimbat, adică să fie orientat spre nod.

Ecuațiile de echilibru pot fi alcătuite pentru orice parte secționată a grinzii cu zăbrele; de aceea se alege acea parte, unde forțele sunt mai puține. In general, rezolvarea unui sistem de ecuații cu multe necunoscute este destul de anevoioasă. Din această cauză este recomandabil să avem un astfel de sistem de ecuații care să cuprindă cât mai puține necunoscute. Există metode care permit să se alcătuiască o singură ecuație cu un singur efort necunoscut.

1. Metoda secțiunilor oarecare
Metoda momentelor (metoda lui Ritter)

La baza acestei metode este condiția ca momentul tuturor forțelor aflate în echilibru, în raport cu un punct ales arbitrar în plan, să fie egal cu zero.

In grinzile cu zăbrele static determinate cu sistem simplu de zăbrele, aproape întotdeauna și numai cu rare excepții, secționarea poate fi făcută în așa fel, încât să taie cel mult trei bare care să nu fie însă convergente (fig. 107). La o astfel de secționare, ecuațiile de echilibru alcătuite pentru forțele ce se găsesc la stânga sau la dreapta secțiunii, conțin trei eforturi necunoscute. Rezolvarea sistemului de trei ecuații cu trei necunoscute permite să determinăm valoarea lor. Determinarea eforturilor necunoscute poate fi mult simplificată dacă momentele vor fi luate în raport cu punctul de intersecție a două dintre barele secționate. In acest caz eforturile în aceste două bare vor intra în ecuația de echilibru cu coeficienții egali cu zero, iar ca rezultat

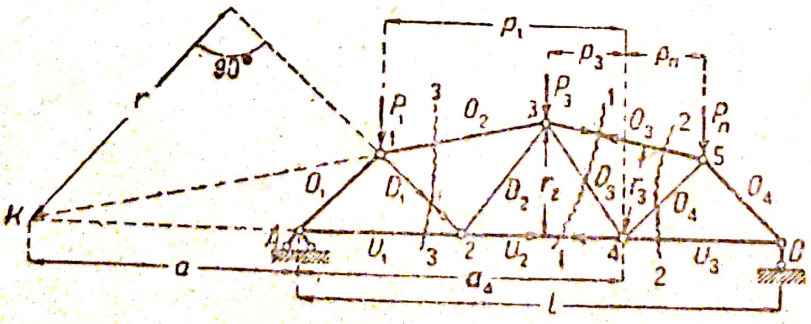


Fig. 107

vom obține o singură ecuație cu o singură necunoscută, ceea ce ne dă posibilitatea unei determinări directe a efortului din bara

a treia. Pentru lămurire, să cercetăm modul cum se determină efortul în tălpile O_3 și U_2 și în bara D_1 a grinzii reprezentate în fig. 107.

Pentru determinarea efortului în bara O_3 se pot face secțiunile 1—1 sau 2—2, care taie câte trei bare și anume: în cazul secțiunii 1—1 în afară de bara O_3 sunt tăiate și barele D_3 și U_2, care converg în nodul 4; la secționarea după 2—2, sunt tăiate barele O_3, D_4 și U_3, unde barele D_4 și U_3 au punctul lor comun tot în nodul 4; aceasta arată că pentru determinarea efortului în bara O_3 poate fi aleasă oricare din aceste două secțiuni sau 1—1, ori 2—2. Ecuația de echilibru pentru momentul tuturor forțelor aflate la stânga secțiunii în raport cu punctul de intersecție a două bare, va fi:

$$+ Aa_4 - \sum_0^3 Pp + O_3 r_3 = O$$

de unde

$$O_3 = - \frac{1}{r_3} \left(Aa_4 - \sum_0^4 Pp \right) = - \frac{M_4}{r_3} \qquad (40)$$

In această ecuație:

r_3 — este brațul de pârghie al efortului din bara O_3 în raport cu punctul față de care se consideră momentele și care se determină sau prin măsurare directă la scară sau prin calcul.

M_4 — momentul tuturor forțelor exterioare din partea din stânga în raport cu nodul 4.

$\sum_0^4$ Pp — suma momentelor forțelor aflate la stânga secțiunii.

Deoarece sub acțiunea forțelor de sus în jos, momentul porțiunii între reazimele unei grinzi așezate pe două reazime, este întotdeauna pozitiv, atunci eforturile în talpa superioară vor fi întotdeauna negative.

Pentru determinarea efortului în bara U_2 putem face secțiunea 1—1, care în afară de bara U_2 taie și barele D_3 și O_3. Acestea din urmă se intersectează în nodul 3, în raport cu care se vor lua momentele. Atunci, din condițiunile de echilibru părții din stânga, vom avea:

$$Aa_3 - \sum_1^3 Pp - U_2 r_2 = O$$

de unde

$$U_2 = + \frac{1}{r_2} \left(Aa_3 - \sum_1^3 Pp \right) = + \frac{M_3}{r_2} \qquad (41)$$

în care $\sum_1^3 Pp$ este suma momentelor forțelor ce se găsesc la stânga secțiunii.

În această ecuație notația rămâne aceeași ca și în ecuația (40). Evident că sub acțiunea forțelor de sus în jos, eforturile în talpa inferioară a unei grinzi pe două reazime, sunt întotdeauna pozitive.

Pentru determinarea eforturilor în bara D_1 se poate face numai o singură secțiune 3—3 prin barele D_1, U_1, O_2 ; tălpile U_1 și O_2 se intersectează în punctul k, aflat în afară de grindă pe prelungirea axelor acestor bare. După regula generală, acest punct de intersecție trebue considerat ca punctul la care se raportează momentele în vederea determinării efortului în bara D_1, al cărui braț de pârghie față de acest punct este r[1]).

Atunci pentru partea din stânga avem :

$$-Aa + \sum Pp_k + D_1 r = 0$$

de unde

$$D_1 = +\frac{1}{r}\left(Aa - \sum Pp_k\right) = \frac{M_k}{r} \qquad (42)$$

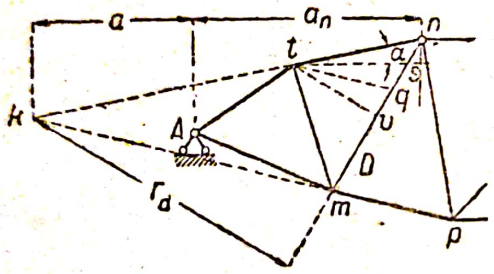


Fig. 108

Punctele în raport cu care se consideră momentele care intră în alcătuirea expresiilor eforturilor în tălpi (40) și (41), se găsesc întotdeauna între reazimele grinzilor. Pentru o astfel de poziție a punctelor, față de care se consideră momentele, semnul efortului în tălpi nu depinde de poziția sarcinilor pe grindă ; sub acțiunea sarcinilor de sus în jos talpa superioară este întotdeauna comprimată, iar cea inferioară întotdeauna întinsă (tensionată).

Din fig. 107 se vede că poziția punctelor în raport cu care se consideră momentele, față de care se determină eforturile în barele grinzii, depinde de forma grinzii cu zăbrele ; ele pot fi cuprinse în deschidere (fig. 107) sau și în exteriorul deschiderii (fig. 108). Când punctul momentelor se găsește între reazimele grinzii, semnul efortu-

---

[1]) **Notă.** Se poate întâmpla ca punctul de intersecție a tălpilor să se afle în afara limitelor epurei ; atunci poziția acestui punct și brațele de pârghie respective a și r, se determină ușor din raporturile geometrice (fig. 108).

Fie k punctul în raport cu care se consideră momentele pentru diagonala D, al cărei braț de pârghie față de acest punct este r_d . Ducem prin punctul t linia $tq \parallel mp$ și lăsăm perpendiculara tv pe direcția diagonalei, astfel ca $tv \parallel r_d$. Atunci din asemănarea triunghiurilor obținem :

$$kn : tn = nm : nq$$

și mai departe

$$r_d = tv \cdot \frac{kn}{tn} = tv \cdot \frac{nm}{nq} ,$$

$$a = kn \cos \alpha - a_n = \frac{nm}{nq} tn \cos \alpha - a_n = \frac{nm}{nq} ts - a_n ;$$

Dimensiunile cuprinse în părțile din dreapta ale egalităților de mai sus se determină ușor din dimensiunile geometrice ale grinzii cu zăbrele.

lui nu depinde de poziția sarcinilor. Dacă acest punct se găsește în afara reazimelor, semnul efortului se schimbă în raport cu poziția sarcinii: dacă se află în dreapta sau în stânga secțiunii duse pentru determinarea efortului.

Intr'adevăr, dacă sarcina este aplicată la dreapta diagonalei D_1 (fig. 107), atunci în partea din stânga va rămâne numai reacțiunea A și deci ecuația care determină efortul va fi:

$$D_1 r - Aa = O$$

de unde

$$D_1 = A\frac{a}{r}$$

Dacă presupunem că sarcina se găsește la stânga diagonalei, atunci în partea din dreapta, tăiată, a grinzii va rămâne numai reacțiunea B. Alcătuim ecuația de echilibru pentru partea din dreapta:

$$-D_1 r - B(l + a) = O$$

de unde

$$D_1 = -B\frac{(l + a)}{r}$$

In ambele cazuri valorile efortului vor fi, evident, diferite, însă faptul esențial este că în ambele cazuri semnul efortului este diferit și depinde de poziția sarcinii: la dreapta sau la stânga barei secționate.

La grinzile cu zăbrele compuse din două sau mai multe tronsoane (elemente rigide) (fig. 94), determinarea eforturilor trebue începută cu barele ce servesc pentru legarea tronsoanelor între ele, secționându-le după cum se arată în fig. 110.

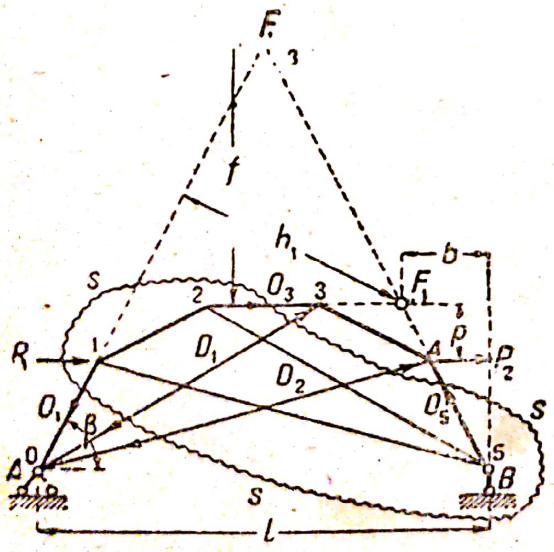


Fig. 109

Secționarea acestor bare, care nu sunt concurente, permite întotdeauna determinarea efortului în fiecare bară prin alcătuirea ecuației de momente în raport cu punctul de intersecție a celorlalte două bare.

De exemplu în grinda re-

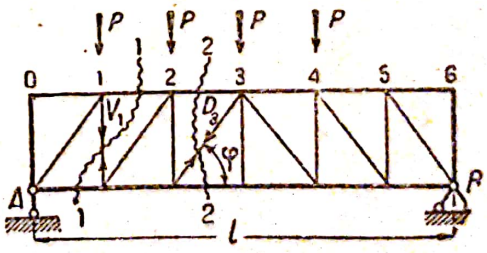


Fig. 110

prezentată în fig. 109[1]), barele O_1, O_3 și O_5 sunt tăiate prin secțiunea s-s o singură dată, iar barele D_1 și D_2 de două ori. Barele D_1 și D_2 sec-

ţionate de două ori formează în secţiune câte două forţe opuse, al căror moment total, în raport cu un punct ales arbitrar, trebue să fie egal cu zero; prin urmare, pentru alcătuirea ecuaţiei de echilibru rămân trei eforturi O_1, O_3 şi O_5, ceea ce permite formarea ecuaţiei de echilibru cu o singură necunoscută.

Intr'adevăr expresia momentelor tuturor forţelor aplicate la partea secţionată a grinzii în raport cu punctul F_3 de intersecţie a direcţiilor O_1 şi O_5, dă posibilitatea să se determine efortul O_3 din ecuaţia:

$$-O_2 f - B\frac{l}{2} - P_1(p+f) = O$$

În mod analog se poate determina şi efortul O_1 din expresia momentului în raport cu F_1, punctul de intersecţie a direcţiilor O_3 şi O_5:

$$-O_1 h_1 - Bb - P_1 p = O$$

Eforturile din celelalte bare pot fi determinate tot în acest fel sau cu ajutorul secţiunilor prin trei bare ori prin separarea nodurilor sau prin efectuarea unei secţiuni închise.

Metoda proiecţiilor. Metoda momentelor nu se poate aplica dacă două din cele trei bare secţionate sunt paralele, adică se intersectează la infinit, după cum aceasta are loc la grinzile cu zăbrele cu tălpi paralele.

In acest caz este comod să raportăm condiţiile de echilibru la o axă perpendiculară pe direcţia barelor paralele; deoarece eforturile acestor bare vor intra în ecuaţia de echilibru cu coeficienţi egali cu zero şi deci ecuaţia va conţine numai o singură necunoscută.

În cazul de faţă la grinzi cu zăbrele cu tălpi paralele (fig. 110) ca axă de proiecţie trebue considerată axa verticală şi atunci efortul montantului V_1 se determină din condiţiile de echilibru ale părţii din stânga, după secţiunea 1—1:

$$+A - \sum P - V_1 = O$$

de unde

$$V_1 = A - \sum P = Q, \qquad (43)$$

în care $\sum P$ — este suma sarcinilor ce se găsesc în stânga secţiunii. In expresia (43) direcţia forţelor exterioare este considerată verticală; dacă ele ar fi înclinate faţă de orizontală, ar fi intrat în ecuaţie proiecţia lor pe axa verticală.

Q — valoarea forţei tăietoare este ca la o grindă simplă.

Efortul din diagonala D_3, înclinată cu unghiul φ faţă de orizontală se determină din condiţiunile de echilibru ale părţii din stânga grinzii secţionate după 2—2:

$$A - \sum_1^2 P + D_3 \sin\varphi = O$$

*) Grinda cu zăbrele de acest tip a fost propusă de academicianul *V. G. Şuhov*, a se vedea tratatul „Şarpante", Moscova ediţia 1897.

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$D_3 = -\frac{1}{\sin \varphi}\left(A - \sum_1^2 P\right) = -\frac{Q}{\sin \varphi} \qquad (44)$$

Din expresiile (43) și (44) se constată că eforturile în zăbrelele unui sistem simplu variază în funcție de forța tăietoare Q a unei grinzi simplu rezemate. Din aceste formule se vede limpede influența poziției sarcinii asupra semnului efortului în zăbrele.

Pentru a explica aceasta, să presupunem că o sarcină P oarecare este aplicată mai întâi în stânga secțiunii, iar apoi în partea dreaptă a aceleiași secțiuni. Curbele forțelor tăietoare, alcătuite ca și pentru o grindă simplu rezemată, vor fi diferite pentru cele două cazuri de acționare a forței P. Diferențierea esențială constă în aceea că odată cu trecerea sarcinii peste secțiune, semnul forței tăietoare se schimbă, deci se schimbă și semnul efortului în diagonala din acest panou.

Avantajele determinării eforturilor prin metoda secțiunilor se reduc atunci când nu se poate face o secțiune care ar tăia trei bare care nu sunt concurente.

2. Metoda separării nodurilor

La izolarea unui nod dintr'o grindă cu zăbrele, problema determinării eforturilor se reduce la considerarea echilibrului forțelor exterioare și a eforturilor barelor care se întâlnesc în acest nod. Această metodă este preferabilă când eforturile necunoscute ce trec prin acest nod au numai două direcții. In acest caz fiecare efort se determină direct din ecuația proiecțiilor eforturilor pe axa perpendiculară pe cealaltă direcție.

Astfel, pentru ca să determinăm efortul în montantul V_3 (fig. 111) este mai avantajos să separăm nodul 3, unde sunt necunoscutele și anume: efortul din montantul V_3 și două eforturi din talpa U_3 și U_4; eforturile din talpă având aceeași direcție ne dau posibilitatea să alcătuim următoarea ecuație în raport cu o axă normală pe direcția tălpilor:

$$+ V_3 - P = O;$$

de unde

$$V_3 = P \qquad (45)$$

La determinarea efortului în montantul V_2 pentru alcătuirea ecuației se pretează mai bine nodul superior 2, totuși în el se întâlnesc trei eforturi necunoscute O_2, O_3 și V_2 având trei direcții diferite, ceea ce nu permite formarea unei ecuații cu o singură necunoscută. În acest caz poate fi luată ca axă de proiecție chiar axa montantului, ceea ce permite să se alcătuiască următoarea ecuație:

$$- V_2 - O_2 \sin \beta_2 + O_2 \sin \beta_3 - P = O$$

In această ecuație efortul montantului este exprimat în funcție de cele două eforturi ale elementelor tălpii, iar fiecare dintre aceste efor-

turi poate fi determinat din expresia momentelor în raport cu nodul 2

$$O_2 = \frac{-M_2}{h_2 \cos \beta_2} \text{ și } O_3 = \frac{-M_2}{h_2 \cos \beta_3}$$

în care h_2 — este înălțimea montantului din nodul 2.

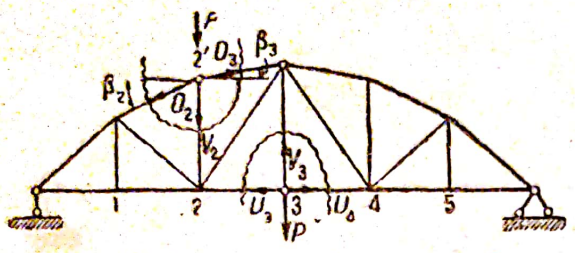


Fig. 111

Substituind în ecuația de mai sus aceste valori ale eforturilor din talpă, obținem expresia efortului din montant și anume:

$$V_2 = -P + \frac{M_2}{h_2}(\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \beta_3) \quad (46)$$

exprimată în funcție de un singur moment.

În acest fel, metoda separării nodurilor se reduce la alegerea unui nod care să conțină un număr minim de eforturi necunoscute, dacă este posibil, nu mai mult de două.

Aceste condiții vor permite alcătuirea unei ecuații de echilibru cu o singură necunoscută în raport cu axa perpendiculară pe direcția celui-lalt efort.

Probleme și exerciții

16. Pe grinda cu zăbrele din fig. 112 este aplicată forța P, înclinată cu unghiul α față de orizontală ; să se arate la ce înclinare a forței față de orizontală efortul în bara ab va fi egal cu zero.

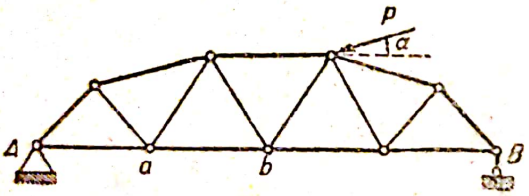


Fig. 112

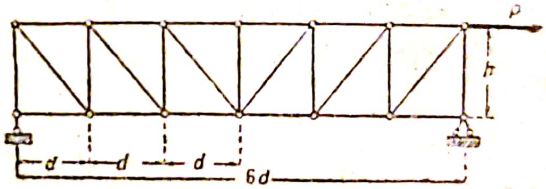


Fig. 113

Indicație. Trebue să avem în vedere condiția din care se determină efortul în bara ab, apoi direcția ce trebue să aibă rezultanta forțelor aplicate în stânga secțiunii, pentru ca efortul în bară să fie egal cu zero.

17. Să se arate cum variază eforturile în barele tălpilor și ale diagonalelor unei grinzi cu zăbrele, încărcată cu sarcina P (fig. 113).

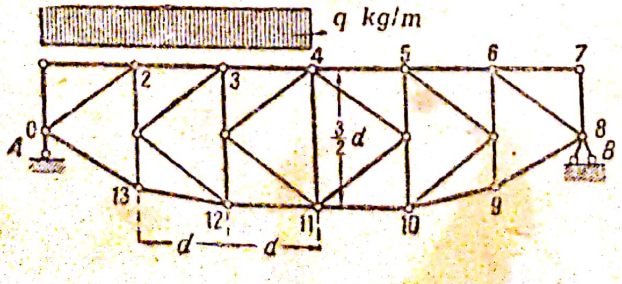


Fig. 114

Indicație. Deoarece înălțimea și unghiul de înclinare al diagonale-lor sunt constante pe toată lungi-mea grinzii, răspunsul se obține din analizarea curbelor momentelor și a forțelor tăietoare construite pentru sarcina dată P ca și pentru o grin-dă simplu rezemată de aceeași des-chidere.

18. Să se determine expresiile eforturilor în panourile din stânga

ale unei grinzi cu diagonale în K (fig. 114) încărcată pe jumătatea deschiderii cu o sarcină continuă uniform repartizată.

Indicaţii. Pentru determinarea eforturilor în barele din talpa grinzii în K, trebue ca secţiunea care trece prin bara considerată, să nu fie dusă pe verticală, ci prin montant, secţionându-l de două ori.

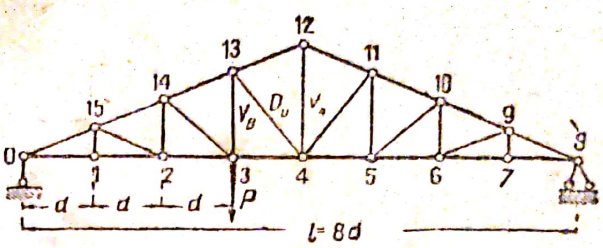


Fig. 115

Spre a determina efortul în diagonale, trebue să folosim două ecuaţii de echilibru, alcătuite prin secţionarea pe verticală a panoului şi din separarea nodului dela mijloc.

Pentru determinarea efortului în montanţi, trebue să separăm nodurile corespunzătoare ale grinzii şi să utilizăm eforturile din diagonale, stabilite în prealabil.

19. Folosind metoda separării nodurilor, să se determine care din barele grinzii reprezentate în fig. 115 lucrează şi care nu lucrează. Să se explice de ce o serie de bare formând zăbrelele, nu lucrează sub acţiunea unei sarcini date.

20. Să se determine eforturile în grinda cu zăbrele (fig. 116) sub acţiunea sarcinii indicate.

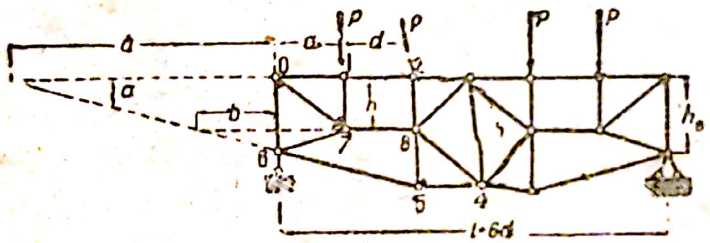


Fig. 116

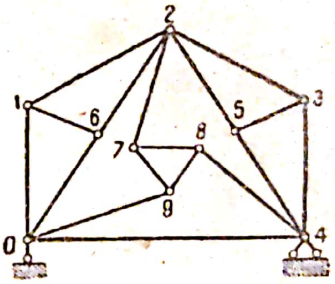


Fig. 117

Indicaţie. Determinarea eforturilor din condiţiunile de formare a grinzilor cu zăbrele, trebue începută cu determinarea eforturilor în barele de legătură între elementele rigide; urmează apoi determinarea celorlalte eforturi, introducând (acolo unde este necesar) eforturile acestor bare în ecuaţiile de echilibru.

21. Să se stabilească ce noduri trebuesc încărcate într'o grindă cu zăbrele (fig. 117) pentru ca să lucreze barele triunghiului din interior.

Indicaţii. Trebue să presupunem că orice nod al perimetrului exterior este încărcat cu sarcina P şi să stabilim valoarea eforturilor în barele triunghiului interior. La determinarea eforturilor în triunghiul interior trebue să ne folosim de indicaţiile generale din acest paragraf, relative la grinzile cu zăbrele alcătuite din elemente separate legate între ele cu trei bare.

§ 28. Metode grafice pentru determinarea eforturilor

Metodele grafice pentru determinarea eforturilor se bazează pe regulile cunoscute din statica grafică şi anume, că orice forţă poate fi descompusă după două direcţii alese arbitrar care se intersectează cu ea într'un singur punct şi după trei direcţii arbitrare care nu sunt concurente.

1. Secționând trei bare ale unei grinzi simple cu zăbrele, putem considera echilibrul părții din stânga sau din dreapta a grinzii sub acțiunea rezultantei R a forțelor exterioare aplicate la această parte și a trei eforturi interioare ale barelor secționate. Deoarece fiecare parte se găsește în echilibru, urmează că rezultanta R și cele trei eforturi din bare trebue să formeze un poligon de forțe închis.

După metoda lui Culmann, valoarea rezultantei se determină din poligonul forțelor (fig. 118 c)

$$R = A - P_1,$$

iar poziția ei este indicată prin punctul k, care este intersecția laturilor extreme pentru această secțiune a poligonului funicular (fig. 118 b).

Astfel în partea din stânga a secțiunii grinzii, avem patru forțe care se echilibrează reciproc: R, U_3, O_2 și D_3. Fiecare pereche de aceste forțe, de exemplu forțele R și U_3 dau o rezultantă care — după condițiile de echilibru — este egală și opusă ca direcție rezultantei celeilalte perechi de forțe O_2 și D_3. Sensul acestor rezultante se fixează de punctele T

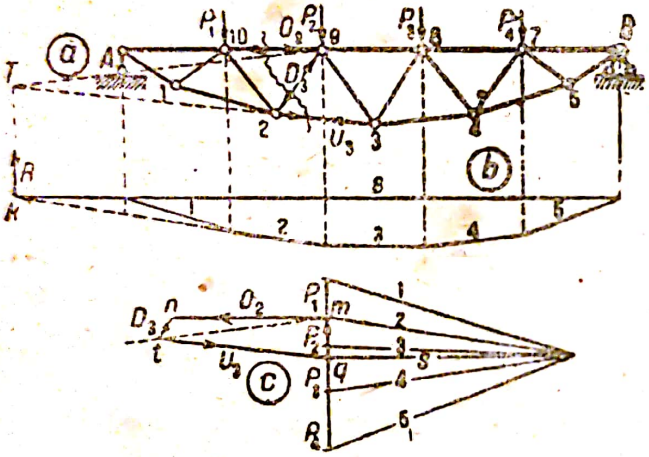


Fig. 118

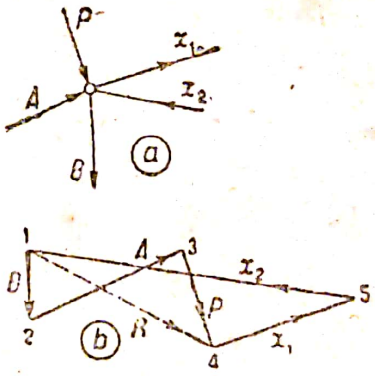


Fig. 119

și 9 care sunt intersecțiile acestor forțe (fig. 118 a). Cunoscând direcția rezultantei $\overline{T - 9}$, putem descompune forța R în trei componente prin următoarea construcție. In poligonul forțelor *prin segmentul* $\overline{mq}$ se determină valoarea forței R. Ducem liniile $\overline{t - m} \parallel \overline{T - 9}$ și $\overline{q - t} \parallel \overline{T - 3}$, determinând astfel rezultanta forțelor R și U_3. După ce am trasat dreptele $\overline{t - n} \parallel \overline{D_3}$ și $\overline{m - n} \parallel \overline{O_2}$ descompunem segmentul $\overline{m - t}$ după direcția forțelor O_2 și D_3; conturul $m\ q\ t\ n$ este poligonul forțelor R, U_3, O_2 și D_3.

Din condițiile de închidere a patrulaterului $m\ q\ t\ n$ se determină semnul eforturilor în barele O_2, D_3 și U_3, care în barele O_2 și D_3 este negativ, iar în U_2 — pozitiv.

Această construcție este avantajoasă în cazul când într'o parte a secțiunii nu există sarcină; în acest caz rezultanta este reacțiunea de pe reazim al cărei punct de aplicație este cunoscut.

Desavantajele acestei metode sunt intersecțiile îndepărtate ale laturilor poligonului funicular, care uneori ies din limitele epurei.

Pentru înlăturarea acestui desavantaj, Zimmermann a propus ca în loc de rezultanta generală R, să se utilizeze componentele ei paralele, aplicate în nodurile grinzii cele mai apropiate de secţiune.

Trebue însă menţionat că, ambele metode de construcţie grafică nu se mai folosesc în tehnica modernă, astfel încât prezintă mai mult un interes istoric, de aceea nu le vom trata mai detaliat.[1])

2. La separarea nodului vom lucra cu un grup de forţe ce se întâlnesc în acest nod şi se găsesc în echilibru; în consecinţă aceste forţe trebue să formeze un poligon închis.

Dacă în nodul astfel separat se cunosc toate forţele exterioare şi eforturile afară de două, atunci valoarea acestor necunoscute poate fi determinată prin construirea poligonului forţelor (fig. 119), descompunând rezultanta R a forţelor exterioare şi a eforturilor cunoscute (A, B şi P) după două direcţii x_1 şi x_2.

Prin descompunerea succesivă a nodurilor, pentru fiecare dintre ele se poate găsi poligonul respectiv.

Cremona a propus un procedeu special pentru construcţia tuturor acestor poligoane, concentrându-le într'o singură figură generală, în care fiecare forţă exterioară şi fiecare efort figurează numai o singură dată. Această figură este cunoscută sub denumirea de *epura sau diagrama Cremona.*[2])

Metoda Cremona merită o deosebită atenţie, întru cât ne oferă un tablou complet al distribuirii eforturilor în toate barele grinzii faţă de încărcarea dată şi asigură posibilităţile unui control automat.

§ 29. Epura lui Cremona

Presupunem că se cere să construim epura lui Cremona pentru grinda cu zăbrele reprezentată în fig. 120, solicitată de sarcinile indicate.

Mai întâi grinda trebue să fie eliberată de legăturile de pe reazime, acestea urmând să fie înlocuite de reacţiunile respective, a căror valoare se determină analitic sau grafic. In exemplul nostru se presupune că aceste reacţiuni sunt cunoscute şi intră în datele epurei.

Pentru uşurinţă, introducem în construcţie *notarea suprafeţelor formate de elementele grinzii cu zăbrele şi de sarcinile care o solicită.*

In acest scop punem câte o literă sau o cifră între două forţe vecine, aplicate pe conturul grinzii, precum şi în interiorul figurilor închise prin barele grinzii.

Literele sau cifrele aşezate între forţele exterioare aplicate pe contur indică spaţiul exterior al grinzii cu zăbrele, iar cele din interiorul figurilor închise notează spaţiile interioare.

Notă:

[1]) Expunerea acestor metode se găseşte în cursurile: *Proscureacov L. D.* "Mecanica Construcţiilor" p. 2-a şi prof. *Timoshenko S. P.* „Statica Construcţiilor" p. I-a etc.

[2]) De fapt această metodă a fost indicată de către Maxwell, iar Cremona numai a prelucrat-o detaliat.

Cu această notare, fiecare bară a grinzii și fiecare forță aplicată pe grindă este determinată prin două litere sau cifre în raport cu spațiile între care ele se află. De exemplu, barele (fig. 120 a) se vor nota cu *a-h*, *h-b*, *n-e* etc., iar forțele cu *ag*, *gf* etc.

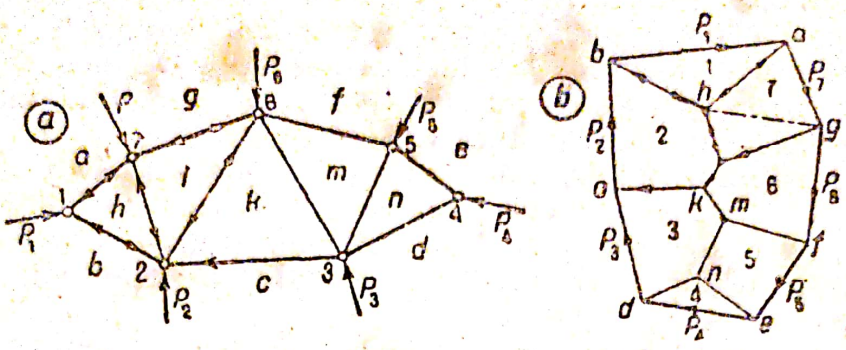


Fig. 120

Deoarece la separarea fiecărui nod se poate descompune rezultanta numai după două direcții, *descompunerea trebue începută cu nodurile alcătuite numai din două bare.*

In exemplul de față, descompunerea poate fi începută cu nodul 1 sau 4.

In nodul 1 se cunoaște forța P_1 și cele două direcții *h-b* și *a-h* ale eforturilor necunoscute din bare; eforturile acestor bare se determină prin construirea triunghiului de forțe *b a h* (fig. 120 b) în care *direcția forței P trebue să fie păstrată, iar alăturarea eforturilor interioare trebue să se facă într'o anumită ordine,* adică alăturarea efortului din bara *h-b* la forța *P* urmează să se facă în punctul *b*; alăturarea efortului din bara *a-h* la efortul din bara *h-b* trebue să se producă în punctul *h*, iar aceea a efortului din bara *a-h* la forța P_1, în punctul final *a* al forței; această ordine corespunde așezării pe epură a literelor *b*, *a* și *h*.

Semnul efortului se determină de închiderea succesivă a poligonului, care este începută și determinată de direcția forței exterioare P_1 și se continuă apoi pe direcțiile *a-h* și *h-b*; *repurtarea sensului obținut pentru efort în planul grinzii cu zăbrele va arăta semnul care corespunde acestor eforturi.* În cazul nostru ambele eforturi necunoscute *a-h* și *h-b* sunt îndreptate către nodul 1, adică produc compresiune, prin urmare eforturile în aceste bare sunt eforturi de compresiune.

După ce s'a determinat efortul din bara *h-a*, se poate trece la descompunerea nodului 7, unde sunt numai două eforturi necunoscute în barele *g-i* și *i-h*. Păstrând poziția efortului *h-a* de pe epură, îi adăugăm în punctul *a* forța exterioară P_7, ceea ce corespunde cu ordinea de alăturare succesivă stabilită mai sus; rezultanta efortului *h-a* și a forței P_7, determinată de diagonala *h-g*, o descompunem după două direcții *g-i* și *i-h* ale eforturilor necunoscute, ducând din punctul *g* o dreaptă paralelă cu bara *g-i* și din punctul *h* o paralelă cu bara *i-h*, care se vor închide în punctul *i*. Semnele se vor stabili după închiderea ulterioară a patrulaterului forțelor *h a g i*, pornind dela sensul cunoscut al efortului *h-a*.

Scanned with OKEN Scanner

Forța P_7 și eforturile ce se determină g-i și i-h, care în ordinea închiderii vor avea sensul către nodul 7, vor produce compresiune.

Cunoscând eforturile din barele b-h și h-i putem trece la descompunerea nodului 2, unde eforturile din barele i-k și k-c sunt necunoscute. Păstrând poziția eforturilor b-h și h-i în poligonul forțelor construit, adăugăm la el în punctul b forța P_2, ceea ce corespunde ordinei stabilite și descompunem rezultanta acestor forțe c-i după cele două direcții ale barelor i-k și k-c, prima ducând-o prin punctul i, iar a doua prin punctul c; la intersecția lor obținem punctul k, care va închide noul poligon $c\,b\,h\,i\,k$. Direcția eforturilor în barele i-k și k-c se determină prin închiderea poligonului forțelor.

Executând în continuare construcții asemănătoare, obținem la descompunerea nodului 6 poligonul forțelor $k\,i\,g\,f\,m\,k$; la descompunerea nodului 3 — poligonul $d\,c\,k\,m\,n\,d$, la aceea a nodului 5 — poligonul $n\,m\,f\,e\,n$.

Prin construcția acestui ultim poligon se sfârșește determinarea eforturilor în toate barele grinzii. Rămâne necercetat numai nodul 4, care, prin forța sa exterioară P_4, trebue să echilibreze eforturile barelor n-e și d-n; *această închidere a poligonului de forțe $d\,n\,e$ este posibilă numai atunci când forța de închidere c-d este egală și paralelă cu forța* P_4; dacă la construcție poligonul nu se închide, aceasta indică ori lipsa de echilibru a forțelor exterioare sau o eroare de construcție a epurei.

In aceasta constă controlul automat la construirea epurei lui Cremona.

Analizând planul grinzii cu zăbrele și diagrama eforturilor, putem releva următoarele proprietăți caracteristice:

1. Toate forțele exterioare aplicate la grindă formează în epură un poligon închis, ceea ce corespunde cu starea de echilibru a grinzii sub acțiunea forțelor exterioare; *ordinea lor de așezare în poligonul forțelor urmărește strict succesiunea așezării lor pe grinda cu zăbrele.*

2. Toate eforturile interioare ce se întâlnesc într'un singur nod formează un poligon închis, în care *aceste forțe se așază în ordinea închiderii continue, corespunzătoare cu ordinea lor de așezare în jurul nodului*, sensul efortului schimbându-se la trecerea dela un nod la altul. Reportarea acestor sensuri în planul grinzii cu zăbrele determină sensul efortului; dacă săgeata este îndreptată către nod, atunci efortul va fi de compresiune, dacă este îndreptată dela nod, avem un efort de tensiune.

3. Fiecărui nod al grinzii îi corespunde în epură câte un poligon al forțelor, iar fiecărui spațiu al grinzii, inclusiv spațiile exterioare între forțe, îi corespunde câte un nod al eforturilor în barele ce înconjoară acest spațiu. *Această reciprocitate între planul grinzii cu zăbrele și epură* permite să se utilizeze cu mare folos notările de spații.

Introducând notarea forțelor și a barelor grinzii după nomenclatura spațiilor cu două litere sau două cifre, vom obține pe epură vectori însemnați cu aceleași litere sau cifre, așezate la extremitățile eforturilor în nodurile din epură. De exemplu, bara grinzii cu zăbrele între nodurile 1 și 2 se va denumi bh și efortul din epură, care corespunde acestei bare, se va determina prin segmentul b-h.

Această notare a barelor cu ajutorul spațiilor ușurează construcția epurei, deoarece stabilește din care noduri sau din care puncte ale

epurei trebue să pornească efortul barei ce se găseşte între spaţiile respective.

La construirea epurei eforturilor după metoda lui Cremona, trebue să avem în vedere în special ordinea de aşezare a forţelor exterioare în poligonul de forţe şi ordinea de construire a eforturilor la descompunerea lor în noduri; atât în primul cât şi în al doilea caz, această construcţie trebue să se execute în mod succesiv, în acelaşi sens, după conturul grinzii cu zăbrele şi în jurul nodului; se recomandă să se facă aceasta în sensul mersului acelor unui ceasornic.

§ 30. Cazuri particulare ale epurei lui Cremona

I. Pot fi cazuri când construcţia epurei nu este posibilă din cauza lipsei de noduri alcătuite numai din două bare (fig. 109) sau din cauza imposibilităţii descompunerii succesive trecând la nodurile care au câte trei eforturi necunoscute (fig. 121, nodurile 3, 7, 16' şi 16). In astfel de cazuri, epura se poate construi, numai dacă unele bare în noduri se vor înlocui cu eforturile lor, a căror valoare se determină separat grafic sau analitic.

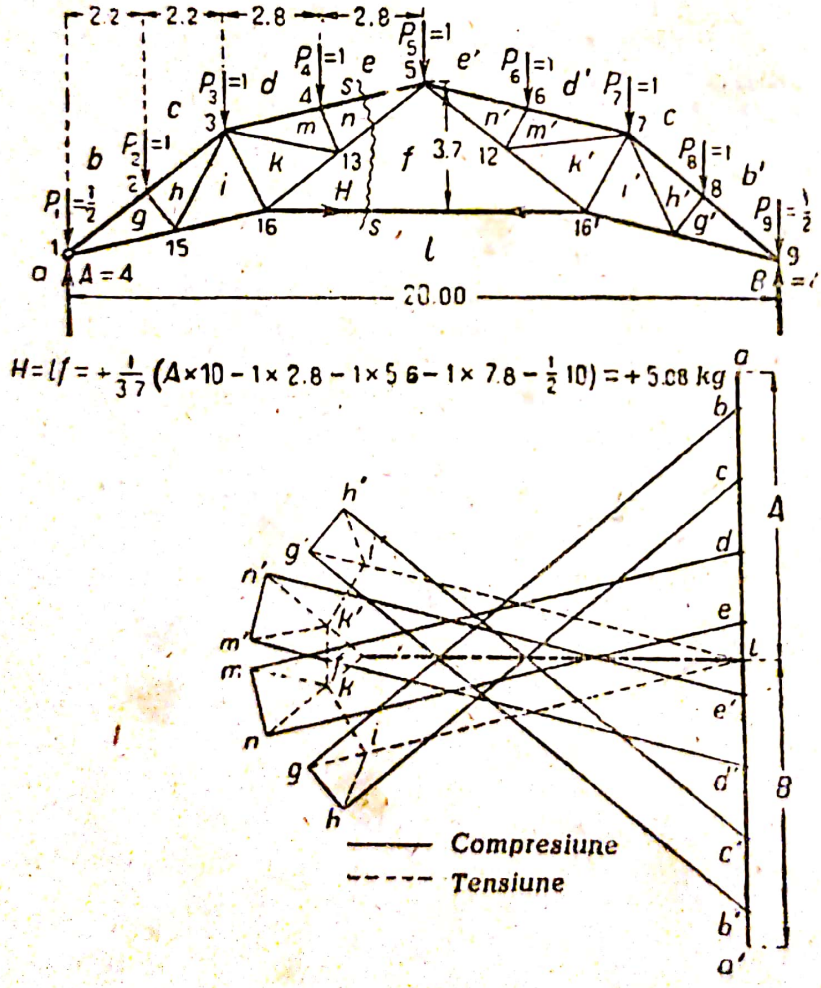


Fig. 121

Astfel, în grinda înfăţişată în fig. 109, construcţia epurei devine posibilă dacă se vor cunoaşte eforturile în barele *A — 1, B — 4;* în ferma reprezentată în fig. 121, construcţia se va putea face, dacă se va cunoaşte efortul din bara *f-l*.

Determinarea valorii efortului barei în cazul de faţă poate fi făcută printr'un procedeu mai comod.

De exemplu, în ferma din fig. 121, efortul din bara *f-l* se determină mai uşor prin metoda momentelor; ducând secţiunea *s-s* şi luând momentul în raport cu nodul 5, obţinem efortul:

$$lf = + \frac{1}{3,7}\left[4 \cdot 10 - 1 \cdot 2,8 - 1 \cdot 5,6 - 1 \cdot 7,8 - \frac{1}{2}\,10\right] = + 5,08 \text{ kg}$$

Acest efort poate fi considerat ca două forțe exterioare aplicate în nodurile de înclinare 16 și 16′ ale barei $f - l$; acest efort trebue să fie introdus în poligonul forțelor în ordinea parcurgerii perimetrului grinzii cu zăbrele; după așezarea forței B reprezentată prin segmentul $a' - l$, trebue să punem după direcția axei barei $l - f$, mai întâi în stânga și apoi în dreapta, aceeași forță $f - l$ după aceeași direcție cunoscută la scara forțelor. După aceasta, construcția epurei devine posibilă și se efectuează în ordinea normală, începând de exemplu cu nodul 1 și trecând succesiv la nodurile 2, 15 și 16, unde eforturile necunoscute vor fi eforturile din două bare i-k și k-f, urmând apoi nodurile 3, 13 etc.

Trebue să observăm că pentru determinarea analitică a eforturilor este mai ușor să alegem barele care intră în conturul fermei, deoarece acest efort se poate introduce mai lesne în poligonul forțelor din epură, care se construește în ordinea așezării forțelor pe conturul fermei.

II. Pot fi cazuri când construirea epurei lui Cremona nu se poate executa pe calea obișnuită, deoarece forțele exterioare sunt aplicate în nodurile interioare ale grinzii cu zăbrele (fig. 122), în loc să fie aplicate în nodurile de pe conturul exterior.

In acest caz construirea epurei se face cu ajutorul următorului artificiu.

Forța exterioară aplicată la un nod interior se deplasează pe direcția ei până la conturul grinzii. Această direcție a forței se consideră ca o bară a grinzii cu zăbrele, iar punctul ei de intersecție cu conturul grinzii se consideră drept nod. In acest mod, forța este reprezentată ca fiind aplicată pe conturul exterior al grinzii, iar efortul barei suplimentare este egal cu forța. După aceasta, se poate construi epura după regula generală.

In fig. 122 se vede construcția epurei lui Cremona pentru o grindă în care forțele exterioare sunt aplicate în nodurile 2, 11, 12, 6, 8 și 10, din care 11 și 12 sunt noduri interioare.

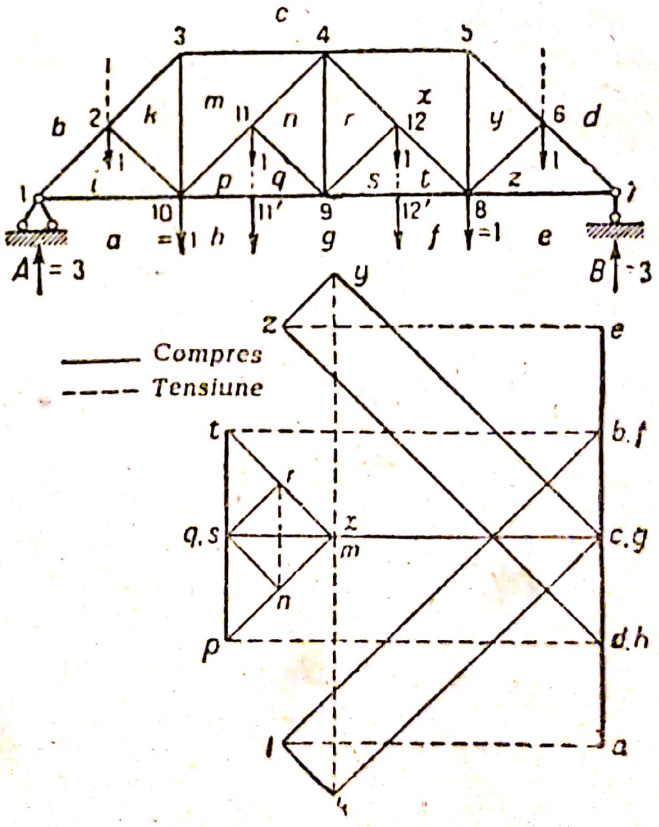


Fig. 122′

Deoarece încărcarea este simetrică, reacțiunile vor fi egale:

$$A = B = 3$$

Considerăm forţele exterioare din nodurile 2 şi 6 aplicate pe conturul exterior; deplasăm forţele din nodurile 11 şi 12 pe direcţia lor până la talpa inferioară în nodurile virtuale 11′ şi 12′, introducând astfel şi barele virtuale p—q şi s—t şi tăiem în două barele *10*—*9* şi *9*—*8*.

În această ipoteză, construirea poligonului forţelor nu întâmpină nicio dificultate. Construcţia lui se începe cu nodul 1 trecând succesiv la nodurile 2, 3 şi 10. În nodul 11′ se face descompunerea forţei deplasate g—h după direcţiile h—p, p—q şi q—g, astfel, *în epură în loc de un singur efort după direcţia barei vom obţine două segmente* p—h *şi* q—g, *adică este cazul de repetare a aceluiaşi efort.*

Segmentul q—p reprezintă efortul barei virtuale sau valoarea forţei aplicate în nodul 11.

Acelaşi lucru se va întâmpla şi la descompunerea eforturilor în nodul 12′ unde va avea loc repetarea efortului 9—8 în două segmente t—f şi v—g, iar cu segmentul s—t se va determina forţa exterioară din nodul 12.

Grinda cu zăbrele examinată are un sistem complex de zăbrele, astfel încât construirea continuă a epurei lui Cremona se va opri la nodurile 4 şi 9. Continuarea construcţiei se poate face numai după determinarea pe cale analitică a efortului uneia din bare sau printr'o construcţie simetrică, începută dela celălalt capăt B al grinzii, care la apropierea de nodurile 9 şi 4 va da drept cunoscute valorile eforturilor din barele s—r şi r—x, permiţând astfel închiderea poligonului.

Probleme şi exerciţii

22. Să se construiască epura lui Cremona pentru grinda Poiret, reprezentată în fig. 123, ce se găseşte sub presiunea apei.

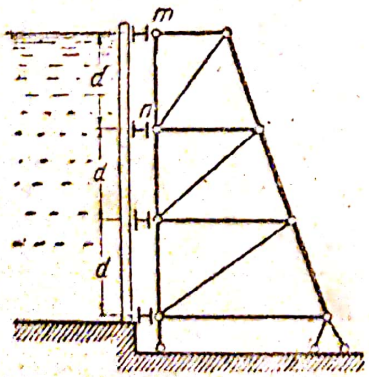


Fig. 123

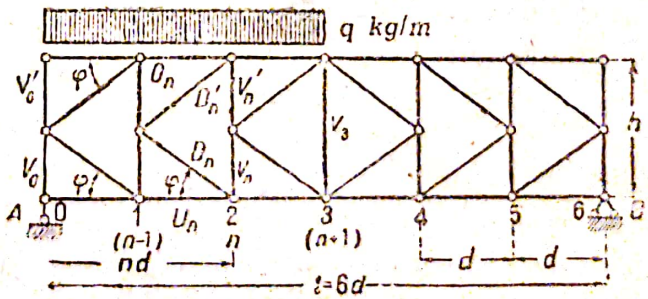


Fig. 124

Indicaţie. Această epură se construeşte uşor dacă începem cu nodul final m. Efortul în bara m—n este egal cu zero, de aceea în epură acest efort este reprezentat printr'un punct.

Scanned with OKEN Scanner

23. Să se construiască epura lui Cremona pentru grinda cu diagonale în K, reprezentată în fig. 124.

Indicație. Construcția epurei începută dela un capăt al grinzii va întâmpina un obstacol la nodurile 3 și 3'. Aceste obstacole pot fi înlăturate prin construirea epurei, și dela celălalt capăt al grinzii până la joncțiunea ei cu prima parte.

24. Să se construiască epura lui Cremona pentru ferma reprezentată în fig. 125.

Indicație. În această grindă cu zăbrele nu există noduri duble. Pentru ca să începem construcția trebue să avem în vedere modul cum lucrează bara $m—n$, urmând ca la construcțiile ulterioare să recurgem la determinarea auxiliară, pe cale analitică, a efortului în una din bare.

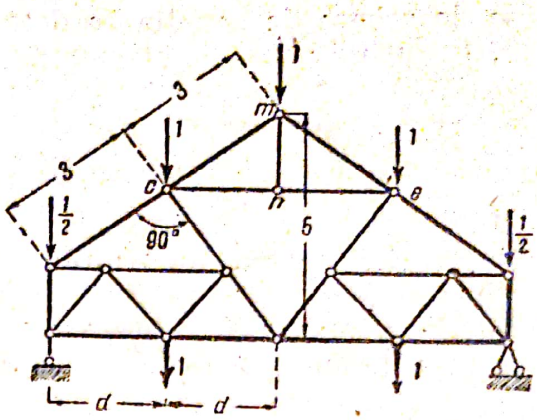


Fig. 125

§ 31. Construcția liniilor de influență prin secționarea grinzilor cu zăbrele

Construcția liniilor de influență, pentru eforturile din barele grinzilor cu zăbrele, se face pe baza expresiilor analitice ale eforturilor din aceste bare.

In grinzile cu zăbrele, liniile de influență pentru eforturile din tălpi se deosebesc de cele ale eforturilor din zăbrele.

Liniile de influență ale barelor din tălpi

Pentru a stabili ecuațiile liniilor de influență ale eforturilor în tălpi se utilizează în mod obișnuit metoda secționării grinzii cu zăbrele, alcătuind două ecuații pentru cazurile când sarcina unitară este aplicată la dreapta sau la stânga secțiunii.

Aplicând sarcina în dreapta secțiunii, forma generală a expresiei ce se obține din condițiile de echilibru ale părții din stânga, va fi:

$$\text{Efortul} = \pm \frac{A \cdot a}{\textit{brațul de pârghie al efortului}} \qquad (47)$$

iar în cazul când sarcina este aplicată în stânga secțiunii, expresia generală a efortului ce se obține din condițiile de echilibru ale părții din dreapta va fi:

$$\text{Efortul} = \pm \frac{B \cdot (l - a)}{\textit{brațul de pârghie al efortului}}; \qquad (48)$$

în aceste expresii a este distanța dela reazimul A până la punctul în raport cu care se iau momentele.

Semnele ambelor expresii sunt respectiv identice.

Făcând o comparație, putem să ne convingem că ecuațiile obținute pentru liniile de influență ale eforturilor din barele grinzii cu zăbrele

Scanned with OKEN Scanner

se deosebesc de ecuația ce determină linia de influență a momentului într'o grindă simplu rezemată (7) numai prin factorul:

$$\frac{1}{\textit{brațul de pârghie al efortului}}$$

Prin urmare, toate proprietățile stabilite pentru linia de influență a momentelor se mențin și pentru linia de influență a efortului în tălpile grinzilor cu zăbrele, procedeul de construcție rămânând astfel același, numai cu modificarea scării ordonatelor cu raportul:

$$\frac{1}{\textit{brațul de pârghie al efortului}}$$

De exemplu, linia de influență a efortului din bara O_3 (fig. 126) poate fi construită din condiția de echilibru în raport cu secțiunea s-s. Aplicând sarcina unitară la dreapta secțiunii, obținem — din condițiile de echilibru ale părții din stânga — ecuația liniei din dreapta liniei de influență:

$$O_3 h_9 + A \cdot a_9 = 0$$

de unde

$$O_3 = - A \frac{a_9}{h_9}$$

Astfel, poziția liniei din dreapta se determină prin așezarea pe reazimul din stânga a ordonatei $- \frac{a_9}{h_9}$, iar pe reazimul din dreapta ordonata este egală cu zero; poziția liniei din stânga, după proprietățile liniei de influență a momentelor, se determină prin valoarea zero în dreptul reazimului din stânga, iar în dreptul punctului momentelor, prin punctul c_9, format de intersecția liniei din dreapta cu verticala.

Linia de influență a efortului din bara U_2 se determină din condițiile de echilibru ale tronsoanelor grinzii cu zăbrele secționate tot prin s-s. La aplicarea sarcinii unitare la dreapta secțiunii, ecuația liniei din dreapta, care formează linia de influență, va fi:

$$U_2 = + A \frac{a_3}{h_3}$$

In fig. 126 este arătată construcția acestei drepte prin așezarea în dreptul reazimului din stânga a ordonatei egale cu a_3 / h_3; poziția liniei din stânga se determină prin punctele a și c_3; între nodurile 8 și 9 linia de influență variază liniar.

Din aceste exemple de construcție putem remarca următoarele proprietăți ale liniilor de influență ale barelor din tălpi:

1) Deoarece eforturile tălpii se determină din ecuațiile mo-

Scanned with OKEN Scanner

mentelor în raport cu nodurile grinzii cu zăbrele, care se găsesc întotdeauna între punctele de reazim, semnul efortului și al liniei de influență rămâne același pe toată lungimea unei grinzi cu zăbrele pe două reazime.

2) Dacă punctul momentelor coincide cu nodurile încărcate, linia de influență a barelor din tălpi va avea o formă triunghiulară (fig. 126,O_3); dacă această coincidență nu există, atunci linia va avea forma unui patrulater (fig. 126,U_2).

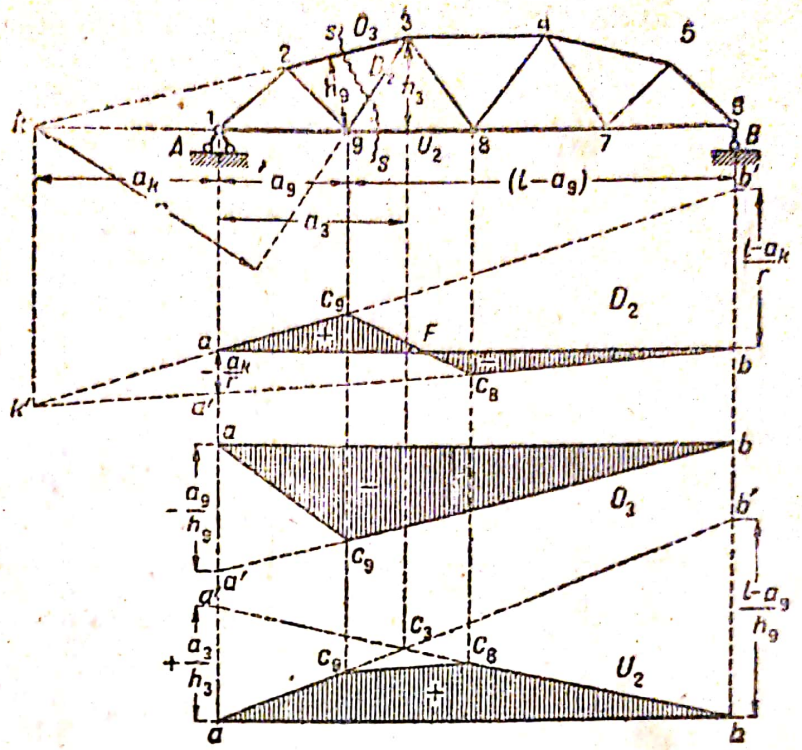


Fig. 126

Liniile de influență ale zăbrelelor

La grinzile cu zăbrele, având tălpi poligonale sau curbe, la care se poate obține punctul de intersecție al barelor tălpilor secționate, ecuația liniilor de influență pentru eforturile din zăbrele se alcătuește cu ajutorul punctului momentelor, care în acest caz se consideră punctul de intersecție al celor două tălpi. Dacă tălpile secționate sunt paralele, acest punct de intersecție se află la infinit; în acest caz, pentru a deduce ecuația liniei de influență se folosește metoda proiecțiilor. Pentru o grindă cu zăbrele cu talpa superioară poligonală (fig. 126), efortul în bara D_2 se determină prin secționarea grinzii după s-s, considerând ca punct al momentelor, punctul de întâlnire al barelor 2—3 și 9—8.

La aplicarea sarcinii unitare în dreapta secțiunii, linia de influență pentru porțiunea din dreapta se determină prin ecuația:

$$D_2 = -A\frac{a_k}{r}.$$

La aplicarea sarcinii unitare în stânga secțiunii, ecuația liniei pentru partea din stânga se determină din condițiile de echilibru ale tronsonului din dreapta al grinzii cu zăbrele:

$$-B(l-a_k)+D_2 r=0$$

de unde

$$D_2 = +B\frac{(l+a_k)}{r}$$

Semnele în ambele ecuații ale liniei din dreapta și din stânga sunt diferite.

Poziția liniei din dreapta $a'b$ se determină de ordonata în dreptul reazimului din stânga egală cu $-\frac{a_k}{r}$ și egală cu zero la reazimul din dreapta; poziția liniei din stânga, având în vedere proprietatea, generală, se determină având valoarea zero la reazimul din stânga și punctul k' de intersecție a liniei din dreapta cu verticala coborîtă din punctul momentelor (dreapta $k'ab'$).

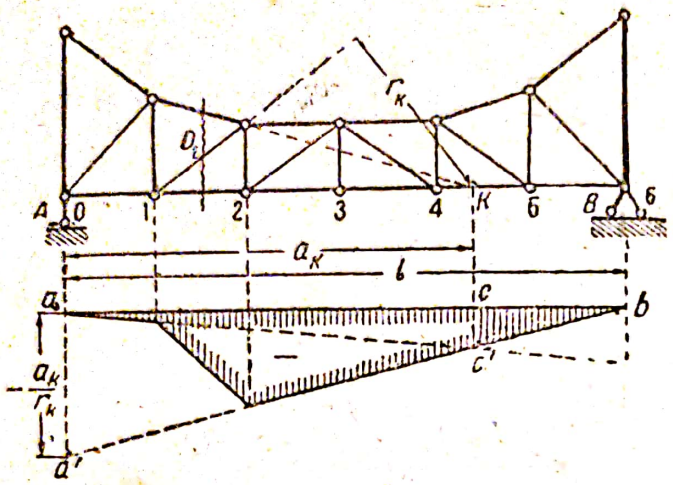


Fig. 127

Prelungind linia din dreapta până la ultimul nod din partea din dreapta 8 care se poate încărca, iar linia din stânga până la nodul din stânga 9 și ducând dreapta $C_8\,C_9$ obținem linia de influență a efortului în diagonală, reprezentată prin două triunghiuri ac_9F și Fc_8b, având semne diferite.

Din această construcție se vede că poziția liniilor din dreapta, respectiv din stânga, care limitează suprafața liniei de influență, precum și semnul liniei de influență, depind foarte mult de poziția punctului momentelor. Poziția acestui punct depinde de conturul grinzii cu zăbrele: el poate să se găsească atât în afară de reazime cât și pe deschidere; în ultimul caz — după proprietățile generale ale liniilor de influență ale momentelor — linia de influență trebue să fie de același semn.

In fig. 127 se arată construcția liniei de influență a efortului din diagonala unei grinzi cu zăbrele având tălpile după un contur concav (cum se întâlnesc la grinzile cu console). La aplicarea sarcinii la dreapta secțiunii, efortul din diagonală este:

$$D_2 = -A\,\frac{a_k}{r_k}.$$

Cu această ecuație se determină linia din dreapta liniei de influență, având în dreptul reazimului din stânga ordonata $-\frac{a_k}{r_k}$, iar în dreptul reazimului din dreapta valoarea zero. Linia din stânga se determină prin valoarea zero în dreptul reazimului din stânga și cu ordonata c-c' în dreptul punctului momentelor. Proiectând pe aceste linii nodurile din dreapta și din stânga vom obține conturul liniei de influență, care este hașurat în fig. 127.

In cazul particular, când la determinarea efortului în zăbrele se secționează două tălpi paralele (fig. 128), pentru alcătuirea ecuației liniei de influență se poate folosi condiția după care proiecția forțelor pe axa normală pe tălpi trebue să fie egală cu zero.

Când sarcina unitară se găsește la dreapta secțiunii 1—1, ecuația liniei de influență pentru efortul din diagonala D_3 va fi:

$$+ A - D_3 \sin \varphi = 0$$

de unde

$$D_3 = A \frac{1}{\sin \varphi} \qquad (49)$$

în care φ este unghiul dintre diagonală și orizontală.

Poziția acestei drepte se determină luând în reazimul din stânga ordonata egală cu $1/\sin \varphi$ și zero în reazimul din dreapta (dreapta $a'b$).

La aplicarea sarcinii unitare la stânga secțiunii 1—1, ecuația liniei de influență pentru efortul din diagonală va fi:

$$D_3 = - B \frac{1}{\sin \varphi} . \qquad (50)$$

Această dreaptă se determină prin punctul cu ordonata $-\frac{1}{\sin \varphi}$ în dreptul reazimului din dreapta și zero în dreptul reazimului din stânga (dreapta $a\ b'$); ea este paralelă cu dreapta $a'b$.

Proiectând poziția nodului 2 din stânga și a nodului 3 din dreapta pe liniile din stânga respectiv din dreapta liniei de influență și ducând dreapta $c_2\ c_3$, obținem linia de influență a efortului în diagonală, care se compune din două triunghiuri haşurate, cu semne diferite.

Pe aceeași fig. 128 este construită și linia de influență a efortului din montantul V_2 delimitată prin dreptele ac_2 și c_3b; construcția s'a făcut prin tăierea montantului în secțiunea 3—3 și după ecuația de echilibru în raport cu axa sa verticală.

La aplicarea sarcinii în dreapta secțiunii, din condițiunile de echi ibru ale părții din stânga, avem:

$$V_2 + A = 0$$

de unde

$$V_2 = - A \qquad (51)$$

La aplicarea sarcinii în stânga secțiunii, din condițiunile de echilibru ale părții din dreapta, avem:

$$- V_2 + B = 0$$

de unde

$$V_2 = + B \qquad (52)$$

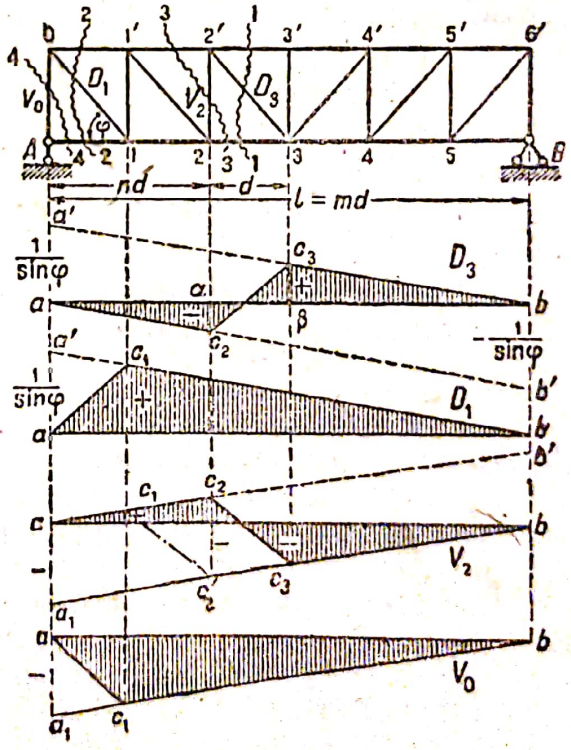


Fig. 128

Din cele expuse, rezultă că la grinzile cu zăbrele cu tălpi paralele, la care eforturile din zăbrele se exprimă în funcție de forțele tăietoare, formele liniilor de in-

fluență ale zăbrelelor sunt asemănătoare cu formele liniilor de influență ale forțelor tăietoare și se compun din două suprafețe cu semne diferite ; poziția punctului de separație între aceste suprafețe se determină din relații geometrice.

Influența încărcării nodurilor superioare sau inferioare ale unei grinzi cu zăbrele asupra valorii eforturilor din bare

La grinzile cu zăbrele dreptunghiulare având montanții verticali și nodurile superioare și inferioare așezate pe aceeași verticală, secțiunile făcute pentru determinarea eforturilor în diagonale trec între nodurile cu aceeași notație (care sunt pe aceeași verticală) ale tălpii superioare și ale celei inferioare, deci forma liniei de influență rămâne aceeași, fie când se aplică forțele în nodurile superioare, fie în nodurile inferioare. Situația se prezintă însă altfel din punct de vedere al eforturilor în montanți. Secțiunile duse pentru calculul efortului în montanți taie talpa superioară și inferioară între nodurile care nu se găsesc pe aceeași verticală, din care cauză aplicarea sarcinilor în nodurile superioare sau inferioare va modifica forma liniilor de influență, deci și valoarea efortului în montant.

In fig. 128 este reprezentat conturul liniei de influență ac_2c_3b pentru montantul V_2 în cazul când sarcinile sunt aplicate în nodurile inferioare. In cazul aplicării sarcinilor în nodurile tălpii superioare, conturul liniei de influență pentru același montant va fi ac_1c_2b.

Aceeași schimbare a conturului liniilor de influență, prin urmare și a eforturilor din zăbrele, în raport cu așezarea sarcinilor pe talpa superioară sau inferioară, va avea loc și la grinzile cu zăbrele triunghiulare (fig. 126) la care secțiunile duse pentru determinarea eforturilor în zăbrele taie tălpile între nodurile care nu se află pe aceleași verticale.

§ 32. Construcția liniei de influență prin metoda separării nodurilor

La determinarea eforturilor din bare prin metoda separării nodurilor, ecuația liniei de influență se alcătuește în două ipoteze :

1. Sarcina unitară este aplicată chiar în nod, determinând astfel ordonata liniei de influență în dreptul acelui nod.

2. Sarcina unitară este aplicată în restul nodurilor. Deoarece la orice schimbare a punctului de aplicare a sarcinii unitare în aceste noduri, ecuația de echilibru a nodului care a fost separat nu se schimbă, prin aceasta se determină ordonatele liniei de influență în toate celelalte noduri.

Pentru a explica acest procedeu vom analiza grinda reprezentată în fig. 129.

In această grindă există două categorii distincte de montanți : montanții din nodurile fără soț (1,3 și 5) care servesc pentru consolidarea articulațiilor în locurile unde talpa superioară își schimbă direcția și sunt deci necesari în sistemul grinzii și montanții din nodurile 2 și 4 care servesc numai ca legături de susținere pentru nodurile inferioare și pot fi eliminați din sistemul de zăbrele, dacă se va îndepărta și arti-

Scanned with OKEN Scanner

culaţia din nodul inferior. Aceste particularităţi ale montanţilor sunt de sigur caracteristice şi pentru forma liniei de influenţă.

Niciunul din montanţii interiori nu permite să se ducă o secţiune care să taie trei bare şi de aceea pentru formarea ecuaţiilor eforturilor, utilizăm metoda separării nodurilor.

Pentru determinarea efortului în montantul V_2, separăm nodul inferior 2 şi alcătuim ecuaţia de echilibru a tuturor forţelor aplicate în acest nod, proiectându-le pe axa montantului :

a) aplicând sarcina $P = 1$ în nodul 2, ecuaţia va fi următoarea :

$$V_2 - P = 0$$

de unde

$$V_2 = P = 1 ; \qquad (53)$$

de aci rezultă că ordonata liniei de influenţă sub acest nod este egală cu unitatea (fig. 129, a) ;

b) din aceeaşi ecuaţie de echilibru rezultă că aplicând sarcina unitară în celelalte noduri ale tălpii încărcate, $V_2 = 0$, deci ordonatele liniei de influenţă ale montantului V_2 sub toate celelalte noduri vor fi egale cu zero.

Astfel, liniile de influenţă ale acestor montanţi vor avea o formă triunghiulară, cu ordonata egală cu unitatea în dreptul nodului separat şi egală cu zero în dreptul nodurilor vecine; de aci rezultă că montantul lucrează numai la încărcarea locală din nod.

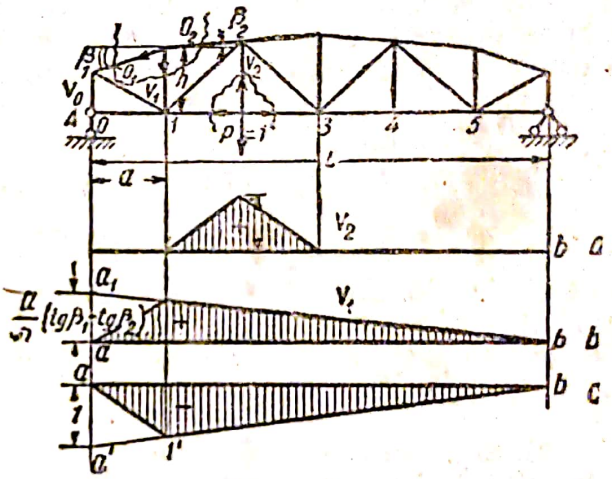


Fig. 129

Efortul din montantul V_1 şi din cele cu număr fără soţ se determină mai simplu prin separarea nodurilor superioare. Deoarece sarcina mobilă, după datele problemei, este aplicată numai în nodurile inferioare, atunci, indiferent de poziţia sa, ecuaţia de echilibru pentru nodul 1′ rămâne aceeaşi şi anume :

$$- V_1 - O_1 \sin \beta_1 + O_2 \sin \beta_2 = 0$$

substituind în această ecuaţie valoarea efortului

$$O_1 = - \frac{M_1}{h \cos \beta_1}$$

şi

$$O_2 = - \frac{M_1}{h \cos \beta_2}$$

obţinem

$$V_1 = + \frac{M_1}{h} (\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2) \qquad (54)$$

Prin urmare, ordonatele liniei de influență a montantului sunt proporționale cu ordonatele liniei de încărcare a montantului, de aceea linia de influență are forma unui triunghiu, care se construește așezând în dreptul reazimului din stânga, ordonata :

$$\frac{a}{h}\,(\operatorname{tg}\beta_1 - \operatorname{tg}\beta_2)$$

Linia de influență construită în baza acestor considerațiuni (fig. 129, b) arată că montantul lucrează la încărcarea integrală a grinzii.

Efortul în montantul de pe reazim V_0 se determină de asemenea ușor prin separarea nodului din reazim, în care se aplică și reacțiunea A.

Aplicând sarcina unitară în nodul O, ecuația de echilibru în raport cu axa montantului este :

$$V_0 = -A + P \qquad (55)$$

însă aplicând sarcina în dreptul reacțiunii, aceasta este egală în valoare dar de sens opus cu sarcina, deci $A = P$; în acest caz $V_0 = 0$ și de aceea ordonata liniei de influență sub nodul O este egală cu zero. Aplicând sarcina unitară în toate celelalte noduri ale aceleiași tălpi, din condițiile de echilibru ale nodului O care a fost separat, rezultă că efortul în montant este :

$$V_0 = -A = -\frac{l-x}{l} \qquad (56)$$

de aceea ordonatele liniei de influență ale acestui efort se vor determina din ordonatele liniei de influență ale reacțiunii. Astfel, linia de influență va fi reprezentată prin triunghiul $a1b$.

Probleme și exerciții

25. Să se demonstreze că liniile de influență ale eforturilor din barele $U_{2,3}$ și $D_{9,2}$ (fig. 130) sunt construite corect ; să se stabilească în ce ipoteze de încăr-

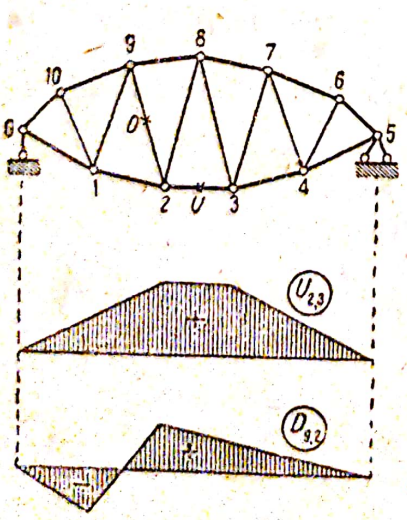


Fig. 130

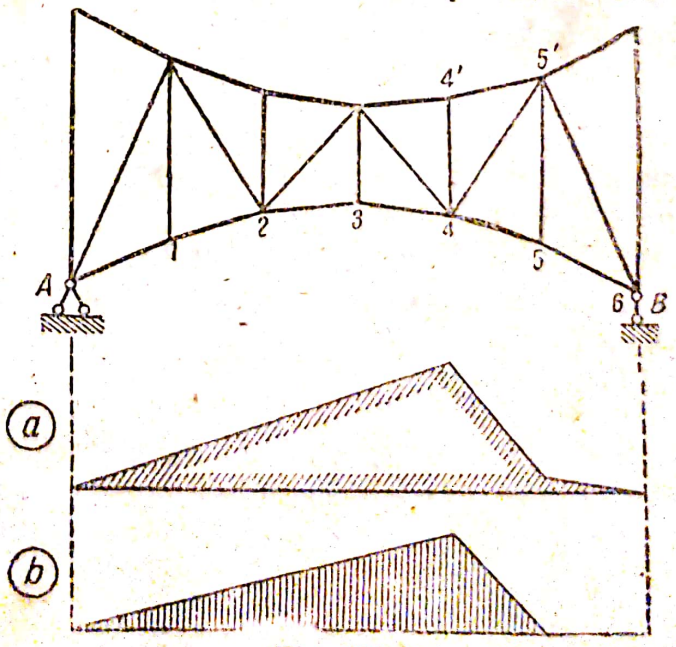


Fig. 131

care, adică a nodurilor superioare sau inferioare, sunt construite aceste linii de influență.

26. Să se demonstreze că liniile de influenţă pentru diagonala $D_{4,5}$ (fig. 131) sunt construite corect şi să se arate cum trebue schimbat conturul grinzii cu zăbrele, pentru ca aplicând sarcina în nodul 5, diagonala să nu lucreze (fig. 131, b).

27. Să se construiască linia de influenţă a efortului în barele indicate în planul unei grinzi cu zăbrele în consolă (fig. 132), în ipoteza aplicării sarcinilor în partea superioară.

Indicaţie. Particularitatea grinzilor cu zăbrele în consolă constă în aceea că ecuaţiile liniilor de influenţă pot fi alcătuite considerând echilibrul părţii consolei tăiate şi aplicând sarcina pe această parte sau în afară.

Să se aibă în vedere poziţia liniei din stânga la construirea fiecărei linii de influenţă.

28. Să se construiască linia de influenţă pentru al doilea şi al treilea montant al grinzii cu zăbrele reprezentată în fig. 133, având aplicată sarcina în nodurile superioare şi să se arate cum se schimbă eforturile din ace/aşi montanţi, când se aplică sarcina în nodurile inferioare.

Indicaţie. Montanţii ce se găsesc deasupra grinzii cu zăbrele propriu zise servesc pentru transmiterea sarcinilor şi lucrează numai atunci când încărcarea se află deasupra lor.

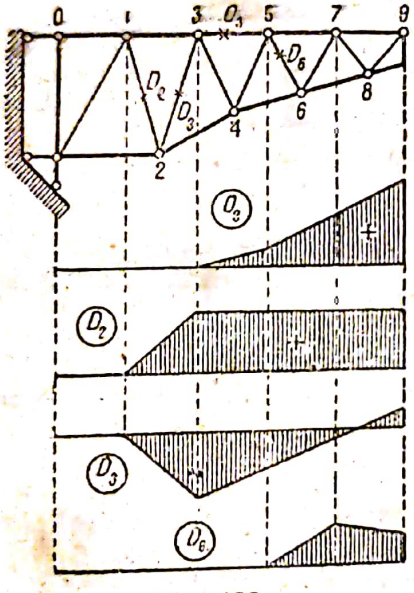


Fig. 132

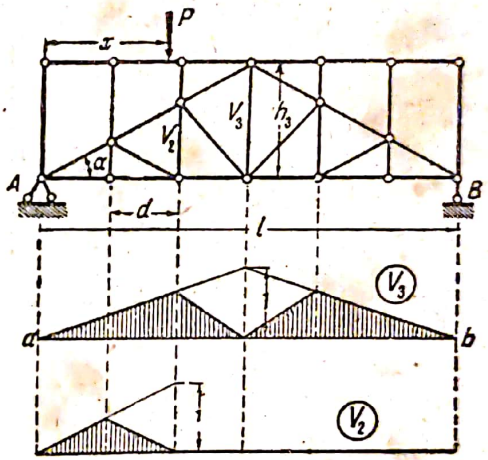


Fig. 133

29. Să se construiască liniile de influenţă ale eforturilor din barele grinzii reprezentate în fig. 134.

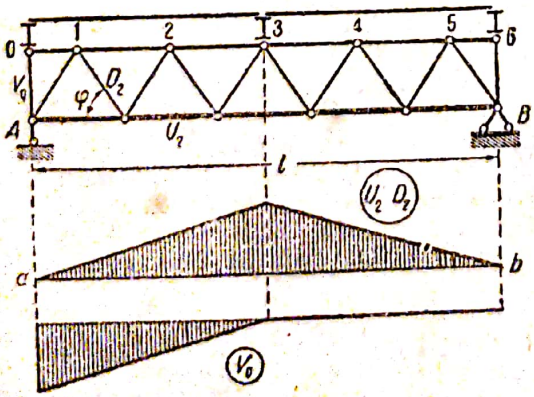


Fig. 134

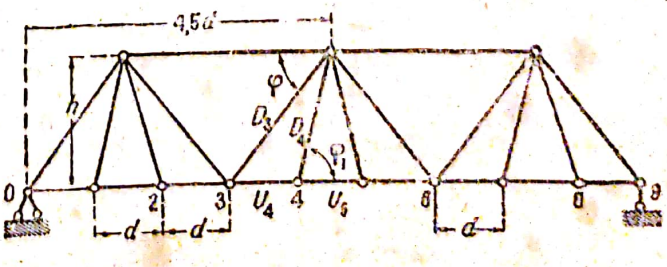


Fig. 135

Indicaţie. Particularitatea acestui sistem constă în aceea că încărcările se transmit numai în nodurile 0, 3 şi 6. Aşezarea antretoazelor, după cum se ştie,

nu schimbă ecuațiile dreptelor principale, care formează linia de influență. Se va compara acest fel de încărcare în noduri cu ipoteza aplicării sarcinilor în fiecare nod.

30. Să se construiască linia de influență a eforturilor din barele D_3, D_4 și U_4 ale grinzii cu zăbrele din fig. 135, calea fiind așezată jos.

Indicație. Construcția liniilor din partea din stânga și dreapta, care formează linia de influență a efortului în barele D_3 și D_4, se face în ordinea obișnuită ; în special se atrage atenția la proiectarea nodurilor solicitate, care limitează aceste drepte.

31. Să se construiască linia de influență a efortului în barele notate ale grinzii cu diagonale în K, cu calea jos, reprezentată în fig. 136.

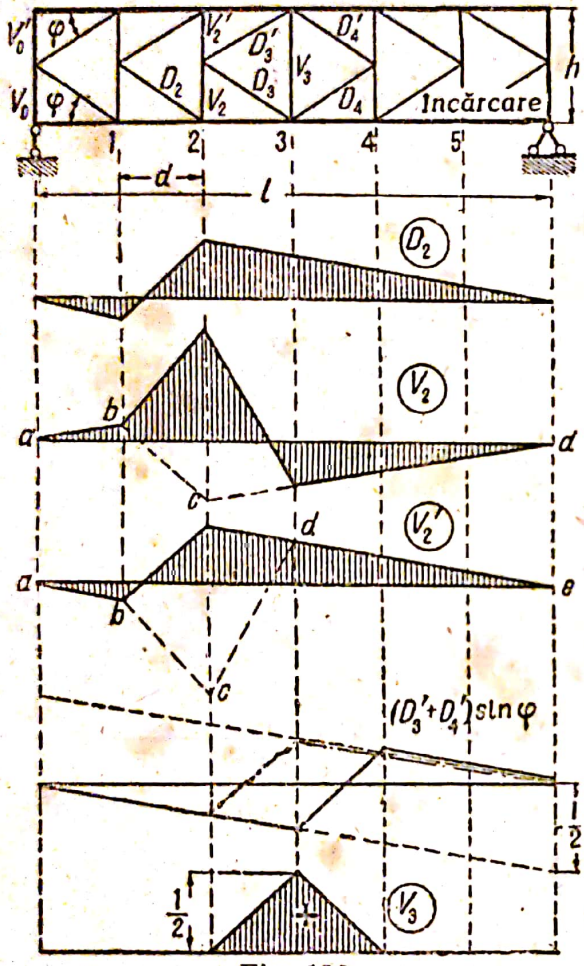


Fig. 136

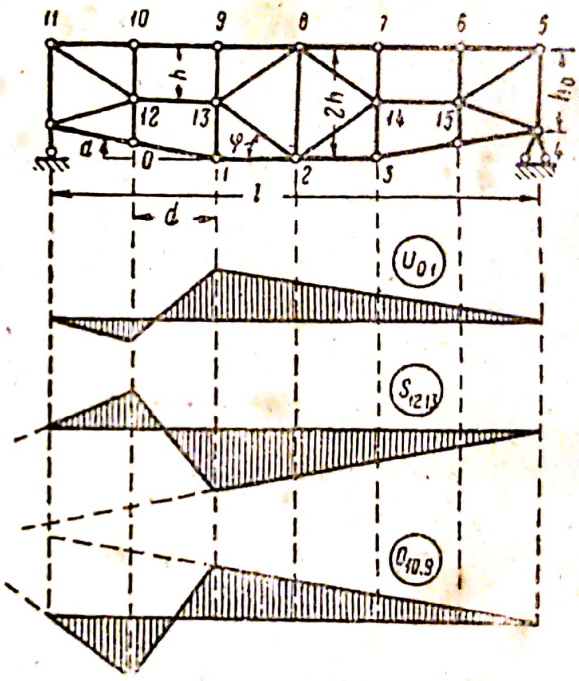


Fig. 137

Indicație. La rezolvarea acestei probleme trebuesc folosite, la formarea ecuației, indicațiile date la problema 18. Se recomandă ca ecuațiile liniilor de influență ale eforturilor în toți montanții să se alcătuiască din condițiile nodului separat. In cazul aplicării sarcinilor în nodurile tălpii inferioare, ecuația liniei de influență a montantului din mijloc este recomandabil ca să fie alcătuită pe baza condițiilor de echilibru ale nodului superior :

$$V_3 = -(D'_3 + D'_4)\sin\varphi .$$

Se recomandă să se construiască separat liniile de influență ale diagonalelor D_3, D_4 și apoi să se cumuleze aceste linii, ținând seama de semnele ambelor linii. In fig. 136 ambele linii de influență sunt arătate după însumare și după cum se vede din figură, ordonatele lor se suprapun din cauza semnelor contrare în panourile extreme (1, 2, 5 și 6).

Intrebare. Cum se va schimba conturul liniei de influenţă pentru aceleaşi bare, dacă încărcarea va fi mutată din nodurile inferioare în cele superioare?

32. Să se construiască linia de influenţă a efortului în barele grinzii cu zăbrele din fig. 137.

Indicaţie. Din cauza particularităţilor de alcătuire a acestei grinzi, liniile de influenţă ale eforturilor în tălpile $U_{0,1}$ şi $O_{1),9}$ sunt cu două semne. Construirea liniilor de influenţă a efortului în bare se face după procedeele obişnuite.

§ 33. Semnul şi mărimea eforturilor în barele grinzilor cu zăbrele în raport cu direcţia diagonalelor în panouri

La grinzile triunghiulare cu zăbrele (fig. 126), zăbrelele se alcătuesc din bare ascendente şi descendente, iar la grinzile dreptunghiulare cu zăbrele (fig. 128), din montanţi şi diagonale.

La alegerea direcţiei barelor din zăbrele, trebue să avem în vedere că la aceeaşi poziţie a sarcinii, semnul efortului în diagonală este determinat de direcţia ei, adică după o diagonală sau cealaltă a panoului grinzii.

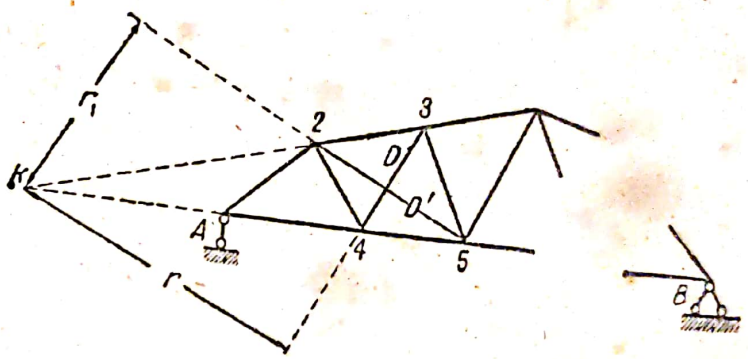


Fig. 138

Intr'adevăr, dacă într'un panou al unei grinzi cu zăbrele (fig. 138), efortul în bara D — după direcţia îndreptată dela nodul 4 spre nodul 3 — este determinat prin ecuaţia:

$$D' = + \frac{M_k}{r_1}$$

atunci la schimbarea direcţiei diagonalei după diagonala dela nodul 2 la nodul 5, efortul în această diagonală se va determina de ecuaţia:

$$D' = + \frac{M_n}{r}$$

De aceea, poziţia încărcării şi valoarea momentului M_n în ambele cazuri nu se modifică, însă schimbarea semnului se datoreşte modificării direcţiei diagonalei. Această particularitate se manifestă foarte clar în grinzile cu zăbrele cu montanţi şi diagonale. In aceste grinzi proiecţiile pe axa orizontală a eforturilor din diagonale, îndreptate după diferitele diagonale ale panourilor, la aceeaşi încărcare verticală sunt egale între ele, însă de semn contrar.

Intr'adevăr, dacă direcţia forţelor exterioare este verticală (fig. 139), din condiţia de echilibru în raport cu axa orizontală după secţiunea s—s, obţinem:

$$D_n \cos \varphi + U \cos \alpha + O_n \cos \beta = 0$$

Substituind în această ecuație valorile eforturilor U_n și O_n, exprimate în funcție de momente și făcând reducerile, obținem:

$$D_n \cos \varphi = \frac{M_{n+1}}{h_{n+1} \cos \beta} \cos \beta - \frac{M_n}{h_n \cos \alpha} \cos \alpha =$$

$$= \frac{M_{n+1}}{n+1} - \frac{M_n}{h_n} \qquad (57)$$

în care h_n și h_{n+1} reprezintă înălțimea grinzii în nodurile respective.

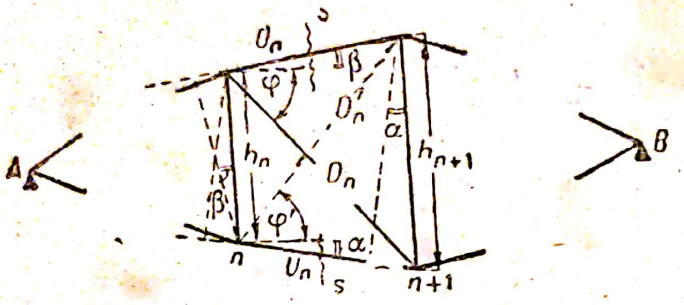


Fig. 139

Dacă presupunem că în același panou, cu aceeași încărcare, diagonala va fi orientată după cealaltă diagonală a panoului, atunci din aceeași condiție de echilibru și după aceeași secțiune s—s, vom obține expresia efortului în diagonala D_n sub forma următoare:

$$D'_n \cos \varphi' + U_n \cos \alpha + O_n \cos \beta = 0$$

După substituirea în această ecuație a expresiilor eforturilor O_n și U_n, în funcție de momente, obținem:

$$D'_n \cos \varphi = \frac{M_n}{h_n \cos \beta} \cos \beta - \frac{M_{n+1}}{h_{n+1} \cos \alpha} \cos \alpha =$$

$$= \frac{M_n}{h_n} - \frac{M_{n+1}}{h_{n+1}} \qquad (58)$$

Comparând expresiile (57) și (58) rezultă că:

$$D_n \cos \varphi = - D'_n \cos \varphi' = \frac{M_{n+1}}{h_{n+1}} - \frac{M_n}{h_n} \qquad (59)$$

adică proiecțiile eforturilor din diagonale sunt egale, însă de semn contrar.

Relația dedusă mai sus pentru semnul efortului din diagonală, încă nu stabilește cărei direcții a diagonalei îi va corespunde un efort de compresiune sau de tensiune, deoarece în această expresie semnul efortului din diagonală depinde atât de caracterul creșterii momentului, cât și de modul de creștere a înălțimii grinzii cu zăbrele. Admițând că:

$$M_{n+1} = M_n + \Delta M$$

și

$$h_{n+1} = h + \Delta h;$$

atunci

$$D_n \cos \varphi = \frac{M_n + \Delta M}{h_n + \Delta h} - \frac{M_n}{h_n} =$$

$$= \frac{h_n \Delta M - M_n \Delta h}{(h_n + \Delta h) h_n} \tag{60}$$

În această formulă numitorul este întotdeauna pozitiv, de aceea semnul efortului în diagonală depinde de semnul diferenței:

$$\frac{\Delta M}{M_n} - \frac{\Delta h}{h_n} \lessgtr 0 \tag{61}$$

care se obține din numărător.

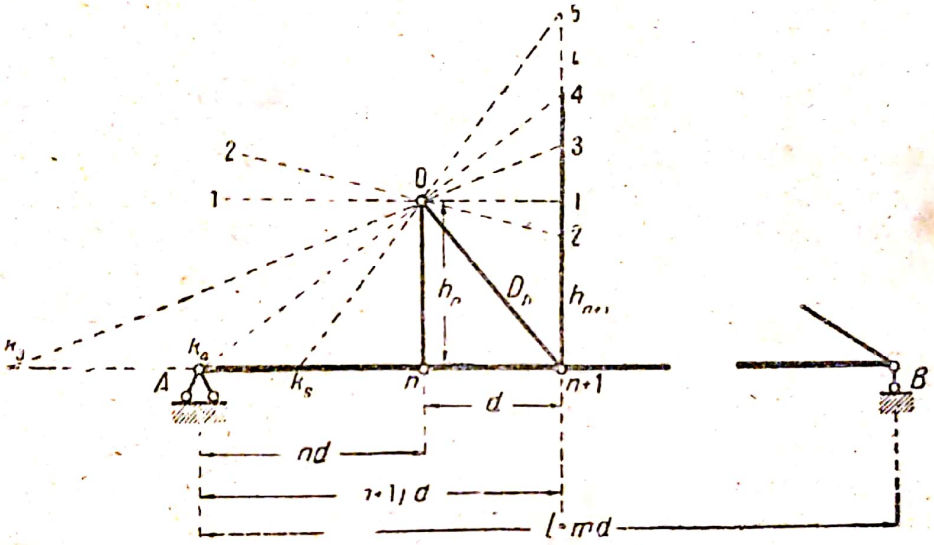


Fig. 140

Pentru a scoate în evidență influența conturului grinzii cu zăbrele, să analizăm o serie de contururi posibile, presupunând că înălțimea grinzii h_n, lungimea și direcția diagonalei D_n rămân invariabile (fig. 140).

Dela început presupunem că sarcina este aplicată în partea din dreapta a panoului, căreia îi corespunde o creștere pozitivă a momentului în acel panou

$$\Delta M > 0$$

și

$$M_{n+1} > M_n$$

Creșterea propriu zisă se produce după o dreaptă care trece prin zero (are ordonata zero) în dreptul reazimului din stânga.

$$M_{n+1} = M_n \frac{n+1}{n} \tag{62}$$

Să analizăm cazul când $\Delta h = 0$, ceea ce are loc la grinzile cu zăbrele cu tălpi paralele (fig. 142) când

$$h_{n+1} = h_n = h$$

In acest caz expresia (60) a efortului din diagonală se transformă în:

$$D_n \cos \varphi = \frac{1}{h} (M_{n+1} - M_n)$$

Din condiția dată că $M_{n+1} > M_n$, rezultă că efortul în diagonală este pozitiv. Dacă așezăm diagonala după direcția celeilalte diagonale a panoului, atunci semnul efortului din ea va fi negativ.

Astfel, la grinzile cu tălpi paralele, diagonalele descendente către punctul momentului maxim lucrează la tensiune, iar cele ascendente la compresiune.

Această relație rămâne valabilă când $\Delta h > 0$, ceea ce are loc la contururile concave ale grinzilor cu zăbrele (fig. 127, partea din stânga). In acest caz expresia (61) se transformă astfel:

$$\frac{\Delta M}{M_n} - \frac{(-\Delta h)}{h_n} > 0$$

și

$$\frac{M_{n+1}}{h_{n+1}} > \frac{M_n}{h_n}$$

deci expresia (60) este pozitivă.

Dacă $\Delta h > 0$, adică înălțimea grinzii crește spre dreapta, semnul expresiei (61) poate fi și negativ și pozitiv, în raport cu felul creșterii.

$$\frac{\Delta M}{M_n} \text{ și } \frac{\Delta h}{h_n}$$

Dacă aceste creșteri sunt egale

$$\frac{\Delta M}{M_n} = \frac{\Delta h}{h_n}$$

adică

$$\frac{M_{+1}}{h_{n+1}} = \frac{h_{n+1}}{h_n},$$

atunci după expresia (60) efortul în diagonală devine egal cu zero

$$D_n \cos \varphi = \frac{M_{n+1}}{h_{n+1}} - \frac{M_n}{h_n} = 0 \qquad (63)$$

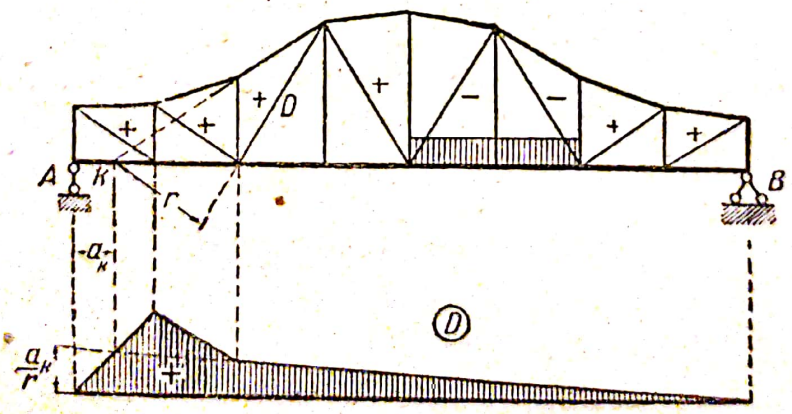


Fig. 141

Rezultă deci că în panourile grinzilor cu zăbrele, la care barele tălpilor se intersectează pe verticala dusă din nodul reazimului din

stânga, sarcinile așezate la dreapta secțiunii considerate a zăbrelelor nu provoacă în aceste zăbrele niciun efort. In special aceasta se întâmplă la grinzile cu zăbrele triunghiulare (fig. 145).

In cazul când

$$\frac{\triangle M}{M_n} > \frac{\triangle h}{h_n}$$

inegalitate care, de exemplu, se prezintă la grinzile cu zăbrele, la care punctul de intersecție al barelor tălpilor se găsește în afara deschiderii (fig. 143 și 144), atunci semnul efortului în diagonală (60) își păstrează valoarea pozitivă dacă sarcina este aplicată la dreapta panoului ($\triangle M < 0$), ceea ce are loc la grinzile cu tălpi paralele.

Dacă

$$\frac{\triangle M}{M_n} < \frac{\triangle h}{h_n}$$

ceea ce are loc la grinzile cu zăbrele, la care punctul de intersecție al tălpilor se află în deschidere (fig. 141 și fig. 128, partea din dreapta) efortul din diagonală, determinat de expresia (60), devine negativ:

$$D_n \cos \varphi = \frac{M_{n+1}}{h_{n+1}} - \frac{M_n}{h_n} < 0 \qquad (64)$$

Din cele expuse, rezultă că în panourile unei grinzi cu zăbrele, la care punctul de intersecție al tălpilor se găsește între reazimul din stânga și panoul considerat, eforturile de tensiune se produc în diagonalele ascendente spre dreapta (fig. 141), independent de modul de aplicare al încărcării pe grindă.

Analiza de mai sus a influenței variației conturului grinzii cu zăbrele asupra eforturilor în zăbrele este facută în ipoteza că $\triangle M > 0$. Dacă vom analiza efectul încărcării în ipoteza $\triangle M < 0$, toate calculele de mai sus rămân valabile, schimbându-se numai semnul efortului în diagonale.

§ 34. Influența conturului grinzii cu zăbrele asupra mărimii eforturilor în bare

Expresiile analitice ale eforturilor în tălpi și zăbrele arată că valoarea creșterii efortului în grindă depinde nu numai de încărcare, ci și de conturul grinzii. Prin alegerea conturului și înălțimii grinzii, putem obține o oarecare modificare în distribuiția eforturilor în tălpi și zăbrele.

Grinda cu zăbrele poate avea orice fel de contur, însă următoarele trei contururi de tălpi: paralele, parabolice și triunghiulare sunt cele mai caracteristice, dându-ne indicații precise referitoare la variația eforturilor în raport cu deschiderea grinzilor.

Pentru a explica influența conturului grinzilor, vom face comparație între diferite grinzi cu zăbrele, care au însă deschideri egale $l = md$, — în care d este lungimea unui panou — aceeași înălțime H în mijlocul deschiderii, încărcate cu aceeași sarcină permanentă uniform distribuită q kg/m și aceeași sarcină temporară p kg/m.

In această comparație vom folosi expresiile analitice pentru eforturi, precum și acelea ale eforturilor cu ajutorul suprafețelor liniilor

de influenţă. Eforturile în barele tălpilor, determinate de expresiile (40) şi (41), le vom considera într'o formă generalizată, exprimându-le prin proiecţiile efortului :

$$S \cos \alpha_n = \pm \frac{M_n}{h_n} \qquad (65)$$

în care

S este efortul în barele tălpii superioare sau inferioare ;

α — unghiul de inclinare al barei faţă de orizontală ;

h — înălţimea grinzii în secţiunea faţă de care se ia momentul.

1. Grinda cu zăbrele cu tălpi paralele. La o grindă cu zăbrele cu tălpi paralele înălţimea este constantă, de aceea braţele de pârghie ale eforturilor în ambele tălpi sunt identice şi egale cu înălţimea grinzii H.

Dacă notăm distanţa a a fiecărui nod al grinzii dela reazimul din stânga cu

$$a = n\ d,$$

în care n este un număr variabil, corespunzător cu numărul panourilor până la un anumit nod, atunci ordonatele în dreptul reazimului din stânga, care determină linia de influenţă a tălpilor, vor fi :

$$\frac{a}{H} = \frac{nd}{H},$$

ceea ce permite ca, variind numărul n, să construim linia de influenţă pentru orice bară din talpă (fig. 142).

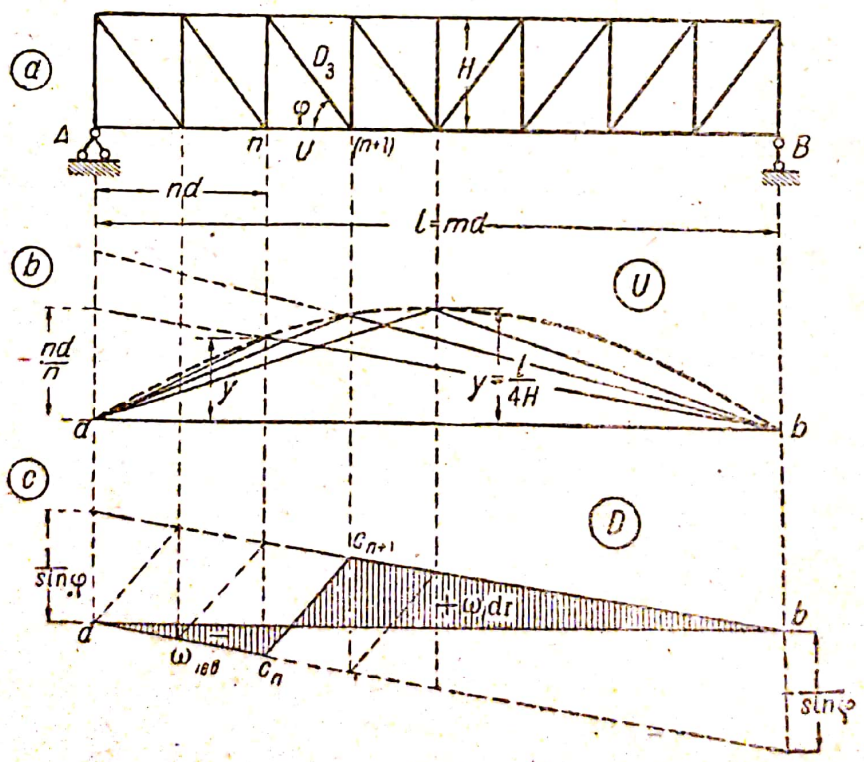


Fig. 142

Ordonata maximă a fiecărei linii de influenţă se determină printr'o construcţie geometrică şi este egală cu :

$$y = \frac{d}{H} \cdot \frac{n\,(m-n)}{m}.$$

Este ușor de observat că în această expresie cu n variabil, ordonatele y reprezintă ordonatele unei parabole, reportate la origina sistemului de coordonate în punctul a; deci vârfurile tuturor liniilor de influență ale barelor din tălpi se găsesc pe o parabolă cu ordonata maximă la mijloc egală cu:

$$y = \frac{m\,d}{4\,H}$$

In aceste grinzi eforturile în barele tălpilor cresc spre mijlocul deschiderii, creșterea propriu zisă înaintând tot spre mijlocul deschiderii.

Sub acțiunea unei sarcini uniform distribuite, valoarea maximă a efortului în barele tălpilor în mijlocul deschiderii se determină prin:

$$S = \pm \frac{(q + p)\,l^2}{8\,H}$$

In aceste grinzi cu panouri egale, unghiurile de înclinare ale diagonalelor față de orizontală sunt egale și de aceea liniile de influență ale diagonalelor se determină cu aceeași ordonată în dreptul reazimelor $\pm \frac{1}{\sin \varphi}$ (fig. 142). Liniile de influență ale montanților vor fi asemenea cu acelea ale diagonalelor, fiind legate de acestea din urmă prin relația:

$$V = - D \sin \varphi$$

In fig. 142, se arată modul cum variază conturul liniei de influență a efortului din zăbrele. Din figură se vede că la reazimele din stânga, influența preponderentă o au părțile din dreapta liniei de influență.

De aceea, dacă grinda cu zăbrele este încărcată cu o sarcină permanentă q și cu o sarcină temporară p, atunci, în barele din apropierea reazimelor, eforturile în zăbrele:

$$D \sin \varphi = - V = q\,(\omega_{dr} - \omega_{st}) + p\,\omega_{dr}$$
$$D \sin \varphi = - V = q\,(\omega_{dr} - \omega_{st}) - p\,\omega_{st}$$

își păstrează semnul. Pe măsură ce ne apropiem de mijlocul deschiderii, diferența dinte suprafețele liniilor de influență se reduce, devenind aproape nulă în mijlocul deschiderii, unde:

$$\omega_{dr} - \omega_{st} = \frac{d}{\sin \varphi}$$

Această înseamnă că în partea dela mijloc a acestor grinzi, eforturile în barele zăbrelelor, datorite încărcării permanente, devin mai mici decât eforturile produse de sarcina temporară ce se găsește în stânga:

$$q\,(\omega_{dr} - \omega_{st}) < P^{\omega}_{st}$$

Aceasta provoacă schimbarea semnului efortului în zăbrelele din partea de mijloc a grinzii în raport cu poziția sarcinii.

Scanned with OKEN Scanner

2. Grinda cu tălpi parabolice cu zăbrele de sistem dreptunghiular

La grinzile cu zăbrele cu tălpi parabolice, înălțimea montanților la noduri este determinată prin expresia (fig. 151):

$$h_n = \frac{4H}{m^2 d}\, nd\,(m-n) = \frac{4H}{m^2}\, n\,(m-n)$$

în care nd este distanța variabilă a nodurilor grinzii dela reazimul din stânga.

In fig. 143 se arată construcția liniei de influență pentru proiecția eforturilor din tălpi, determinată după expresia (65); construcția se face în ordinea obișnuită, începând cu așezarea pe reazimul din stânga a ordonatelor $\frac{nd}{h_n}$.

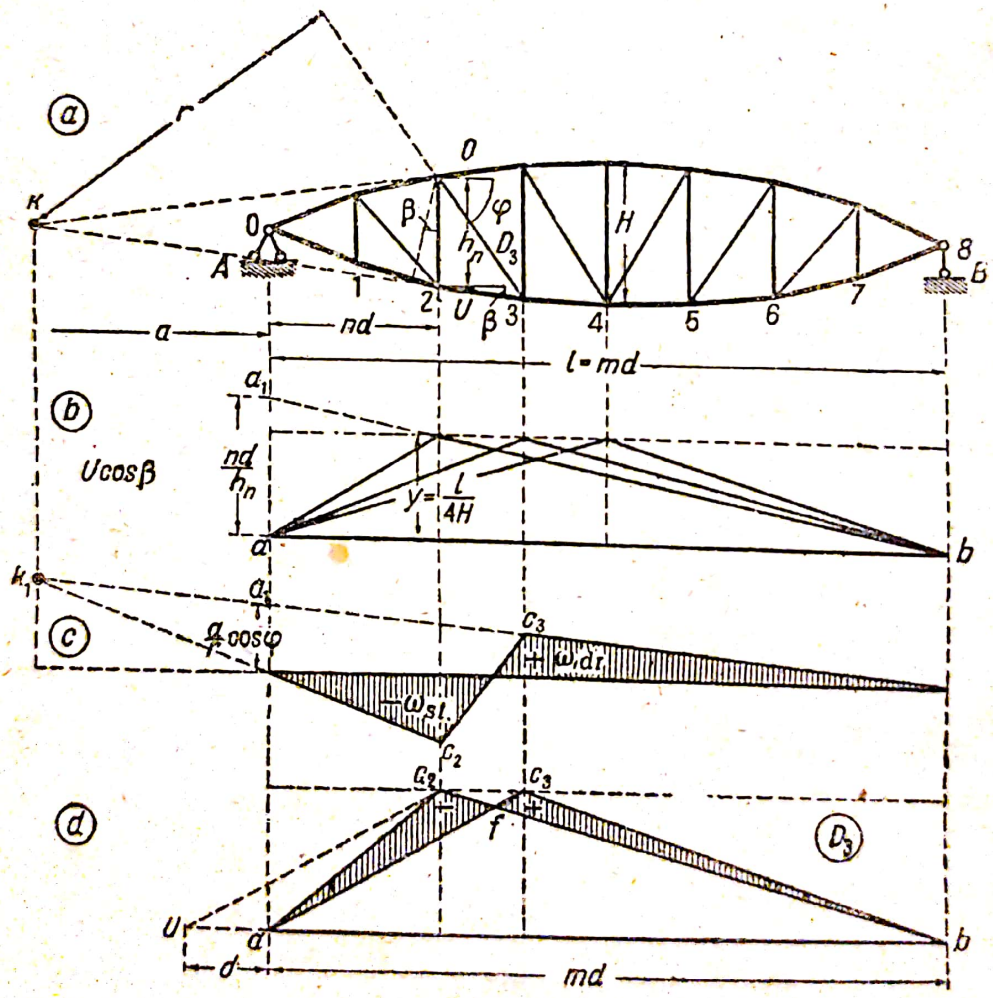


Fig. 143

Ordonata maximă a liniilor de influență pentru eforturile din elementele tălpilor se determină întotdeauna prin:

$$y = \frac{d}{h_n} \cdot \frac{n\,(m-n)}{m};$$

și introducând notațiile din fig. 143, această expresie devine:

$$y = \frac{dn\ (m - n)\ m^2}{4\ Hn\ (m - n)\ m} = \frac{md}{4H} = \frac{l}{4H}$$

reprezentând astfel o mărime constantă, egală pentru toate liniile de influență construite pentru proiecțiile eforturilor din talpa unei grinzi parabolice; prin urmare *suprafețele tuturor acestor linii de influență sunt egale.*

De aici rezultă direct că, *dacă grinzile cu tălpi parabolice sunt încărcate pe toate lungimea cu o sarcină continuă uniform repartizată, proiecțiile eforturilor tuturor barelor din tălpi sunt egale* și se determină din expresia:

$$S \cos \alpha = (q + p) \frac{m^2 d^2}{8H} = (q + p) \frac{l^2}{8H}.$$

Aceste eforturi sunt egale în mărime cu efortul din bara dela mijlocul unei grinzi cu tălpi paralele, având aceeași deschidere, înălțime la mijloc și încărcare ca și o grindă parabolică.

Pentru a determina, cu ajutorul liniilor de influență, eforturile din zăbrelele acestor grinzi, putem să folosim ecuația momentelor în raport cu punctul de intersecție k al direcției tălpilor secționate în vederea stabilirii efortului în diagonală; în fig. 143-c este reprezentată construcția prin acest procedeu a liniei de influență a diagonalei D_3.

Pentru o mai bună comparație a eforturilor în diferitele elemente ale zăbrelelor, este însă mai ușor să utilizăm expresia (59), în care eforturile din diagonale sunt exprimate în funcție de proiecțiile eforturilor pe barele tălpilor. Aceasta permite să considerăm linia de influență a proiecției efortului din diagonală ca rezultat al însumării liniilor de influență ale proiecțiilor eforturilor din barele tălpilor respective. In fig. 142-d este reprezentată construcția pe această cale a liniei de influență a proiecției efortului din diagonala D_3.

Din această construcție se vede că suprafața ambelor porțiuni din stânga și din dreapta ale acestei linii de influență sunt egale între ele, deoarece se obțin prin scăderea aceleiași suprafețe $a\ f\ b$ din două triunghiuri $a\ c_2\ b$ respectiv $a\ c_3\ b$, având suprafețe egale, prin urmare

$$\triangle\ a\ c_2\ f = \triangle\ b\ c_3\ f \qquad \text{(a)}$$

De aici rezultă de-a-dreptul că, *dacă o grindă cu zăbrele de sistem dreptunghiular și cu una sau ambele tălpi parabolice, este încărcată cu o sarcină continuă uniform repartizată, eforturile în toate diagonalele ei sunt nule.*

Suprafața fiecăreia din aceste porțiuni ale liniei de influență a diagonalei se poate determina ușor, raționând astfel:

Triunghiurile (fig. 142) $a\ c_2\ f$ și $a\ c_2\ b$ au un vârf comun a, deci raportul dintre suprafețele lor este egal cu raportul dintre baze:

$$\triangle\ a\ c_2\ f = \triangle\ a\ c_2\ b \frac{c_2\ f}{c_2\ b} =$$

$$= \frac{l^2}{8H} \cdot \frac{c_2\ f}{c_2\ b} \qquad \text{(b)}$$

Ducând linia c_2u paralelă cu c_3a, putem scrie:

$$\frac{c_2f}{c_2b} = \frac{ua}{ub} = \frac{d}{l+d}$$

și substituind acest raport în formula (b), avem:

$$\Delta\, a\, c_2 f = \Delta\, b\, c_3 f = \frac{l^2 d}{8H\,(l+d)}$$

Din această formulă se vede că *suprafețele liniei de influență a eforturilor în toate diagonalele grinzilor cu zăbrele parabolice sunt egale.*

De aceea la încărcarea fiecărei porțiuni a liniei de influență cu sarcini continue, valoarea eforturilor în diagonale variază numai în funcție de unghiul lor față de orizontală:

$$D_n \cos \varphi_n = \pm \frac{p\, l^2 d}{8H\,(l+d)}$$

Aceasta arată că în grinzile parabolice toate diagonalele lucrează la eforturi variabile ca semn, însă apropiate între ele ca mărime.

Toate aceste particularități ale modului cum lucrează diagonalele se referă numai la grinzile parabolice, cu zăbrelele alcătuite din diagonale și montanți (sistem dreptunghiular); la grinzile parabolice cu zăbrele compuse numai din diagonale (sistem triunghiular), aceste relații nu mai sunt valabile.

Modul cum lucrează montanții în grinzile parabolice variază în raport cu următoarele elemente:

— forma tălpilor: ambele tălpi sunt curbe sau una din ele este dreaptă (fig. 144) și

— poziția nodurilor încărcate.

La grinzile parabolice cu talpă orizontală (grinzi semiparabolice) (fig. 144), caracterul variației efortului în montanți reiese din condiția de echilibru a nodului care a fost separat în talpa superioară.

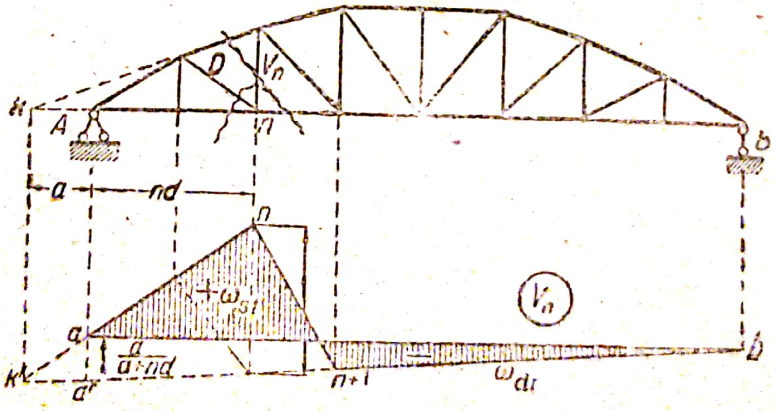


Fig. 144

Dacă sarcinile sunt aplicate în nodurile acestei tălpi, efortul în montanți va fi:

$$V_n = -D_n \sin \varphi_n + P$$

în care: P este sarcina în nodul care a fost separat; φ_n — unghiul de înclinare al diagonalei față de orizontală.

Deoarece la încărcarea pe toată lungimea a unei grinzi semiparabolice cu o sarcină uniform repartizată, eforturile în diagonale vor fi nule, este evident că în aceste condiții montanții vor lucra numai atunci când încărcarea este aplicată în nodurile tălpii orizontale

$$V_n = + P = (p + q)\, d$$

și nu vor lucra în cazul când sarcinile sunt aplicate în nodurile tălpii curbe.

De aci rezultă că atunci când nodurile tălpii drepte ale unei grinzi semiparabolice sunt încărcate, diferența dintre suprafețele ambelor porțiuni ale liniei de influență este egală pentru toți montanții

$$\omega_{st} - \omega_{dr} = d$$

3. Grinda cu contur triunghiular (fermă) având zăbrele de sistem dreptunghiular. La grinzile cu zăbrele de această formă (fig. 145) înălțimea montanților se determină din formula:

$$h_n = H\,\frac{2nd}{md} = \frac{2H_n}{m}$$

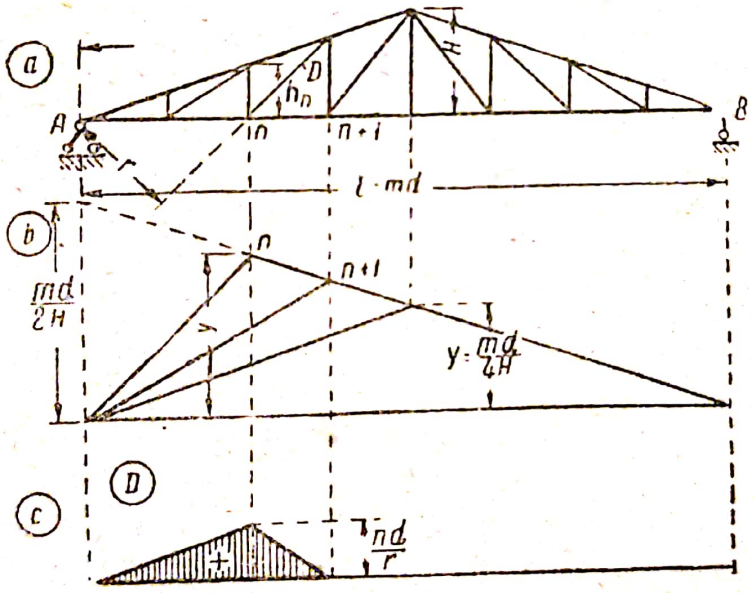


Fig. 145

După cum se cunoaște, valoarea ordonatelor din dreptul reazimului din stânga grinzii cu zăbrele, în vederea construirii liniei de influență a proiecției eforturilor din tălpi, se calculează din relația:

$$\frac{nd}{h_n} = \frac{ndm}{2H_n} = \frac{md}{2H} = \frac{l}{2H}$$

Din această expresie rezultă că la grinzile cu zăbrele care au conturul triunghiular, ordonatele în dreptul reazimelor la toate liniile de influență vor fi egale și valoarea lor nu depinde de poziția barei

în talpă. Prin urmare vârful tuturor liniilor de influență se găsește pe o dreaptă (fig. 145, b); valorile ordonatelor lor maxime se determină din expresia;

$$Y_{max} = \frac{md}{2H} \cdot \frac{m-n}{n} = \frac{(m-n)\,d}{2H}$$

și descresc către mijlocul grinzii; suprafețele liniei de influență cresc dela mijlocul grinzii către reazime.

Suprafața minimă a liniei de influență la mijlocul grinzii se determină prin:

$$\omega = \frac{m^2 d^2}{8H} = \frac{l^2}{8H}$$

care, în valoare, este egală cu suprafața liniei de influență pentru bara dela mijloc a tălpii unei grinzi cu tălpile paralele, cu condiția ca deschiderea și înălțimea la mijlocul deschiderii ambelor grinzi să fie egale.

Astfel ajungem la concluzia că proiecțiile eforturilor din tălpi ale grinzilor cu zăbrele cu contur triunghiular, crescând dela mijlocul deschiderii în spre reazime, depășesc ca valoare eforturile corespunzătoare ale unei grinzi cu zăbrele cu tălpi paralele și chiar și cele ale grinzilor parabolice.

La grinzile cu zăbrele cu contur triunghiular, este specific faptul că liniile de influență ale barelor se compun dintr'o singură dreaptă, cealaltă parte se suprapune cu axa absciselor.

Intr'adevăr pentru zăbrelele din jumătatea din stânga grinzii, punctul momentelor coincide cu reazimul din stânga. Prin aplicarea sarcinii unitare în partea din dreapta, efortul din diagonală este:

$$D_n = \pm \frac{AO}{r} = 0$$

și în consecință, linia din dreapta liniei de influență se confundă cu axa absciselor, iar linia din stânga se determină prin ecuația:

$$D_n = \frac{Bl}{r} = B\frac{md}{r}$$

Această linie de influență este reprezentată în fig. 145-c.

Din ecuația ei rezultă că eforturile din bare nu-și schimbă semnul și cresc dela reazime către mijlocul grinzii.

Concluziuni

Comparând modul cum se desvoltă eforturile în aceste trei tipuri de grinzi cu zăbrele, având deschiderea, înălțimea la mijlocul deschiderii și încărcarea egale, ajungem la concluzia că eforturile variază în modul cel mai puțin favorabil în grinda care are contur triunghiular; aceste eforturi depășesc foarte mult eforturile respective din diagonalele celorlalte tipuri de grinzi cu zăbrele.

La grinda cu tălpi paralele, valoarea efortului în tălpi este mai mică în raport cu eforturile din tălpile grinzii parabolice, însă aceasta are avantaje constructive, în sensul unei mai bune utilizări a materia-

Scanned with OKEN Scanner

lului, eforturile în tălpi fiind aproape constante. Printre avantajele grinzilor parabolice trebue să menţionăm şi acela că eforturile din zăbrele sunt mai mici decât la grinzile cu tălpi paralele.

Pe baza celor expuse, ajungem la concluzia că *toate grinzile cu zăbrele care au un contur al tălpilor ce se încadrează între tălpile paralele şi cele parabolice pot fi raţionale; grinzile cu zăbrele având conturul tălpilor mai jos decât conturul parabolic, nu sunt raţionale şi pot fi admise numai în cazuri excepţionale, impuse de caracterul construcţiei.*

Grinzile cu zăbrele cu tălpi concave (fig. 127) pot fi raţionale numai în cazurile când momentul creşte către reazime (grinzi continue cu zăbrele, cu console etc.).

Studiul lucrului mecanic al zăbrelelor arată că mărimea eforturilor din ele, la aceeaşi direcţie a diagonalelor, depinde foarte mult de conturul grinzii. La grinzile cu tălpi paralele, porţiunea pozitivă a liniilor de influenţă este mai mare decât cea negativă, în special în panourile apropiate de reazime. La grinzile parabolice, porţiunile pozitive şi negative ale liniilor de influenţă sunt egale. La grinzile cu contur triunghiular (ferme), porţiunea din dreapta liniei de influenţă este egală cu zero. Acest mod de variaţie a liniilor de influenţă dă posibilitate sarcinilor temporare să provoace eforturi de ambele semne în barele panourilor dela mijlocul grinzilor cu zăbrele cu un contur al tălpilor apropiat de cel parabolic. Aceasta a fost cauza că, mai înainte, la grinzile de poduri de acest tip se aşezau, în panouri, diagonale încrucişate (fig. 146). Se presupunea că diagonalele ce se proiectau pe atunci, având o rigiditate mică, lucrau numai la tensiune, diagonalele descendente spre dreapta lucrând numai la sarcinile din dreapta, iar cele descendente spre stânga lucrând la sarcinile din stânga. După considerentele moderne, când diagonalele se proiectează rigide, nu mai este nevoie să le aşezăm în cruce, însă la alegerea secţiunii lor trebue să ţinem seama de posibilitatea ca să apară în ele eforturi alternante.

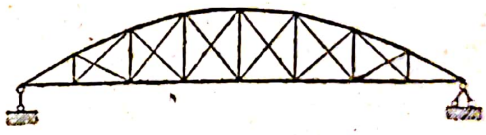


Fig. 146

Relaţia dintre semnul şi valoarea efortului din diagonale, în raport cu conturul grinzii, permite să se facă ipoteza că s'ar putea executa o grindă cu un astfel de contur, încât eforturile din diagonale să rămână în permanenţă de acelaşi semn, indiferent de poziţia sarcinilor. Aceasta se poate realiza cu condiţia ca eforturile din încărcarea permanentă să absoarbă complet eforturile de semn contrar provenite din încărcarea mobilă. Grinzile cu zăbrele care satisfac această condiţiune se numesc grinzi Schwedler, după numele inginerului care le-a studiat pentru prima dată.

Când asupra unei grinzi cu zăbrele acţionează încărcarea permanentă q şi încărcarea mobilă p, efortul în diagonale, după forma generală a liniei de influenţă, se va exprima în felul următor:

$$D = + (\omega_1 - \omega_2)\, q + p\, \omega_1$$

$$D = + (\omega_1 - \omega_2)\, q - p\, \omega_2$$

Grinda Schwedler trebue să îndeplinească condiţia ca suma minimă a eforturilor să nu fie mai mică decât 0, pentru aceasta urmează ca

$$(\omega_1 - \omega_2)\, q - p\, \omega_2 \geqq 0$$

sau

$$\omega_1\, q \geqq \omega_2\, (q + p)$$

Nu vom mai repeta aici rezolvarea acestei probleme tratate în multe cursuri de specialitate*), mai ales că în prezent s'au desvoltat forme rigide pentru barele comprimate şi problema proiectării diagonalelor supuse numai la tensiune nu mai este de actualitate. Pe noi ne interesează numai caracterul variaţiei conturului grinzii cu zăbrele ca o concluzie a chestiunilor tratate în acest paragraf.

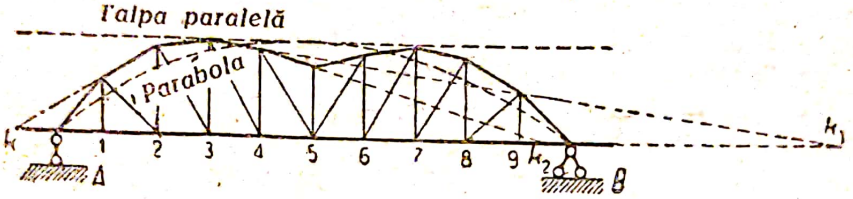


Fig. 147

In fig. 147 este reprezentat conturul teoretic al unei grinzi Schwedler. Conturul tălpii superioare a acestei grinzi se găseşte mai sus decât conturul parabolic, iar înălţimea maximă nu coincide cu mijlocul grinzii şi se găseşte puţin mai la o parte ; conturul scade în înălţime către mijlocul grinzii, ceea ce şi era de aşteptat, întru cât prin aceasta punctul de intersecţie al tălpilor se transferă în partea dreaptă şi porţiunea pozitivă a liniei de influenţă obţine o desvoltare predominantă.

Din considerente estetice însă, conturul acestor grinzi în partea dela mijloc se trasează după o linie dreaptă.

§ 35. Aplicarea cinematicei la construirea liniilor de influenţă la grinzile cu zăbrele

Procedeul de construcţie a liniilor de influenţă la grinzi sub forma unei epure a deplasărilor virtuale, expus în § 7, poate fi întrebuinţat şi pentru construirea liniilor de influenţă a eforturilor în barele grinzilor cu zăbrele.

Separând o bară aleasă arbitrar dintr'o grindă cu zăbrele, o transformăm prin aceasta într'un mecanism, ale cărui elemente pot să se rotească în jurul unor centre instantanee de rotaţie. Introducând însă un efort în locul barei ce am înlăturat, vom obţine un mecanism care se află în stare de echilibru sub acţiunea forţelor exterioare aplicate şi a efortului introdus pentru înlocuirea acelei bare. Acest meca-

*) **Notă :**
Paton, „Poduri", vol. I, § 93, Ed. 1930.
Proscureacov, „Mecanica Construcţiilor", p. 2-a etc.

nism poate să se deplaseze în limita deformațiilor compatibile ale barei îndepărtate. Deplasările virtuale ale elementelor de construcție care pot avea loc, provoacă și deplasarea liniei de încărcare cu care sunt legate, adică a liniei după care se deplasează pe grindă sarcinile care o solicită. Ordonatele liniei de încărcare astfel deplasate determină ele însile conturul epurei deplasării liniei de încărcare. Față de cele expuse în § 7, această epură reprezintă conturul liniei de influență pentru efortul din bara înlăturată, la scara corespunzătoare cu deformația compatibilă a acestei bare.

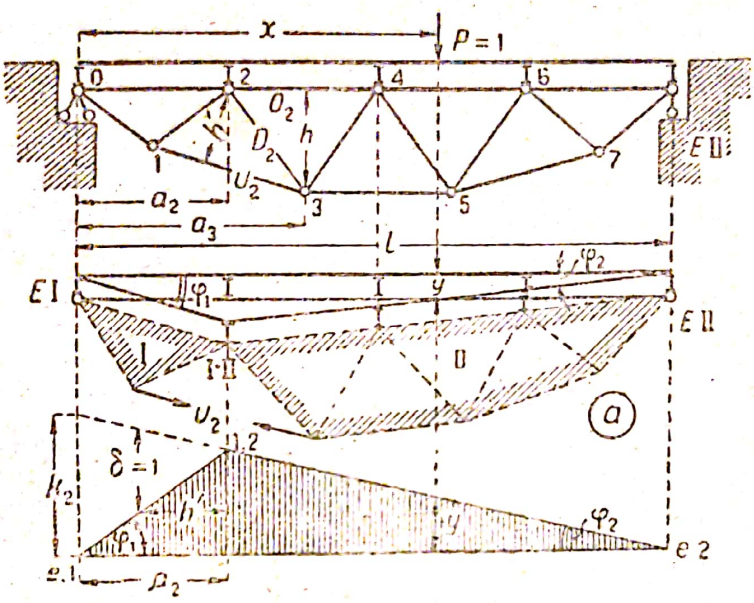


Fig. 148

Barele din tălpi

Dacă dintr'o grindă cu zăbrele îndepărtăm din talpă o bară, grinda se transformă într'un mecanism compus dintr'un reazim mobil și două elemente rigide indeformabile I și II, unite între ele prin articulația I—II și fixate de pământ prin reazimele articulate E I și E II.

In fig. 148 este reprezentat conturul deformării virtuale a unei grinzi cu zăbrele și a liniei sale de încărcare. Deoarece în cazul de față punctul de aplicație al sarcinii pe linia de încărcare coincide cu centrul I—II, linia de încărcare își va schimba direcția lângă acest nod și epura deplasărilor ei virtuale (fig. 148) este reprezentată prin două linii drepte *e*1—1,2 și *e*2—1,2; aceste drepte se intersectează între ele și cu pământul (*e*-*e*) pe verticalele care trec prin centrele de rotație respective.

Dacă nodul liniei de încărcare nu coincide cu centrul I—II, după cum se întâmplă când se îndepărtează bara O_2 (fig. 149), atunci când elementele I și II se deplasează, elementul III al liniei de încărcare se va roti în jurul centrelor I—III și II—III, din care cauză conturul epurei deplasărilor liniei de încărcare va fi reprezentat prin trei linii, în afară de linia de bază a pământului.

Trecând dela linia deplasărilor la linia de influenţă, trebue să determinăm scara liniei de influenţă şi semnul, ceea ce se face prin alcătuirea ecuaţiei lucrului mecanic virtual.

In mod obişnuit, bara îndepărtată se înlocueşte cu forţe de tensiune aplicate asupra elementelor rigide. Semnul lucrului mecanic efectuat de aceste forţe, ce se întroduc în ecuaţia de echilibru, depinde de direcţia forţei şi a deplasării punctelor lor de aplicaţie. Pentru determinarea direcţiei deplasărilor acelor puncte, se poate recomanda următorul procedeu:

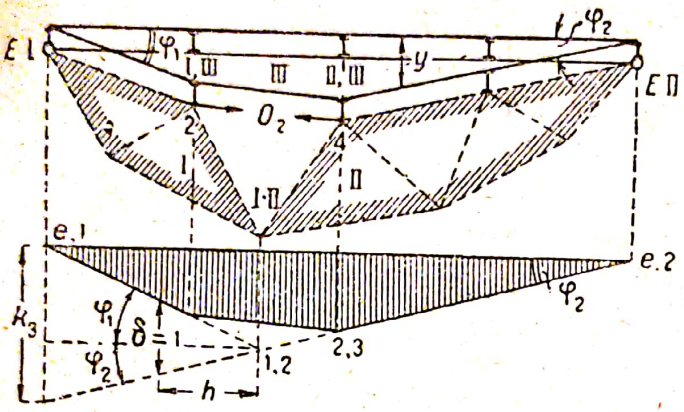


Fig. 149

Cazul 1. Centrul I—II care leagă elementele rigide I şi II se găseşte între centrele fixe E I şi E II ale aceloraşi elemente rigide (fig. 150-a). La rotirea elementelor rigide I şi II în jurul centrelor fixe, centrul I—II poate să se ridice sau să se coboare. In primul caz, distanţa între punctele *a* şi *b* se va mări, iar între punctele *c* şi *d* se va micşora; la deplasarea centrului I—II în sus, se produce o variaţie inversă a acestor distanţe.

Cazul 2. Centrul I—II se găseşte în afara limitelor distanţei E I şi E II (fig. 150-b); în acest caz deplasarea ambelor elemente rigide I şi II poate să se producă sau prin rotirea amândorora în sensul mersului acelor unui ceasornic, ori în sens invers. La rotirea elementelor rigide în sensul mersului acelor unui ceasornic, distanţa între punctele *a* şi *d* se va mări, iar aceea între punctele *c* şi *b* se va micşora.

Faţă de cele expuse, ecuaţia lucrului mecanic virtual, pentru cazul când se îndepărtează elementul O_2 (fig. 148), se va scrie astfel:

$$O_2 (\delta_1 + \delta_2) + Py = 0$$

de unde

$$O_2 = -P\frac{y}{\delta} \qquad (66)$$

iar pentru cazul când se îndepărtează elementul U_2 (fig. 149) avem:

$$-U_2 (\delta_1 + \delta_2) + Py = 0$$

de unde

$$U_2 = P\frac{y}{\delta} \qquad (67)$$

In ambele cazuri scara liniei de influenţă este valoarea deplasării:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = h\,(\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2)\ ,$$

în care φ_1 şi φ_2 sunt unghiurile de deplasare ale elementelor şi h braţul de pârghie al deplasărilor δ_1 şi δ_2 faţă de centrul I—II.

Valoarea δ se determină grafic prin segmentul intersectat de linia

Scanned with OKEN Scanner

din dreapta și din stânga a liniei de influență, pe verticala dusă la distanța h de verticala centrului I—II (fig. 148).

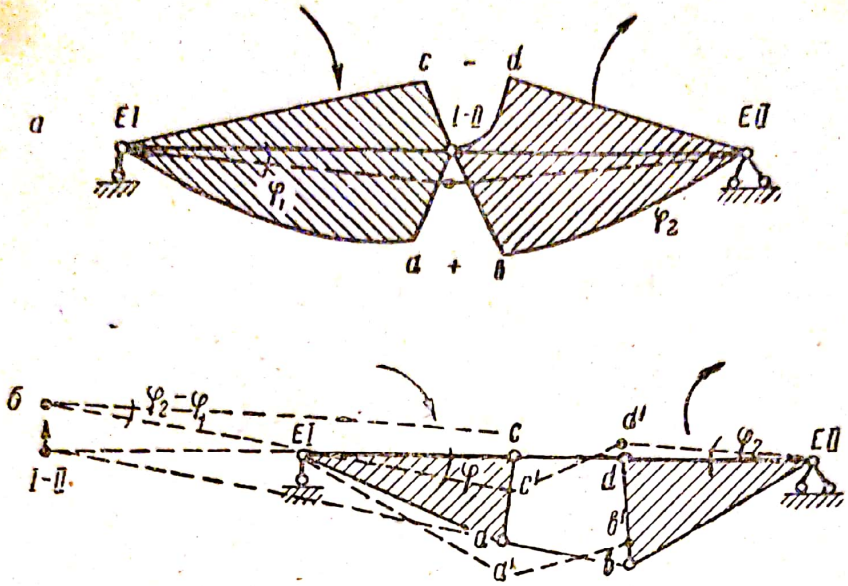


Fig. 150

Barele din zăbrele

Prin îndepărtarea din grindă a uneia dintre barele zăbrelelor, de exemplu a diagonalei D_2 (fig. 151), grinda se transformă într'un mecanism compus din patru elemente rigide și un reazim mobil. In fig. 151 este arătată schema deplasărilor virtuale ale elementelor rigide când

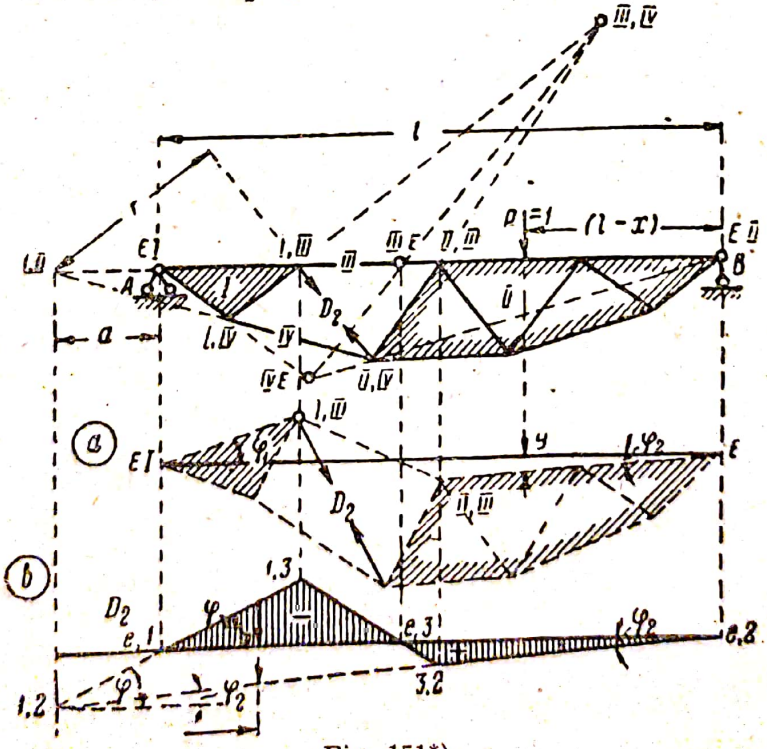


Fig. 151*)

*) **Observație la fig. 151:** Distanța pe orizontală r dela proiecția punctului 1, 2 până la verticală se consideră ca unitate.

se aplică sarcina P în elementul din dreapta II, care se lasă în jos pe măsură ce elementul din stânga I se ridică; această reciprocitate în deplasări este condiționată de poziția centrului I—II, ce se găsește în afară de distanța dintre centrele E I și E II. Epura deplasărilor (fig. 151) se compune din două drepte care trec prin punctele e 1 și e 2 și se intersectează în punctul 1—2 pe verticala centrului I—II. Prin proiecția 1—3 din centrul I—III pe linia din stânga și proiecția 3—2 pe linia din dreapta, se determină conturul epurei între nodurile de încărcare I—III și II—III.

Pentru a trece dela epura deplasărilor la linia de influență a barei, alcătuim ecuația lucrului mecanic virtual, după care

$$-D_2(\delta_1 + \delta_2) + Py = 0$$

de unde

$$D_2 = P\frac{y}{\delta_1 + \delta_2}; \qquad (68)$$

în care $\delta = \delta_1 + \delta_2 = r(\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2)$

φ_1 și φ_2 reprezentând unghiurile de rotire ale elementelor rigide.

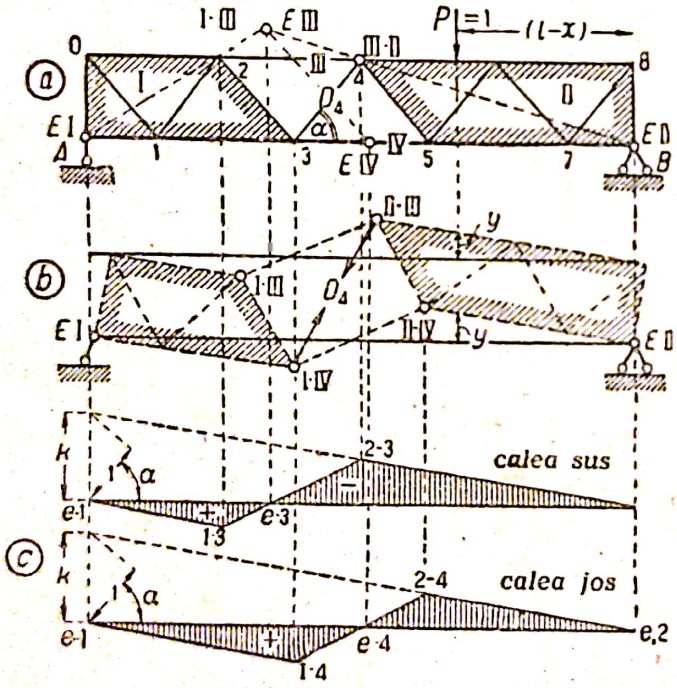


Fig. 152

Determinarea grafică a valorii lui δ este arătată în fig. 151 b.

La grinzile cu tălpi paralele (fig. 152) centrul I-II se află la infinit, de aceea dreptele principale e 1—1, 3 și e 2—2, 3, care formează conturul epurei deplasărilor, se intersectează la infinit. Conturul epurelor deplasărilor este arătat în fig. 152. Pentru a trece dela epurele deplasărilor la liniile de influență, alcătuim ecuația lucrului mecanic virtual. Prin aplicarea sarcinii $P = 1$ pe elementul din dreapta, ecuația lucrului mecanic virtual este:

$$-D_4(\delta_1 + \delta_2) + Py = 0$$

de unde

$$D_4 = +P\frac{y}{\delta} = \frac{y}{\delta_1 + \delta_2} \qquad (69)$$

In acest caz, deplasarea relativă completă a ambelor elemente rigide în direcție verticală se determină de segmentul K egal cu 1, iar valoarea δ a deformației virtuale după direcția diagonalei se determină prin proiectarea deplasării K pe direcția diagonalei

$$\delta = 1 \cdot \sin\varphi$$

Probleme și exerciții

33. Să se explice, utilizând procedeele cinematice, formarea contururilor liniilor de influență pentru grinda cu zăbrele reprezentată în fig. 134.

34. Să se arate ordinea de succesiune la construirea liniei de influență a montantului V_2 din grinda reprezentată în fig. 153 și să se determine scara pentru aceasta. Să se verifice dacă punctul cu ordonata zero, e 3, al proiecției centrului instantaneu de rotație E III este exact așezat.

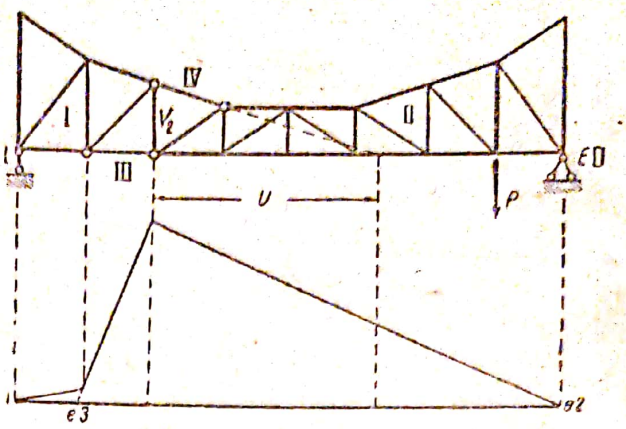


Fig. 153

Indicații. Pentru construirea liniei de influență, trebue să se ia ca linie de referință dreapta ce caracterizează deplasarea elementului II sau I.

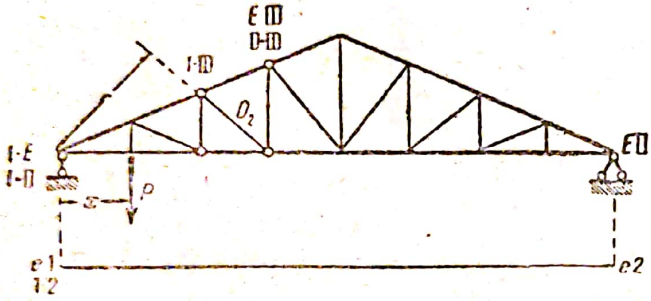


Fig. 154

Pentru ca să determinăm poziția exactă a punctului *e* 3, trebue să ne conducem după construcția din fig. 151.

35. Să se construiască linia de influență a diagonalei D_2 în ferma reprezentată în fig. 154.

Indicație. In acest caz centrul I—II coincide cu E I, iar II—III cu E III. Construcția trebue începută cu linia dreaptă ce caracterizează deplasarea elementului I.

36. Să se arate dacă construcția liniei de influență a montantului (fig. 155) este corectă, linia de influență fiind încărcată în nodurile superioare.

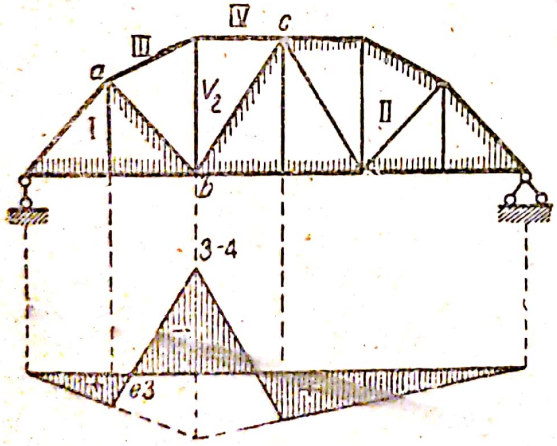


Fig. 155

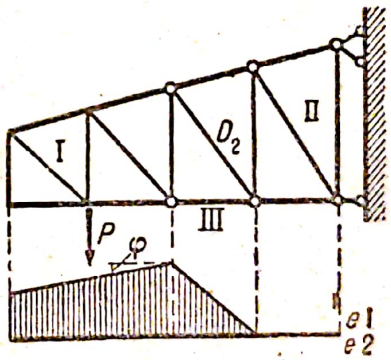


Fig. 156

Indicații. La construirea liniei de influență trebue să găsim poziția centrelor I—IV și II—III, apoi urmează să aflăm poziția centrelor E III și E IV, iar după aceasta poziția proiecțiilor lor *e* 3 și *e* 4, ceea ce permite trasarea epurei deplasărilor.

Scara liniei de influență se determină din condiția de deformare a montantului, când sarcina se găsește în afara nodului.

37. Să se construiască linia de influență a diagonalei D_2 într'o grindă cu zăbrele în consolă (fig. 156).

Indicație. In acest caz proiecțiile centrelor *e* 1 și *e* 2 coincid; este de asemenea evident că elementul rigid II rămâne invariabil.

CAPITOLUL 6

GRINZI CU ZĂBRELE CU BARE COMPUSE

§ 36. Noţiuni generale despre modul cum lucrează grinzile cu zăbrele cu bare compuse

Dacă într'o grindă cu zăbrele cu bare drepte având secţiune plină, înlocuim una sau câteva bare prin grinzi cu zăbrele independente, rigide şi static determinate (fig. 157), vom obţine o nouă grindă cu zăbrele, care va fi static determinată, însă spre deosebire de grinzile cu bare simple va avea unele bare compuse.

Schema unei grinzi cu zăbrele formată de axele barelor compuse se numeşte *schemă fundamentală*. Dacă încărcarea se transmite numai în nodurile schemei fundamentale, introducerea în alcătuirea ei a barelor compuse în locul barelor simple nu va schimba condiţiile ei de echilibru.

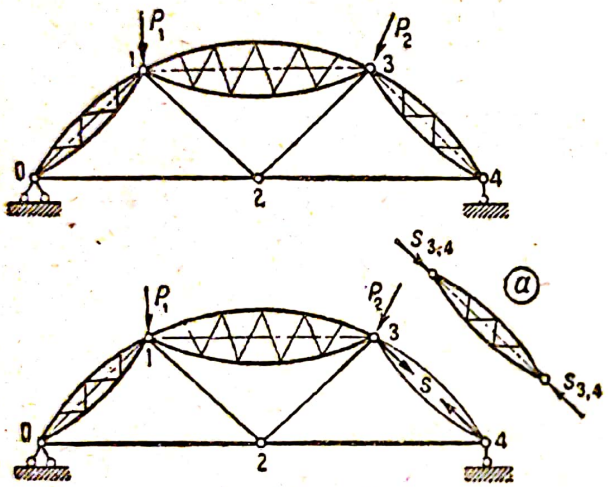


Fig. 157

Eforturile din barele schemei fundamentale trebue să fie egale, opuse ca direcţie şi orientate după dreptele care leagă centrele articulaţiilor în noduri, iar barele compuse se vor găsi sub acţiunea a două forţe axiale opuse S (fig. 157, a) a căror valoare se determină din condiţiile de echilibru ale schemei fundamentale.

Introducerea în alcătuirea unei grinzi a barelor compuse poate fi justificată în cazurile când încărcarea grinzii principale trebue să fie aplicată şi în afară de noduri, adică pe porţiunile ce se găsesc între nodurile grinzii.

Barele simple aflate sub acţiunea sarcinilor aplicate în afara nodurilor pot fi considerate drept grinzi simplu rezemate (fig. 158), care transmit încărcarea lor sub formă de reacţiuni A şi B în nodurile grinzii principale şi sunt supuse la încovoiere prin această încărcare.

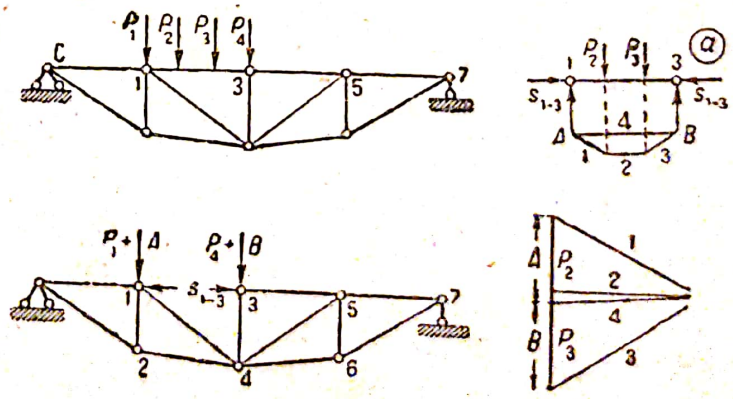


Fig. 158

Rezistenţa totală a acestor bare, ce se găsesc simultan sub acţiunea efortului S din schema fundamentală şi sub acţiunea momentului încovoietor produs de încărcarea în afară a nodului, se determină prin expresia :

$$\sigma = \frac{S}{F} + \frac{M}{W}$$

Pentru a înlătura încovoierea barelor simple, acestea se înlocuesc cu bare compuse, adică cu grinzi cu zăbrele, în care acțiunea de încovoiere a sarcinilor aplicate în afara nodurilor se transformă în eforturi axiale. Astfel *elementele unei bare compuse suportă un efort general, alcătuit din acțiunea forței axiale S (N_0) a schemei fundamentale și acțiunea efortului local N dat de încărcarea locală.*

Alcătuirea barelor compuse poate fi foarte variată.

In fig. 159-a este arătată o grindă cu zăbrele compuse, având aspectul unor adevărate grinzișoare cu zăbrele.

In majoritatea cazurilor barele compuse se alcătuesc din grinzi cu zăbrele, la care una din tălpi se confundă cu direcția efortului axial al schemei fundamentale. In fig. 159 sunt reprezentate cu linii groase contururile schemelor fundamentale, iar cu linii subțiri contururile barelor compuse la două tipuri de asemenea grinzi. La o astfel de distribuire a barelor, toate eforturile N_0 din schema fundamentală se preiau de talpa barei compuse, care se confundă cu direcția efortului axial; celelalte elemente ale barei compuse iau numai *eforturile date de încărcarea locală*, ceea ce rezultă evident din condițiile de echilibru în secțiunile acestei bare compuse.

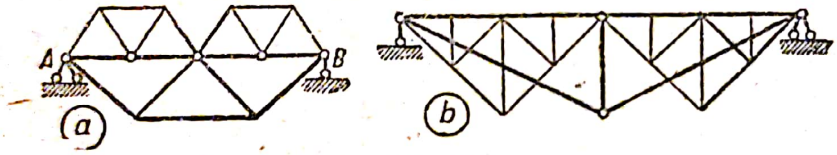


Fig. 159

Adeseori grinzile cu zăbrele ale barelor compuse se așază în așa fel, încât se confundă cu barele schemei fundamentale, nu numai cu talpa ci și cu celelalte elemente.

In fig. 160 este reprezentată schema fundamentală a unei grinzi cu zăbrele de sistem dreptunghiular, în care sunt introduse barele compuse 1-*m*-2, 2-*n*-3 sub forma unor grinzi cu tiranți, având nodurile *U*, *V* etc. [1]) suspendate de ele.

Considerând grinda cu zăbrele cu bare compuse ca rezultat al alcătuirii ei dintr'o grindă simplă cu zăbrele și din grinzi cu zăbrele auxiliare, calculele se pot simplifica adeseori.

Intr'adevăr, într'o astfel de grindă cu zăbrele se pot separa din structura ei geometrică:

1. Barele care intră în alcătuirea schemei fundamentale, deci având numai eforturile N_0 ale sistemului fundamental; în fig. 160 acestea sunt barele 0-1, 1'-0, 1'-2', 2-2' etc.

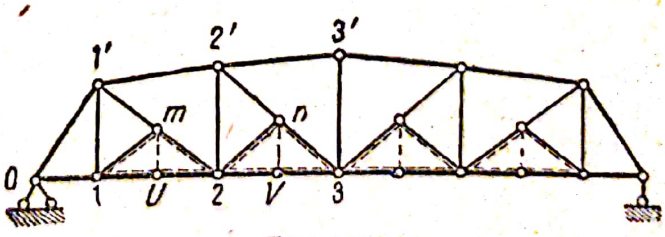


Fig. 160

2. Barele care intră în compunerea schemei funda-

[1]) **Notă.** Calculul grinzilor cu zăbrele de acest gen a fost studiat în mod amănunțit de Prof. *L. D. Proscureacov* în 1896.

mentale şi în conturul barei compuse; acestea suportă deci rezistenţa totală provenită atât din eforturile N_0 ale schemei principale, cât şi din eforturile N_{locale}, adică din încărcarea locală a barei respective; în fig. 160 acestea vor fi barele 1-2, 2-m, 3-n etc. Efortul total din ele este determinat prin suma:

$$N_0 + N_{local} = N_{II};$$

3. Barele care intră numai în alcătuirea barei compuse şi suportă numai rezistenţele provenite din eforturile locale N_{local}, adică din încărcarea locală asupra acestei bare; în fig. 160 acestea sunt barele m-n, m-1 etc.

§ 37. Determinarea analitică a eforturilor

Determinarea analitică a eforturilor în grinzile cu zăbrele compuse prezintă dificultăţi, prin faptul că la asemenea grinzi nu este întotdeauna posibil să se facă o secţiune prin trei bare, ceea ce ar fi permis să se determine direct valoarea efortului dintr'o singură ecuaţie. Această dificultate poate fi evitată dacă la această determinare considerăm eforturile ca fiind rezultate din adăugirea celor din sistemul fundamental la cele din grinzile cu zăbrele suplimentare, ţinând seama de distribuirea din nou a sarcinilor între nodurile principale, produse la grinzile suplimentare cu zăbrele. Este cel mai bine ca aceste procedee să fie urmărite pe exemple.

De exemplu se cere să se determine efortul în elementul din talpa O_2'–$_4'$, aparţinând grinzii reprezentate în fig. 161 şi încărcată prin talpa inferioară cu sarcina uniform repartizată q kg/m. Această grindă se compune din schema fundamentală şi din grinzile cu zăbrele suplimentare în formă de macaz cu tiranţi. Incărcarea continuă este repartizată în toate nodurile tălpii inferioare sub forma unor sarcini concentrate qd. Insă prin îndepărtarea din grinda cu zăbrele a grinzilor suplimentare cu tiranţi, această încărcare este ridicată dela nodurile 3, 5, 7 şi 9 şi repartizată la nodurile superioare respective. O astfel de nouă distribuire a sarcinilor nu modifică reacţiunile.

Efortul în bara O_2'–$_4'$ poate fi determinat prin două procedee:

1. Ducând secţiunea s-s, intersectăm trei bare ale schemei fundamentale şi putem determina valoarea acestui efort pe calea obişnuită ca la o grindă simplă, formând ecuaţia momentelor în raport cu nodul 4; la o astfel de secţionare, încărcarea ce se transmite la nodul 3 se referă la partea din dreapta, deci nu se introduce în ecuaţia de echilibru a părţii din stânga;

$$O_2'-_4' = -\frac{1}{h_4 \cos\gamma}\left[\frac{ql}{2}\cdot 4d - qd\left(\frac{1}{2}4d + 3d + 2d\right)\right] =$$

$$= -\frac{qd}{h_4 \cos\gamma}(2l - 7d).$$

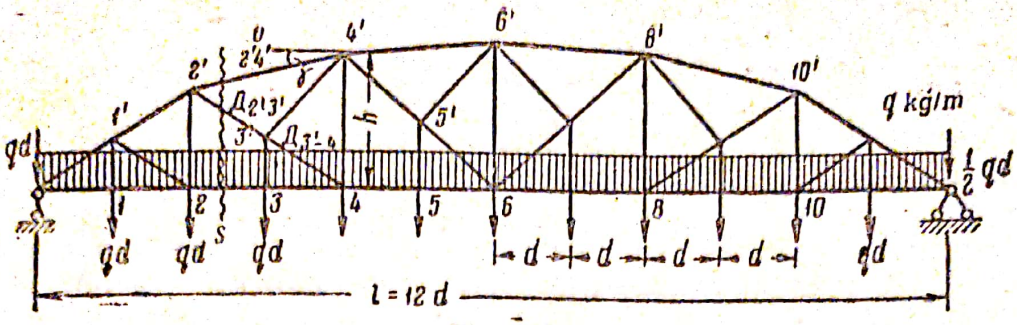


Fig. 161

2. Dacă considerăm efortul în elementul $O_2'-_4'$ ca fiind compus din efortul în schema fundamentală și din efortul în ferma 2', 3', 4', atunci izolând ferma și sarcina ce se transmite în ea din nodul 3 (fig. 162) trebue să transmitem reacțiunile egale cu 1/2 qd în nodurile 2' și 4' ale tălpii superioare.

In acest caz, pentru aceeași secțiune s-s, efortul în elementul $O_2'-_4'$ al schemei principale se va scrie astfel:

$$O_2'-_4' = -\frac{1}{h_4 \cos\gamma}\left[\frac{ql \cdot 4d}{2} - qd\left(\frac{1}{2}\,4d + 3d + 2d + \frac{1}{2}\,2d\right)\right] =$$

$$= -\frac{qd}{h_4 \cos\gamma}(2l - 8d).$$

Efortul $O'_2'-_4'$ în talpa fermei

$$O'_2'-_4' = -\frac{1}{2}\,2d\,\frac{qd}{2h\cos\gamma} = -\frac{qd^2}{h_4 \cos\gamma}$$

Aici $h = \frac{1}{2}h_4$, ceea ce se vede din schema grinzii cu zăbrele.

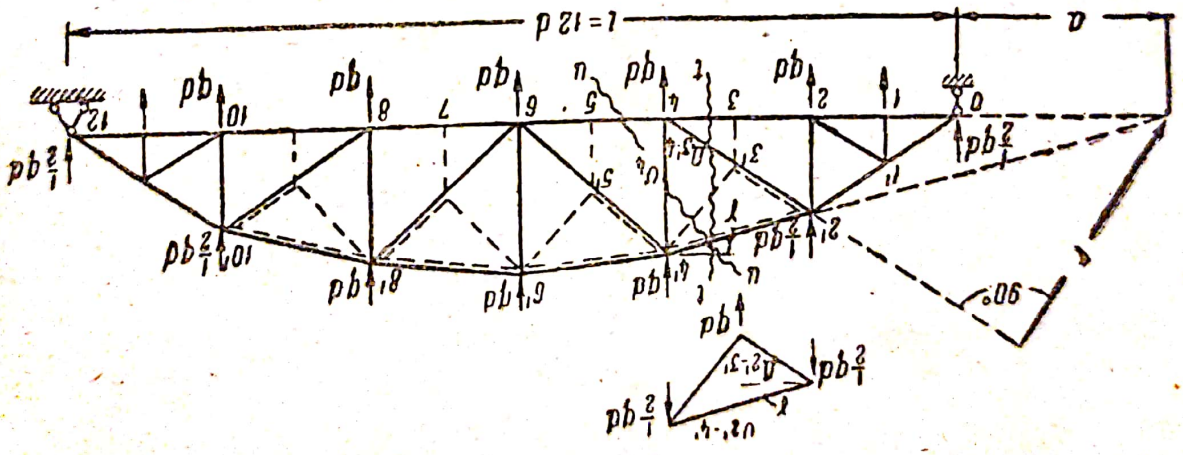


Fig. 162

Efortul total în elementul $O_2'-_4'$ este:

$$O_2'-_4' = -\frac{-qd}{h_4 \cos\gamma}(2l - 8d + d) = -\frac{qd}{h_4 \cos\gamma}(2l - 7d)$$

Scanned with OKEN Scanner

Printr'un mijloc analog, folosind secțiunea s-s, se poate determina din ecuația momentelor în raport cu punctul K și efortul în elementul diagonalei $D_3'-_3'$, care intră în compunerea schemei fundamentale și a fermei 2' 3' 4'.

Pentru determinarea efortului în elementul $D_3'-_4$ al diagonalei, trebue să ducem secțiunea t-t, care taie patru elemente ale grinzii cu zăbrele. Elementul $D_3'-_4$ al diagonalei intră numai în alcătuirea schemei fundamentale, de aceea calea cea mai simplă pentru determinarea efortului din acest element ar fi să considerăm numai schema principală, eliminând ferma 2' 3' 4', dar transferând sarcinile din nodul 3, preluate de fermă, în nodurile 2' și 4', întru cât aceste noduri suportă reacțiunile fermei (fig. 162).

In aceste condiții, valoarea efortului în $D_3'-_4$ se determină din ecuația momentelor în raport cu punctul K (fig. 162).

$$D_3'-_4 = \frac{1}{r}\left\{\frac{ql}{2}a + qd\left[\frac{1}{2}a + (a+d) + (a+2d) + \frac{1}{2}(a+2d)\right]\right. =$$

$$= \frac{qd}{r}\left(\frac{l}{2} - \frac{5}{2}d - 3\frac{d^2}{a}\right)$$

Prin același procedeu se determină și efortul în montantul V_4, făcându-se secțiunea u-u. Montantul V_4 intră numai în schema fundamentală, de aceea fermele 2' 3' 4' și 4' 5' 6' pot fi îndepărtate, însă încărcarea preluată de ele dela nodurile 3 și 5 trebue transmisă la nodurile 2' 4' și 6', ca fiind reacțiunile date de fermă în aceste noduri (fig. 162).

Atunci efortul în montant se va scrie astfel:

$$V_4 = -\frac{1}{a+4d}\left\{\frac{ql}{2}a - qd\left[\frac{1}{2}a + (a+d) + (a+2d) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}(a+2d) + (a+4d)\right]\right\} = \frac{qa}{a+4d}\left(\frac{l}{2} - 5d - 7\frac{d^2}{a}\right)$$

Celelalte cazuri ale procedeelor analitice pentru formarea ecuațiilor eforturilor sunt arătate la alcătuirea ecuațiilor liniilor de influență.

§ 38. Construcția liniilor de influență

Construcția liniilor de influență pentru grinzile cu zăbrele cu bare compuse se simplifică mult datorită particularităților geometrice de trasare a liniilor de influență.

Să urmărim procedeul analitic de alcătuire a ecuației liniilor de influență și construcția acestora pe mai multe exemple.

Grinzi cu zăbrele cu macazuri suplimentare. In grinda cu zăbrele reprezentată în fig. 163, schema fundamentală este de sistem dreptunghiular, ale cărei panouri sunt împărțite în două prin introducerea unor semimontanți suplimentari, susținuți de barele compuse ale tălpii superioare, care au aspectul unor ferme în macaz 2'-3'-4', 4'-5'-6' etc.

Scanned with OKEN Scanner

Barele suplimentare sunt tiranții (semimontanții) 1—1′, 3—3′ și elementele macazelor care nu se confundă cu elementele schemei generale 3′—4′, 5′—6′ și lucrează la încărcarea locală, ceea ce se poate determina ușor prin separarea nodului de care sunt legate.

Prin separarea nodurilor 1, 3 etc. și din condițiile lor de echilibru în raport cu axa verticală, rezultă că eforturile în toți montanții suplimentari 1—1′, 3—3′..... sunt egali cu valoarea sarcinii aplicate în nod:

$$V_1 = P\,;\ V_3 = P\,;\ \ldots\ V_7 = P$$

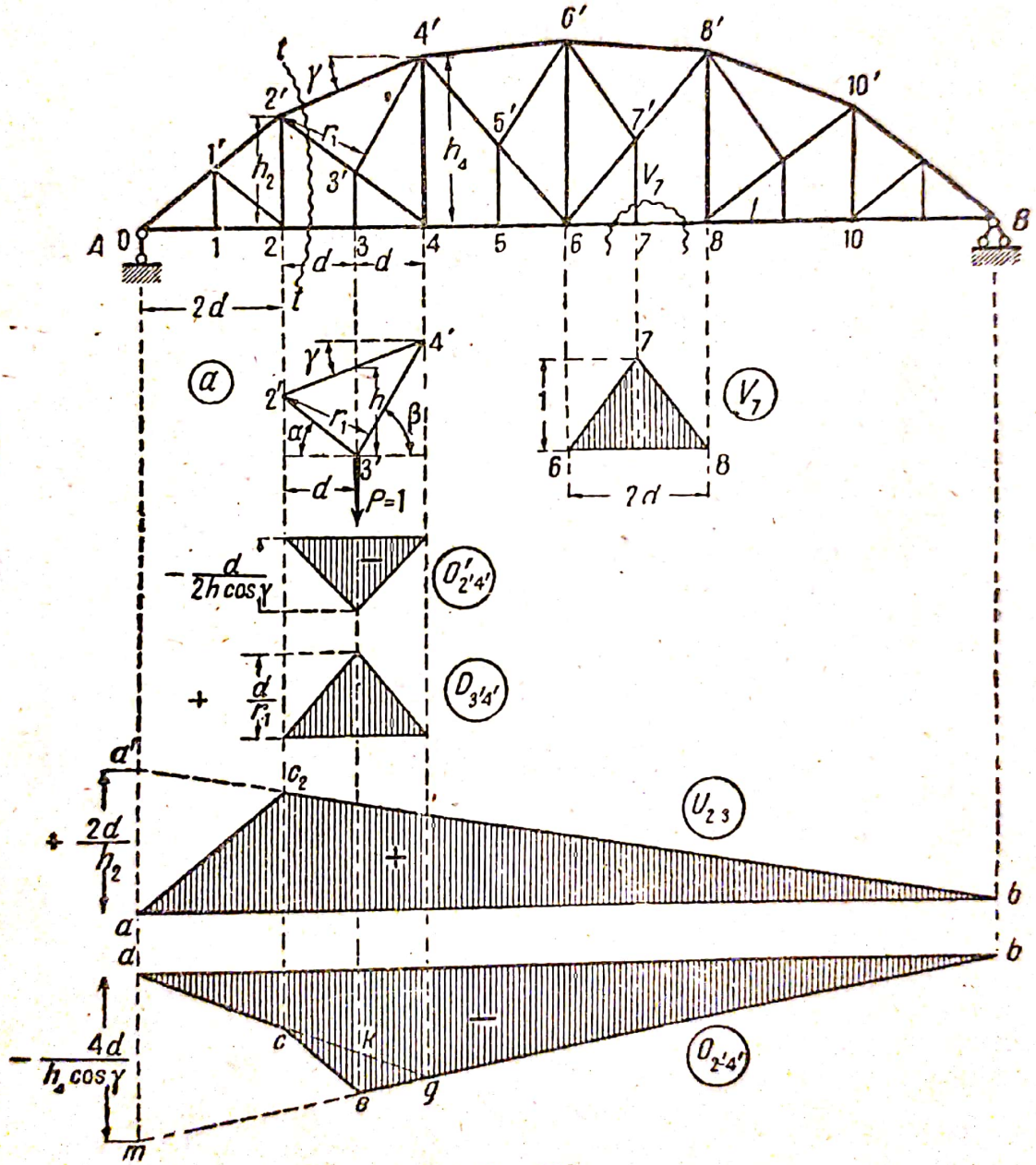


Fig. 163

Linia de influență a montanților suplimentari are forma unui triunghiu (fig. 163, V_7).

În acest fel asupra fiecărei ferme-macaz va acționa sarcina completă P, aplicată în nodul inferior al schemei fundamentale și care se transmite prin intermediul macazului la nodurile superioare ale fermei principale.

Efortul în bara 3′—4′ poate fi determinat pe două căi: în primul rând din condițiile de echilibru ale nodului separat 3′, alcătuind ecuațiile proiecțiilor în raport cu axa normală pe diagonala $D_2'_{-3}'$ și în al doilea rând ca efort în talpa macazului (fig. 163-a) din ecuația momentului forțelor în raport cu punctul 2′:

$$D_3'_{-4}' = P\,\frac{d}{r_1} \qquad (70)$$

Linia de influență a acestei bare va avea forma triunghiulară, cu ordonata maximă egală cu d/r_1.

Dacă ar mai fi nevoie să determinăm și efortul suplimentar provocat de acțiunea macazului în bara $O_2'_{-4}'$ a tălpii superioare, acest efort poate fi dedus în mod analog ca în cazul precedent, din condițiile de echilibru ale elementelor macazului în raport cu nodul 3′:

$$O'_2{}'_{-4}' = -\,P\frac{d}{2h\,\cos\gamma}\,. \qquad (71)$$

Barele din tălpi. Eforturile în barele U_{2-3} și U_{3-4} ale tălpii inferioare se determină după secțiunea t-t din ecuația momentelor în raport cu nodul 2′ al tălpii superioare, ca și la grinda simplă cu zăbrele și sunt egale cu M_2/h_2.

Linia de influență a efortului în aceste bare se construește prin procedeele obișnuite (fig. 163) și va avea aceeași formă ca și în cazul unei grinzi simple cu zăbrele, ceea ce și era de așteptat, deoarece în alcătuirea tălpii inferioare intră bare suplimentare.

Efortul în bara $O_2'_{-4}'$ a tălpii superioare se determină prin aceeași secțiune t-t, însă din ecuația momentelor în raport cu nodul 4 al tălpii inferioare:

$$O_2'_{-4}' = -\frac{M_1}{h_4\,\cos\gamma}$$

Linia de influență a acestui efort se construește pe calea obișnuită, adică prin așezarea pe verticală, în dreptul reazimului A, a ordonatei egale cu $-\dfrac{4d}{h_4\,\cos\gamma}$ (fig. 163).

Dacă această bară ar aparține numai schemei fundamentale, linia ei de influență, construită după regula generală, ar avea forma triunghiulară, cu vârful g în dreptul punctului de momente. Introducând însă nodul suplimentar 3 și prin transmiterea eforturilor prin macaz, partea din dreapta liniei de influență trebue să fie extinsă până în ultimul nod din dreapta secțiunii, care este nodul 3 și de aceea conturul liniei de influență trebue să fie prelungit prin linia dreaptă $b\ g$ până la punctul e sub nodul 3, deci linia de influență va lua forma unui dreptunghiu $a\ c\ e\ b$. Triunghiul suplimentar $c\ e\ g$, în construcția liniei de influență a acestei bare, spre deosebire de linia

Scanned with OKEN Scanner

de influenţă a grinzii simple cu zăbrele, este rezultatul însumării efortului principal cu cel suplimentar provenit din încărcarea locală a macazului.

Intr'adevăr, din asemănarea triunghiurilor *a m g* şi *e k g* rezultă că:

$$\frac{ek}{d} = \frac{am}{4d}$$

Substituind valoarea lui *am* şi având în vedere că potrivit cu planul grinzii $h_4 = 2h$, vom obţine segmentul:

$$ek = \frac{4d \cdot d}{h_4 \cos \gamma 4d} = \frac{d}{2h \cos \gamma},$$

egal cu ordonata liniei de influenţă a barei fermei în macaz, după formula 71.

Trebue să menţionăm că această construcţie simplă a liniei de influenţă a elementului din talpă, prin proiectarea nodului 2 în punctul *e* pe linia din dreapta, a fost posibilă numai datorită proporţionalităţii ce are loc:

$$\frac{h_4}{h} = \frac{2d}{d} = 2$$

iar în lipsa acestei proporţionalităţi, ordonata sub nodul 3 ar fi trebuit să fie calculată.

Diagonalele

Efortul în partea inferioară a diagonalei $D_3'-_4'$, întru cât nu cuprinde conturul fermelor în macaz, trebue să fie egal cu efortul unei grinzi simple cu zăbrele, care se determină după secţiunea *s-s* din ecuaţia momentelor în raport cu punctul de intersecţie *K* al barelor tălpii (fig. 164)

$$D_3'-_4' = A \frac{a}{r} \qquad (72)$$

Deoarece introducerea macazului nu influenţează efortul acestei părţi a diagonalei, nodurile din margine, faţă de secţiunea *s-s*, vor fi nodurile 2 şi 4 şi de aceea linia de influenţă va avea forma unui patrulater *a c m b* (fig. 164).

Această formă a liniei de influenţă se obţine prin îndepărtarea influenţei contrafişei. In realitate însă prin secţiunea după *s-s* se taie şi bara $D_3'-_4'$, al cărei efort trebue să intre în ecuaţia de echilibru. De aceea urmează să dovedim că linia de influenţă obţinută este exactă. Intru cât bara $D_3'-_4'$ lucrează numai la încărcarea locală când sarcina se găseşte în nodul 3, atunci atât timp cât sarcina este aplicată în dreptul secţiunii efortul în diagonală se determină prin expresia 72; linia de influenţă determinată prin segmentul ordonatei *a/r* în dreptul reazimului din stânga îşi păstrează conturul său după dreapta *bm*. Când sarcina este aplicată în partea din stânga, linia de influenţă se trasează prin dreapta *ac*, care pentru porţiunea din stânga trebue să fie extinsă până la punctul *g*, în dreptul nodului din stânga 3; însă

Scanned with OKEN Scanner

când sarcina se va găsi în nodul 3, atunci va începe să lucreze bara $D_3'_{-4'}$, al cărei efort va reduce efortul din diagonală, după cum se vede din echilibrul porțiunii din dreapta grinzii cu zăbrele:

$$-D_3'_{-4}\, r - B\,(l+a) + D_3'_{-4'}\, R = 0\,,$$

de unde

$$D_3'_{-4} = -\frac{1}{r}\left[B\,(l+a) - D_3'_{-4'}\, R\right]$$

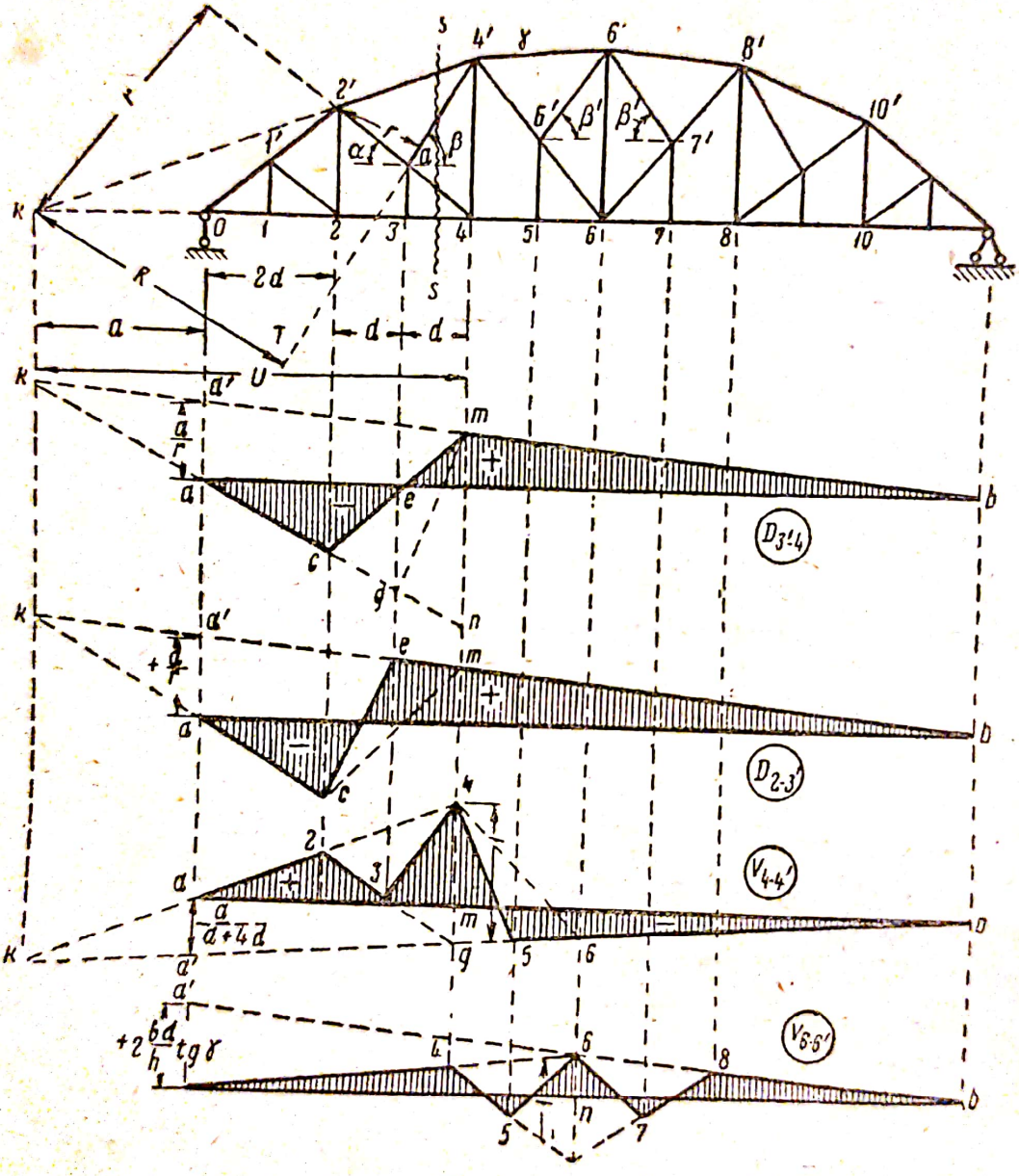


Fig. 164

Influența efortului $D_3'_{-4'}$ se determină prin scăderea triunghiului *cgm* din linia de influență. Într'adevăr, din asemănarea triunghiurilor *kaa'* și *kmn* rezultă că ordonata

$$mn = \frac{u}{v},$$

iar din asemănarea triunghiurilor $c\ e\ g$ și $c\ m\ n$ rezultă că ordonata

$$e\ g = \frac{u}{2r}$$

Efortul în bara $D_3'_{\ 4'}$ pentru poziția sarcinii în nodul 3 se determină printr'o valoare egală cu $1\ \frac{d}{r_1}$, iar influența lui asupra efortului în diagonala $D_3'_{-4}$ se determină cu valoarea:

$$D_3'_{-4} \cdot \frac{R}{r} = \frac{d}{r_1}\ ,\ \frac{R}{r} \qquad (A)$$

Raportul R/r poate fi exprimat din asemănarea triunghiurilor din grinda cu zăbrele însăși $k\ 4'\ T$ și $2'\ 4'\ Q$ și a triunghiurilor $k\ 2\ 2'$ și $k\ 4\ 4'$ astfel:

$$\frac{R}{r_1} = \frac{k\ 4'}{2'—4'} = \frac{k\ 4}{2\ —\ 4} = \frac{u}{2d}$$

Substituind acest raport în expresia de mai sus, obținem ordonata liniei de influență

$$D_3'_{-4}\ \frac{R}{r} = \frac{u}{2r}\ e\ g$$

Astfel după scădcrea din linia de influență $a\ m\ b$ a ordonatei $e = u/2r$, ca va avea forma $a\ c\ m\ b$, deci forma liniei de influență a unei grinzi simple cu zăbrele, după cum s'a arătat mai înainte.

Efortul în partea superioară a diagonalei $D_2'_{-3'}$ se determină după secțiunea $t—t$, din ecuația momentelor în raport cu punctul k de intersecție al barelor tălpilor. Dacă sarcina este aplicată în partea din dreapta, efortul în diagonală se determină prin ecuația:

$$D_2'_{-3}\ r — Aa = 0$$

și de aceea linia de influență este reprezentată printr'o linie dreaptă $b\ k$ (fig. 164), care rămâne valabilă pentru cazurile când sarcina se aplică în orice nod din dreapta secțiunii, adică până la nodul 3, iar conturul liniei de influență va fi limitat de patrulaterul $a\ c\ e\ b$.

Dacă am considera numai schema fundamentală a grinzii cu zăbrele, atunci conturul liniei de influență ar fi trasat după patrulaterul $a\ c\ m\ b$. Triunghiul suplimentar $c\ e\ m$ nu este altceva decât efortul suplimentar datorit îmbinării cu diagonala barei $2'—3'$ care aparține fermei în macaz, ceea ce a determinat includerea nodului 3 în partea din dreapta.

Montanții

Eforturile în montanți se determină din condițiile de echilibru ale nodurilor inferioare sau din condiția de echilibru a momentelor în raport cu punctul de intersecție k al elementelor tălpilor.

Să determinăm efortul din montantul $V_{4-4'}$.

Când sarcina este aplicată în afara nodului 4, efortul din montant este:

$$V_{4-4'} = — D_{4-3'} \sin \alpha\ ;$$

și prin urmare variază proporțional cu efortul din diagonală, iar linia

de influenţă a acestui efort va avea aspectul liniei de influenţă a diagonalei. Valoarea sin α din planul grinzii cu zăbrele se determină din raportul r/u şi de aceea linia de influenţă a montantului va avea pe verticală, în dreptul reazimului din stânga, ordonata: $\frac{a}{r} : \frac{r}{u} = \frac{a}{u}$, (fig. 164) şi conturul ei se va trasa prin patrulaterul $a\,2\,g\,b$, valabil pe întervalul dintre nodurile 0—3 şi 5—12.

Însă când sarcina va fi aplicată în nodul 4, efortul în montant va fi:

$$V_{4-4'} = - D_{4-3'} \sin \alpha + P ,$$

deci linia de influenţă în acest caz trebue să-şi schimbe forma; ordonata ei $m\,g$ sub nodul 4 trebue să fie micşorată cu valoarea $g4=1$, iar conturul liniei de influenţă urmează să fie modificat între nodurile vecine prin dreptele 3—4 şi 4—5.

Se poate demonstra că în linia de influenţă astfel obţinută, punctul 4 se găseşte exact pe dreapta $a2$ şi este determinat de aceasta. Intr'adevăr, din asemănarea triunghiurilor $R\,a\,a_1$ şi $R\,4\,g$, rezultă că ordonata

$$4g = \frac{a}{u} \cdot \frac{u}{a} = 1$$

Acelaşi contur al liniei de influenţă este reprezentat de liniile din dreapta şi din stânga, ce se intersectează în dreptul punctului momentelor k.

Linia de influenţă construită pentru montant este interesantă în sensul schimbării formei sale în raport cu repartizarea încărcării între nodurile superioare şi inferioare.

După cum se ştie, poziţia liniilor de bază, din stânga şi din dreapta, nu se modifică în raport cu poziţia sarcinilor, schimbându-se numai limitele lor de valabilitate. Dacă considerăm montantul $V_{4\ 4'}$ ca un montant al unei grinzi simple cu zăbrele, atunci încărcând nodurile inferioare, linia de influenţă s'ar fi trasat prin poligonul $a\,4\,6\,b$, iar atunci când se încarcă nodurile superioare — prin poligonul $a\,2\,g\,b$. Astfel pe de o parte, condiţiile de aplicare a sarcinilor la nodurile inferioare impun ca la poziţia sarcinii în nodurile 2, 4 şi 6, ordonatele liniei de influenţă să aibă vârfurile în punctele 2, 4 şi 6 ale conturului liniei de influenţă pentru nodurile inferioare; pe de altă parte, macazele preluând sarcinile dela semimontanţii 3—3' şi 5—5' le transmit nodurilor superioare; prin urmare când sarcinile sunt în nodurile 3 şi 5, vârfurile ordonatelor trebue să se găsească în punctele 3 şi 5 ale conturului liniei de influenţă, în cazul când se aplică sarcina în nodurile superioare. Aceste puncte determină exact linia de influenţă a montantului.

In fig. 164 este reprezentată linia de influenţă pentru montantul dela mijloc $V_{6-6'}$.

Când sarcina unitară este aplicată în toate nodurile, afară de nodurile 5 şi 7, efortul în montant va fi proporţional cu efortul din tălpi (64)

$$V_{6-6'} = + 2 \frac{M_6}{h_6} \operatorname{tg} \gamma$$

și deoarece, în aceste cazuri, diagonalele $D_5'_{-6}'$ și $D_6'_{-7}'$ nu lucrează ca elemente ale macazului, linia de influență trebue să fie determinată de triunghiul $a\,6\,b$, a cărui construcție este ușoară, fără alte explicații.

Dacă se aplică încărcarea în nodurile superioare, atunci pentru poziția sarcinii în nodul superior 6', efortul în montantul $V_{6-6'}$ va fi determinat de ecuația:

$$V_{6-6'} = + 2 \frac{M_6}{h_6} \operatorname{tg} \gamma - 1$$

și ordonata liniei de influență în dreptul acestui nod trebue să se determine scăzând din ordonata n-6 a liniei de influență, ordonata 6-6', egală cu 1 (unitatea); de aceea conturul liniei de influență ar fi reprezentat prin poligonul $a\,4\,6'8\,b$. In realitate însă nu avem încărcări în nodurile superioare; sarcina se transmite acestora numai datorită macazelor. Când sarcina unitară este aplicată în nodul 5', atunci lucrează bara $D_5'_{-6}'$ și efortul în montant va fi:

$$V_{6-6'} = 2 \frac{M_6}{h_6} \operatorname{tg} \gamma - D_5'_{-6}' \sin \beta';$$

iar când sarcina unitară ajunge în nodul 7, lucrează diagonala $D_6'_{-7}'$, în care caz efortul în montant va fi:

$$V_{6-6'} = 2 \frac{M_6}{h_6} \operatorname{tg} \gamma - D_6'_{7}' \sin \beta'.$$

In ambele cazuri, ordonatele trebuesc raportate la conturul superior 4-6'-8 al perimetrului liniei de influență, deoarece încărcarea se transmite în punctele acestui contur, iar linia de influență se va trasa prin poligonul $a\,4\,5\,6\,7\,8\,b$.

Grinda Fink

Grinda cu zăbrele înfățișată în fig. 165 poate fi considerată ca fiind compusă din schema fundamentală 0-4-8-4'-0 cu barele compuse 0-2'-4 și 4-6'-8, care la rândul lor au macaze suplimentare 0-1'-2, 2-3'-4 etc.

Deoarece barele tălpii superioare ale acestei grinzi vor intra în toate cele trei sisteme ale grinzii cu zăbrele, liniile lor de influență vor fi compuse din trei părți. Efortul în bara O_{3-4} a tălpii superioare se determină din secțiunea 1—1. Când sarcina unitară este aplicată în partea din dreapta grinzii cu zăbrele, efortul se determină din ecuația:

$$O_{3-4} = - A \frac{4d}{h}$$

și linia lui de influență va fi reprezentată prin linia din dreapta, având ordonata $- \frac{4d}{h}$ în dreptul reazimului din stânga. Dacă nu ar fi existat și grinda cu zăbrele suplimentară 0-2'-4, linia de influență totală ar fi avut forma triunghiului $a\,4\,b$.

Existența macazului 0-2'-4 cu punctele de reazim în nodurile 0 și 4 impune elementului O_{3-4} să lucreze și la încărcarea locală, atunci

Scanned with OKEN Scanner

când sarcina unitară se aplică în nodul 2. Efortul suplimentar respectiv pentru bara O_{3-4} va fi :

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2d}{h}=-\frac{d}{h}$$

și deoarece linia lui de influență va avea forma triunghiulară cu vârful sub nodul 2, se va adăuga, la linia de influență inițială a-4-b, triunghiul a 2 4 cu ordonata maximă d/h.

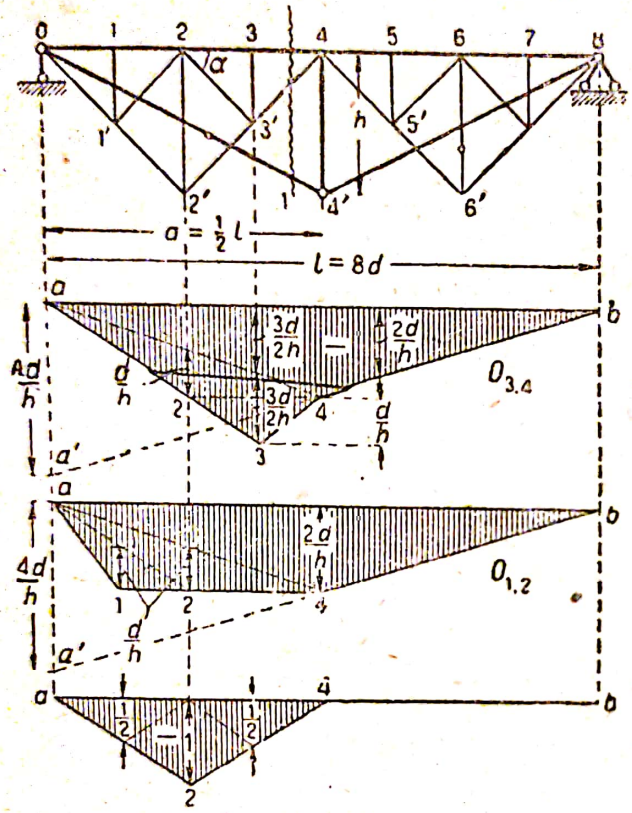


Fig. 165

In sfârșit, existența macazului 2-3'-4, având reazime în punctele 2 și 4, va impune barei O_{3-4} să lucreze și la încărcarea locală în nodul 3. Când sarcina unitară este aplicată în acest nod, efortul în bara O_{3-4} va fi egal cu :

$$-\frac{1}{2}\,\frac{d}{\frac{1}{2}h}=-\frac{d}{h}$$

și linia lui de influență va avea forma unui triunghiu ; deci la linia de influență obținută anterior pentru efortul din bara O_{3-4}, trebue să mai adăugăm și triunghiul 2-3-4, cu ordonata maximă în dreptul nodului egală cu d/h.

Astfel linia de influență totală a barei O_{3-4} se va trasa prin conturul a-3-4-b. Din raportul ordonatelor se poate constata ușor că linia a-2-3 va fi o linie dreaptă.

In aceeași fig. 165, în mod analog este reprezentată linia de influență pentru bara O_{1-2}, având conturul a-1-4-b.

Efortul în montantul $V_{2-2'}$ se va determina prin separarea nodului 2 și din ecuația proiecțiilor pe axa verticală (fig. 165).

Când sarcina unitară se aplică în nodul 2 ; efortul în montantul $V_{2-2'}=-1$.

Aplicând sarcina unitară în nodurile 1 sau 3, eforturile în montanți vor fi :

$$V_{2-2'}=-D_{1'\ 2}\sin\alpha\,;$$
$$V_{2-2'}=-D_{2-3'}\sin\alpha$$

Insă deoarece la aplicarea sarcinii unitare în nodul 1, efortul în diagonală este :

$$D_{1'-2}=\frac{1}{2}\sin\alpha$$

Scanned with OKEN Scanner

și atunci când sarcina unitară este aplicată în nodul 3, efortul în diagonală este:

$$D_{2-3'} = \frac{1}{2} \sin \alpha,$$

efortul respectiv al montantului va fi

$$V_{2-2'} = -\frac{1}{2}$$

Astfel linia de influență a montantului va avea forma unui triunghiu cu ordonatele în dreptul nodului 2 egale cu 1, iar în dreptul nodului 6 și 4 egale cu zero.

Probleme și exerciții

38. Să se determine analitic eforturile și elementele grinzii cu zăbrele, din fig. 165, încărcată cu o sarcină uniform repartizată.

Indicație. La determinarea eforturilor în elementele tălpii superioare, talpa trebue considerată ca făcând parte atât din schema fundamentală, cât și din grinzile cu zăbrele auxiliare. De exemplu se poate elimina grinda cu zăbrele auxiliare, însă atunci trebue să distribuim din nou încărcarea la nodurile principale (vezi § 37).

39. Să se confirme dacă construcția liniei de influență a efortului în barele notate ale grinzii cu zăbrele, reprezentată în fig. 166 și încărcată în nodurile inferioare, este exactă.

Să se demonstreze cum variază aceleași linii de influență, dacă tiranții macazelor vor fi înlocuiți cu montanți întregi în cazul încărcării nodurilor superioare.

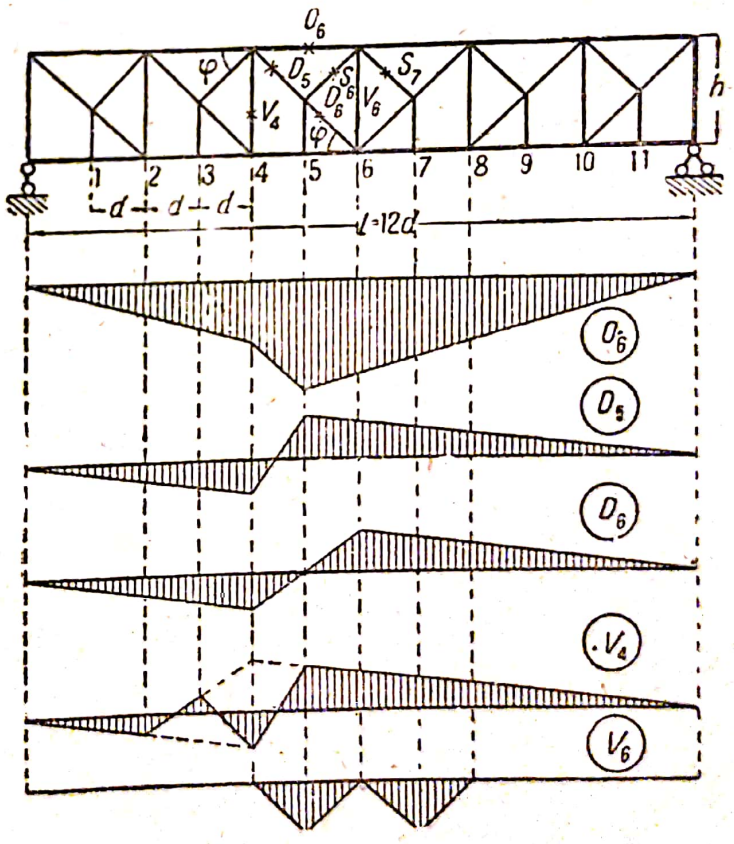


Fig. 166

Indicații. Mai întâi trebue să se determine schema fundamentală și grinzile suplimentare cu zăbrele, stabilind în ce parte trebue să se transmită încărcarea dela nodurile fără soț ale tălpii inferioare. Efortul în montantul V_6 trebue determinat prin separarea nodului superior.

40. Să se determine eforturile în barele notate ale grinzii cu zăbrele din fig. 167, în cazul încărcării în nodurile inferioare cu o sarcină uniform repartizată. Să se calculeze aceleași eforturi și după suprafețele liniilor de influență.

Indicații. Stabilind forma grinzilor auxiliare cu zăbrele, trebue să distribuim încărcarea uniform repartizată la nodurile schemei principale și să alcătuim eforturile ca fiind o sumă a eforturilor din această schemă și din grinzile cu zăbrele auxiliare.

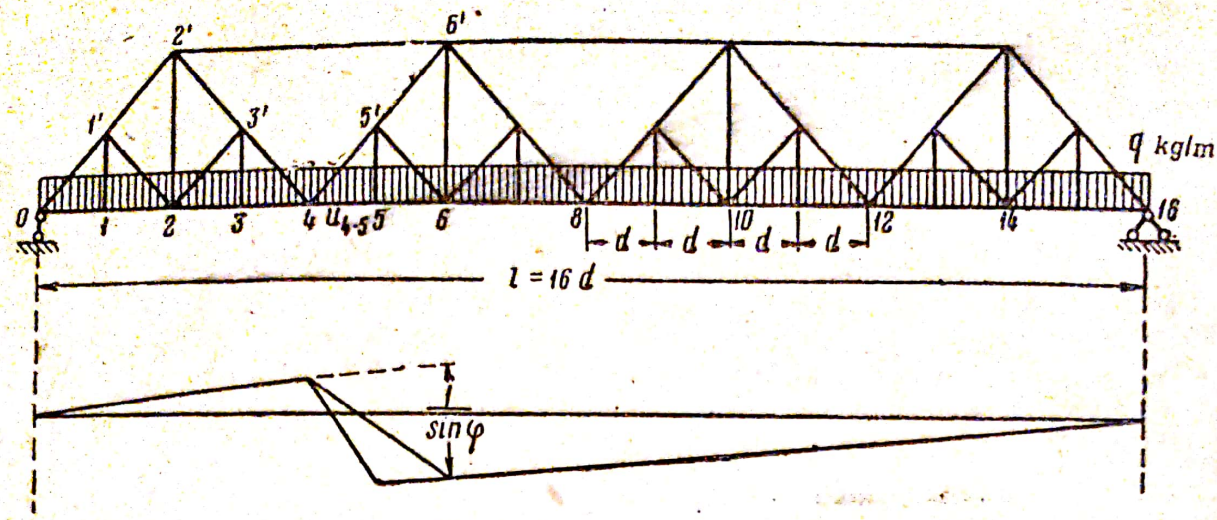


Fig. 167

41. Să se demonstreze dacă contururile liniilor de influenţă ale eforturilor în barele D_4 şi V_5 (fig. 168) sunt exacte şi să se construiască liniile de influenţă ale eforturilor în barele O_4 şi D_3 (încărcarea fiind aplicată în nodurile inferioare).

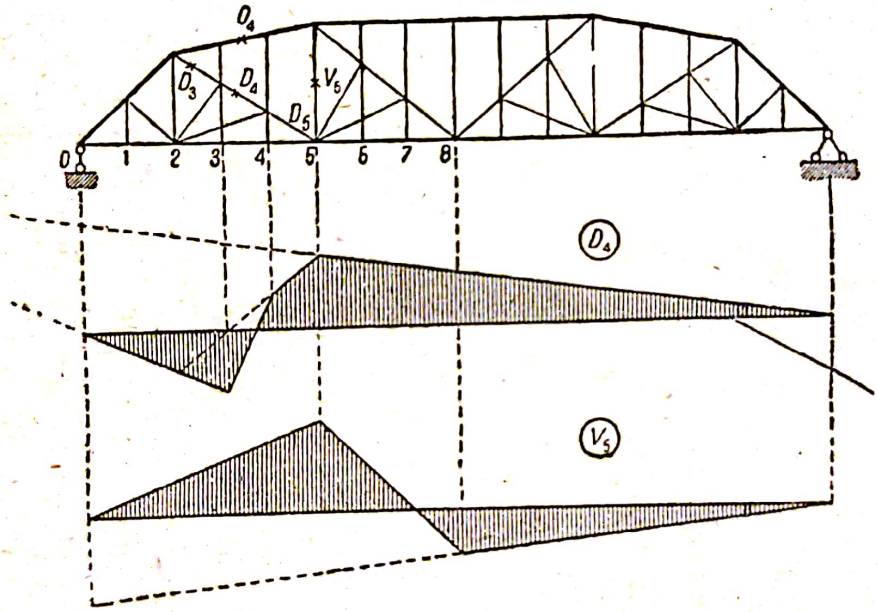


Fig. 168

Indicaţie. In primul rând trebue să stabilim câte grinzi suplimentare s'au întrodus în fiecare panou al schemei principale.

42. Să se construiască liniile de influenţă ale efortului în barele O_3, D_3, D_4, S (fig. 169) pentru încărcarea în nodurile superioare şi să se demonstreze prin ce se deosebesc de liniile de influenţă ale aceloraşi bare, dacă acestea sunt considerate ca bare ale schemei fundamentale.

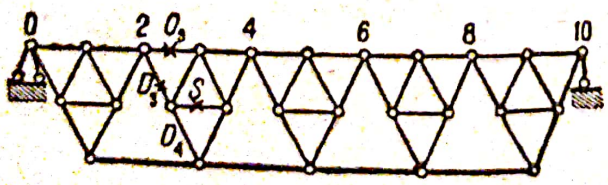


Fig. 169

43. Să se arate cum se vor schimba suprafeţele liniei de influenţă ale efortului U_4 dacă, pornind dela conturul principal 0—8—10, vom introduce succesiv grinzile cu zăbrele auxiliare 0—4—11 (fig. 170-a) şi 2—4 (fig. 170-b). Să se arate cum variază suprafaţa liniei de influenţă a montanţilor în aceeaşi grindă cu zăbrele (fig. 170).

Scanned with OKEN Scanner

Indicație. Eforturile în toți montanții și construcția liniei de influență pentru aceștia trebue aflată din condițiile separării nodurilor.

44. Să se construiască linia de influență a efortului în bara tălpii U_4 a grinzii cu zăbrele (fig. 171), cu încărcarea aplicată pe linia articulațiilor din reazime.

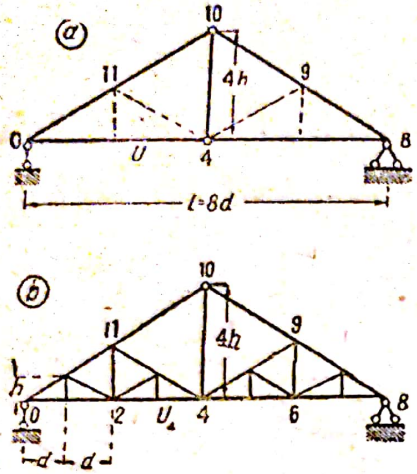


Fig. 170

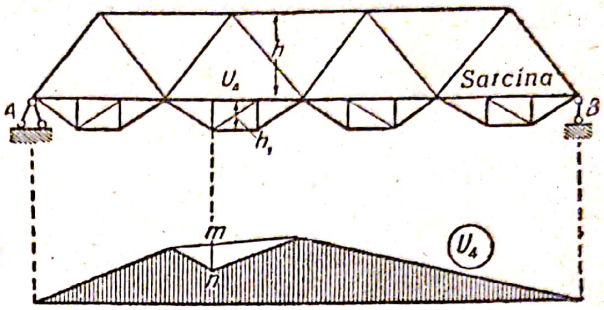


Fig. 171

Indicație. Trebue să se aibă în vedere că asupra valorii efortului obținut în bara U_4, considerând-o ca element al schemei principale, mai are influență și efortul din aceeași bară, considerată ca o bară a grinzii suplimentare.

CAPITOLUL 7

GRINZI CU ZĂBRELE SUPLIMENTARE

§ 39. Structura interioară a grinzilor cu zăbrele suplimentare

In categoria grinzilor cu zăbrele suplimentare se cuprind: grinzile cu zăbrele la care zăbrelele sunt alcătuite din bare ce se întretaie (fig. 172) sau cele obținute prin suprapunerea unui sistem de zăbrele deasupra altuia (fig. 173). Aceste particularități ale modului de alcătuire a grinzilor cu zăbrele suplimentare complică mult calculul lor, chiar pentru sistemele cele mai simple.

1. Zăbrelele suplimentare ale unei grinzi pot fi formate în așa fel, încât să nu conțină bare în plus și să satisfacă condițiile de determinare statică și de indeformabilitate. De exemplu, într'o grindă cu zăbrele de sistem dublu dreptunghiular, reprezentată în fig. 173-a, se poate elimina sistemul de zăbrele *b*, care trece prin nodurile cu soț, formând o grindă cu zăbrele independentă; sistemul de zăbrele c, care trece prin nodurile fără soț, nu poate fi însă considerat cu independent, întru cât este deformabil și în grindă funcția lui se reduce la transmiterea sarcinilor dela nodurile fără soț în nodul 6, unde sarcinile sunt preluate de sistemul principal de zăbrele.

Scanned with OKEN Scanner

Același lucru se poate spune și despre grinda sistem dublu triunghiular (romboidal), înfățișată în fig. 174. In această grindă niciunul din sistemele de zăbrele nu poate fi considerat ca independent, dar aceste sisteme, fiind îmbinate între ele, formează un sistem static determinat și indeformabil (§ 41).

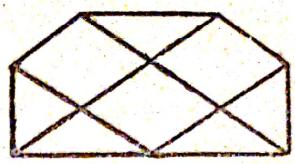


Fig. 172

2. Există totuși grinzi cu zăbrele suplimentare, în care fiecare sistem simplu de zăbrele ce intră în alcătuirea unei grinzi cu zăbrele suplimentare poate fi considerat ca o grindă independentă, static determinată și indeformabilă. De exemplu, în fig. 175-a este arătată o grindă de sistem dublu dreptunghiular, care se poate considera ca o suprapunere a două grinzi static determinate și indeformabile (fig. 175 b și c). Intr'o astfel de situație unele noduri se suprapun, însă numărul barelor care formează aceste noduri rămâne invariabil. Rezultatul acestei suprapuneri este că aceste grinzi cu zăbrele suplimentare sunt static nedeterminate (vezi partea II-a din „Teoria Construcțiilor").

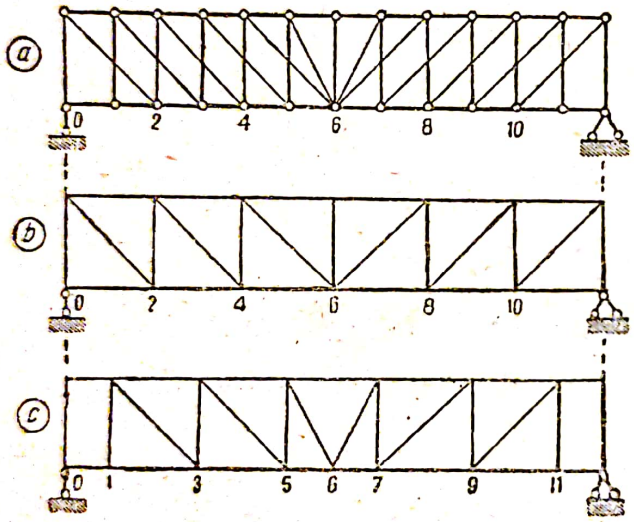


Fig. 173

Grinzile cu astfel de sisteme de zăbrele se utilizau mai înainte la poduri și la alte construcții. In prezent, calculul lor se poate ivi numai în cazuri rare de verificare a unor construcții mai vechi.

3. Un tip deosebit de grinzi cu zăbrele suplimentare static determinat este reprezentat de grinzile alcătuite prin înlocuirea unor bare dintr'o grindă simplă cu zăbrele cu altele, fără a se prejudicia condițiile ei de indeformabilitate. Inlocuirea unei bare prin alta, fără modificarea numărului de noduri ale grinzii, nu prejudiciază condițiile impuse sistemelor static determinate. Totuși această înlocuire a barelor nu poate fi arbitrară. Bara care se introduce trebue să asigure indeformabilitatea grinzii, înlăturând mobilitatea ce apare la scoaterea barei ce se înlocuește.

Pentru a explica cele expuse mai sus, să analizăm cazul cel mai simplu al unei grinzi cu zăbrele, reprezentată în fig. 176, la care bara ce leagă nodurile 2 și 3 poate fi înlăturată și înlocuită cu o altă bară. Prin înlăturarea barei 2—3, porțiunea de grindă 0—2—9 devine mobilă față de porțiunea 9—3—5, în jurul nodului 9.

Prin urmare, în cazul de față, bara nou întrodusă trebue să fie aleasă în așa fel, încât această mobilitate să fie complet impiedecată.

Aceasta se poate realiza, introducând o bară ce ar lega două noduri alese arbitrar din ambele jumătăți ale grinzii cu zăbrele, de exemplu nodul 1 cu nodul 4, nodul 1 cu 7, nodul 11 cu 7 etc.

Procedeul descris permite crearea oricâtor variante și combinații de grinzi cu zăbrele suplimentare.

In fig. 177 este reprezentată o grindă cu zăbrele suplimentare, obținută dintr'o grindă simplă (fig. 177-b) prin înlocuirea barelor III—VII și IV—VII cu barele III—VI și IV—I.

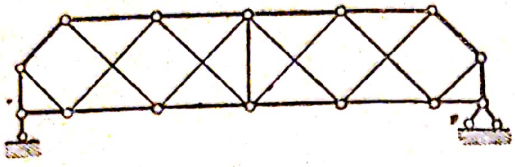


Fig. 174

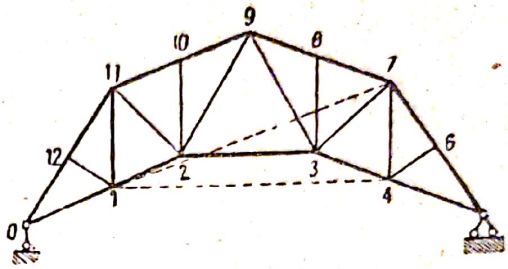


Fig. 176

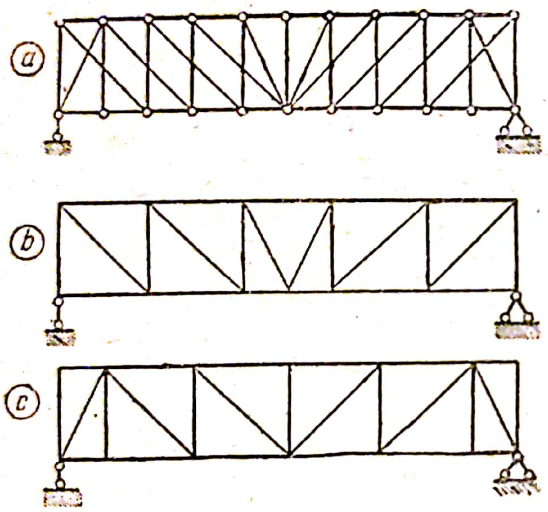


Fig. 175

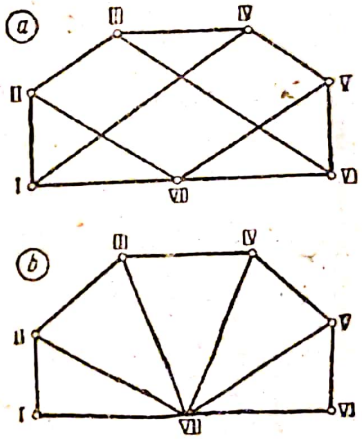


Fig. 177

In unele cazuri eforturile în grinzile cu zăbrele suplimentare nu pot fi determinate prin procedeele simple expuse mai sus (§ 28, 30 etc.). Pentru determinarea eforturilor în astfel de grinzi, trebue să se aplice procedee speciale sau metoda înlocuirii barelor (§ 41) sau procedeul cinematic, utilizând diagrama vitezelor (§ 43). De asemenea, adeseori nu se poate verifica condiția de indeformabilitate a acestor grinzi cu zăbrele suplimentare prin descompunerea lor geometrică. Pentru stabilirea condițiilor de indeformabilitate, trebue să folosim același procedeu de înlocuire a barelor sau diagrama vitezelor.

§ 40. Calculul analitic și construcția liniilor de influență într'o grindă romboidală și dublu dreptunghiulară

Grinzile cu zăbrele romboidale (fig. 179) și dublu dreptunghiulare (fig. 178), fiind sisteme static determinate și alcătuite prin alăturarea succesivă la fiecare nod a două bare, pot fi calculate după regulile staticii. De obiceiu însă, calculul lor se complică, întru cât este imposi-

bil să se secționeze grinda în așa fel, încât secțiunile obținute să permită alcătuirea unei ecuații cu o singură necunoscută, așa după cum se poate face la grinzile simple cu zăbrele. In special se complică calculul grinzilor cu zăbrele suplimentare cu tălpi curbe, la care, din cauza înclinării variabile a tălpilor și a diagonalelor, simplificările geometrice se fac cu multe dificultăți. De aceea pentru calculul unor astfel de grinzi, se utilizează metoda înlocuirii barelor (§ 41), metoda cinematică (§ 42 și 44) etc.

In ce privește grinzile cu zăbrele de același tip, însă cu tălpi paralele, simplicitatea conturului lor și uniformitatea înclinării diagonalelor simplifică mult calculele, putându-se folosi în calcule raporturile geometrice și condițiile de lucru ale sistemelor de zăbrele considerate fiecare în parte.

Grinda cu zăbrele dreptunghiulară dublă cu tălpi paralele

In această grindă (fig. 178) sistemul de zăbrele care trece prin nodurile fără soț lucrează numai la sarcina aplicată în aceste noduri.

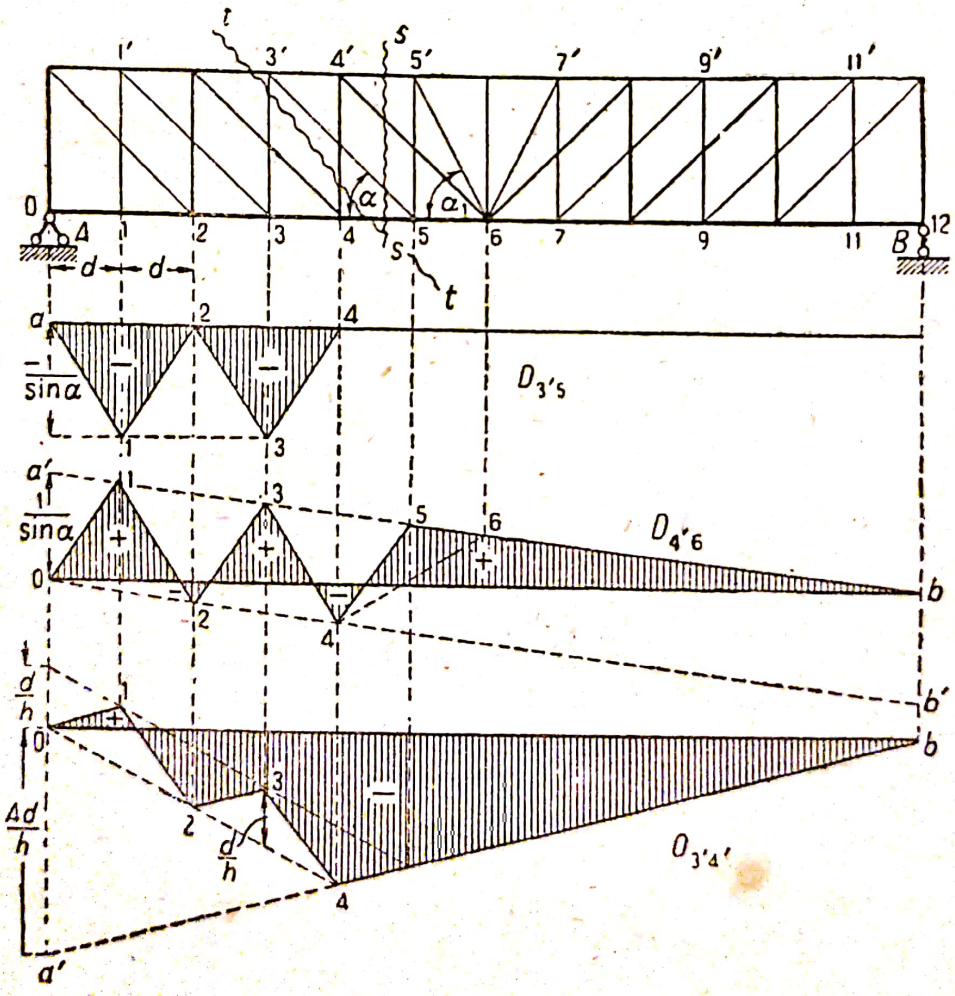


Fig. 178

De exemplu, dacă examinăm efortul în montantul V_3, făcând secțiunea t-t și dacă aplicăm o sarcină unitară între nodurile 4 și II, acest

montant nu va prelua niciun efort, ceea ce se vede de-a-dreptul din separarea mai întâi a nodului 1, apoi a nodului 1′ și în urmă a nodului 3. Același montant nu va fi solicitat nici când sarcina unitară va fi aplicată în nodul 2, după cum se constată prin separarea acelorași noduri; numai la poziția sarcinii în nodurile 1 și 3, montantul va fi supus la un efort care va fi determinat prin relația:

$$V_3 = + P = 1$$

Această valoare a efortului rezultă în toți montanții acestui sistem de zăbrele, cuprinși între nodurile 1 și 6.

In mod analog, se poate demonstra că toate diagonalele acestui sistem de grinzi cu zăbrele, situate între nodurile 1 și 6, vor fi solicitate numai în cazul încărcării nodurilor fără soț, care se află în partea din stânga secțiunii. Acest efort se determină prin relația:

$$D_3'_{-5} = - \frac{P}{\sin \alpha};$$

$$D_5'_{-6} = - \frac{P}{\sin \alpha_1}$$

De aci rezultă că, linia de influență a elementelor acestui sistem va avea forma unor triunghiuri, cu vârfurile așezate în dreptul nodurilor fără soț, prin care trece acest sistem de zăbrele.

Cunoscând valoarea efortului din elementele acestui sistem, precum și forma liniilor de influență corespunzătoare, se poate lesne determina și valoarea efortului în celelalte elemente, construind liniile de influență respective.

De exemplu efortul în diagonala $D_4'_{-6}$ se va determina din relația:

$$D_4'_{-6} = \frac{1}{\sin \alpha} (Q^0 - D_3'_{-5} \sin \alpha)$$

în care Q^0 este forța tăietoare, determinată ca la o grindă simplu rezemată.

In cazul când sarcina unitară lucrează în partea din dreapta secțiunii s-s și efortul în elementul $D_3'_{-5} = 0$, efortul în diagonala $D_4'_{-6}$ se determină cu ajutorul relației:

$$D_4'_{-6} = \frac{A}{\sin \alpha}$$

iar linia de influență se va trasa după dreapta 5-b.

In cazul când sarcina unitară este aplicată în partea din stânga secțiunii, în nodurile cu soț și efortul în diagonala $D_3'_{-5} = 0$, efortul în diagonala $D_4'_{-6}$ se determină cu ajutorul expresiei:

$$D_4'_{-6} = - B \sin \alpha$$

adică ordonatele liniei de influență în dreptul nodurilor 2, 4 vor fi aceleași ca și la o grindă cu zăbrele dreptunghiulară simplă, zăbrelele trecând prin nodurile cu soț 0, 2, 4, 6 și 12. Dar dacă sarcina unitară

lucrează în nodurile fără soţ în stânga secţiunii, la care poziţie corespunde efortul din diagonala :

$$D_3'_{-5} = -\frac{1}{\sin \alpha}$$

efortul în diagonala $D_4'_{-6}$ se va determina cu ajutorul relaţiei :

$$D_4'_{-6} = \frac{-B+1}{\sin \alpha}$$

Aceasta ne arată că în dreptul acestor noduri, ordonatele liniei de influenţă se determină din diferenţa ordonatelor liniei de influenţă a acestei diagonale, considerată ca făcând parte dintr'o grindă cu zăbrele simplă, ordonatele fiind egale cu $\frac{1}{\sin \alpha}$, ceea ce ne dă conturul liniei de influenţă după linia frântă 0-1-2-3-4-5-*b*.

Efortul într'un element al tălpii, de exemplu $O_3'_{-4'}$, se determină din relaţia :

$$O_3'_{-4'} = -\frac{1}{h}(M_4^0 + D_3'_{-5} \cdot d \cdot \sin \alpha)$$

Dacă sarcina unitară lucrează în dreptul secţiunii între nodurile 4 şi 12, efortul $D_3'_{-5} = 0$, astfel încât efortul în acest element al tălpii va fi determinat din relaţia :

$$O_3'_{-4'} = -A\frac{4d}{h}$$

faţă de care linia de influenţă se va trasa după dreapta *b*-*a'*, ca şi în cazul unei grinzi cu zăbrele dreptunghiulară simplă.

Dacă nu ar fi existat sistemul de zăbrele care trece prin nodurile fără soţ, atunci când sarcina unitară ar fi acţionat în partea din stânga secţiunii, linia de influenţă ar fi fost conturată după dreapta 0—4, ca şi la o grindă dreptunghiulară simplă; datorită însă existenţei sistemului de zăbrele ce trece prin nodurile fără soţ, ordonatele acestei porţiuni de linie de influenţă îşi păstrează valoarea lor numai în cazul aplicării sarcinilor în nodurile 2 şi 4, deoarece în această poziţie a sarcinilor, efortul în diagonală este $D_3'_{-5} = 0$.

Aplicând sarcinile unitare în nodurile fără soţ ale porţiunii din stânga, când efortul

$$D_3'_{-5} = -\frac{1}{\sin \alpha}$$

efortul în elementul de talpă $O_3'_{-4}$ se determină din relaţia :

$$O_3'_{-4'} = -(B \cdot 8d - 1 \cdot d)\frac{1}{h}$$

de unde rezultă că din ordonatele liniei de influenţă 0-4-b, trebue să se scadă ordonatele cu valoarea egală cu $d : h$; această scădere este reprezentată în fig. 178. Datorită acestui fapt, linia de influenţă va avea conturul după linia frântă 0-1-2-3-4-*b*.

Prin raţionamente analoage se pot construi liniile de influenţă ale celorlalte bare ale acestei grinzi cu zăbrele.

Scanned with OKEN Scanner

Grinda romboidală cu zăbrele cu tălpile paralele

Grinda cu zăbrele de sistem romboidal cu tălpi paralele, reprezentată în fig. 179, este un sistem static determinat și indeformabil, ceea ce se poate constata ușor urmărind construcția sa geometrică, începând cu montantul din mijloc. Calculul analitic al acestei grinzi este posibil datorită în primul rând paralelismului tălpilor și în al doilea rând înclinării constante a diagonalelor; eforturile din diagonale și relația dintre aceste eforturi se determină ușor prin separarea nodurilor.

Separăm prin secțiunea s-s nodul dela mijloc al montantului final. Proiectând eforturile din acest nod pe axa verticală și orizontală, vom obține două ecuații:

$$-V_0 - D_1 \sin\alpha + D'_1 \sin\alpha + V'_0 = 0$$
$$D_1 \cos\alpha + D'_1 \cos\alpha = 0;$$

Din ultima ecuație obținem:

$$D_1 = -D'_1$$

Intru cât: $V_0 = -A$ și $V'_0 = 0$

rezolvând prima ecuație în raport cu efortul din diagonala D_1, vom avea:

$$D_1 = -D'_1 = +\frac{A}{2\sin\alpha}$$

Mai departe, separând fiecare nod al tălpilor, este ușor de văzut că eforturile din toate diagonalele aflate la stânga punctului de aplicație al sarcinii P sunt egale între ele, fiind egale cu efortul din diagonalele D_1 și D'_1, însă semnul efortului variază în fiecare diagonală în raport cu direcția ei; astfel pentru fiecare element al diagonalelor din sistemul simplu, vom avea următoarele eforturi:

$$\left.\begin{aligned} D_1 = -D_{1-2'} = +D_{2'-3} = -D_{3-4'} = \ldots\ldots = \frac{1}{2}\cdot\frac{A}{\sin\alpha} \\ \text{și } -D'_1 = +D_{1'-2} = -D_{2-3'} = +D_{3'+4} = \ldots = \frac{1}{2}\cdot\frac{A}{\sin\alpha} \end{aligned}\right\} \quad (73)$$

In nodul unde este aplicată forța P, această constanță a mărimii efortului nu mai este menținută în acel sistem simplu căruia îi aparține sarcina. Din condiția de echilibru a nodului în care este aplicată sarcina, rezultă că:

$$-D_{3-4'} \cdot \sin\alpha - D_{4'-5} \sin\alpha - 1 = 0$$

Substituind în această ecuație, în locul efortului $D_{3-4'}$, valoarea lui din expresia (73), obținem:

$$D_{4'-5} = -\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{A}{2\sin\alpha} = -\frac{B+1}{2\sin\alpha} \quad (74)$$

în care, în loc de reacțiunea A, este introdusă valoarea sa egală $1-B$.

Expresiile analitice obținute pentru eforturile din diagonalele jumătății din stânga, precum și expresiile eforturilor pentru diagonalele

simetrice din jumătatea din dreapta, permit să se determine eforturile și în celelalte bare ale sistemului și să se construiască liniile de in-

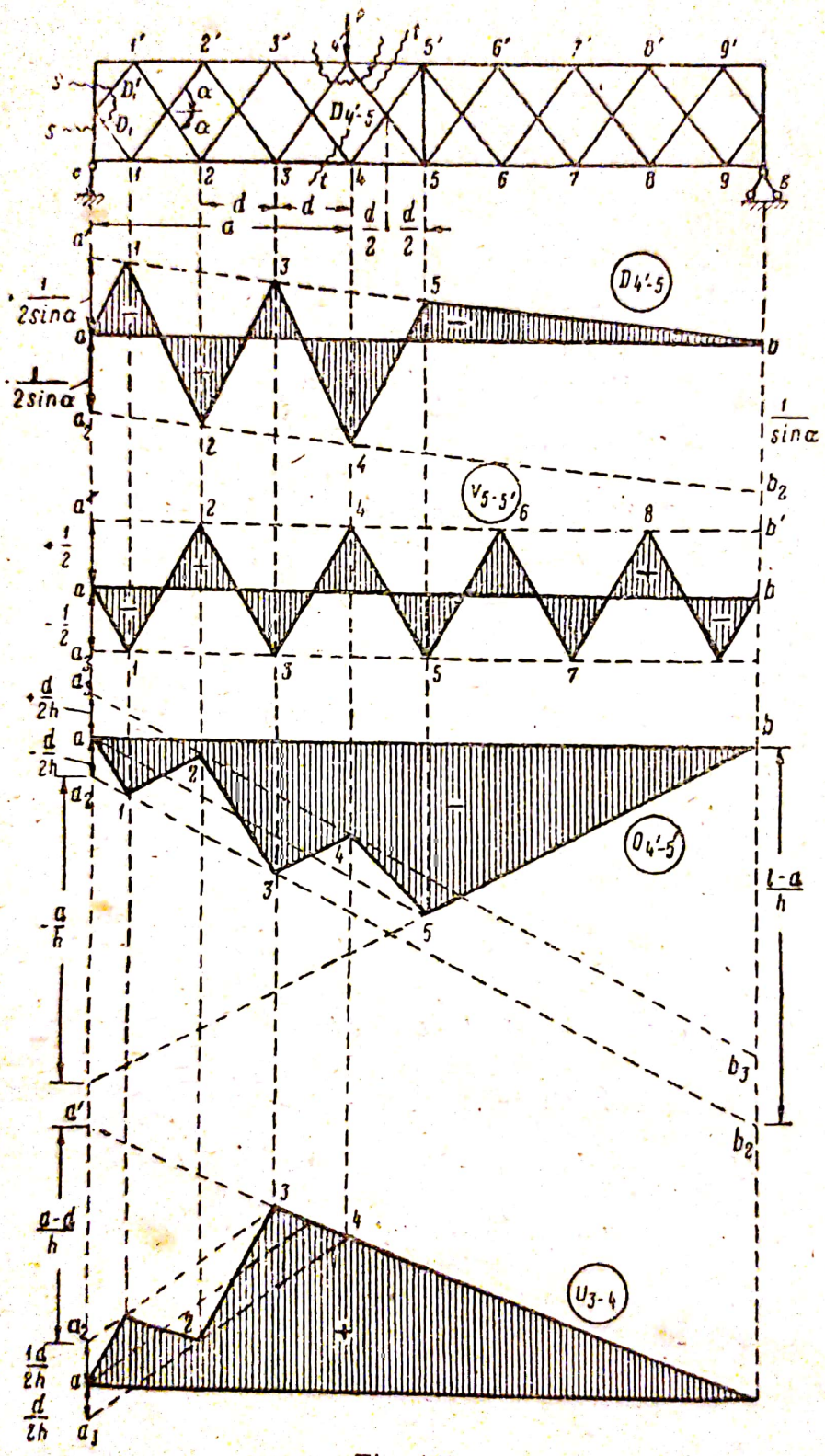


Fig. 179

fluență pentru zăbrele și pentru tălpi.

Să considerăm de exemplu diagonala $D_{4'-5}$. Când sarcina unitară

se găsește în partea din dreapta secțiunii t-t, efortul în această bară se determină din relația (73), conform căreia :

$$D_4'_{-5} = + \frac{A}{2 \sin \alpha}$$

Aceasta este o linie dreaptă cu ordonata egală cu : $\frac{1}{2 \sin \alpha}$ în dreptul reazimului din stânga și cu ordonata egală cu zero în dreptul reazimului din dreapta ; în fig. 179 această dreaptă este notată prin $a'b$. Ordonatele acestei drepte conturează linia de influență a diagonalei, pe intervalul cuprins între reazimul din dreapta și nodul 5.

Dacă sarcina unitară trece în partea din stânga nodului și lucrează în nodurile ce aparțin sistemului simplu, din care nu face parte diagonala $D_4'_{-5}$, efortul acesteia se va determina din aceeași expresie (73) ca și în cazul când sarcina este în partea din dreapta. Prin urmare aplicând sarcina în aceste noduri, linia de influență se va determina de ordonatele liniei din dreapta, având vârfurile în punctele 1 și 3.

Aplicând sarcina în nodurile din partea din stânga, care aparțin sistemului simplu din care nu face parte diagonala considerată, efortul în această diagonală se determină din expresia (74) :

$$D_4'_{-5} = - \frac{B + 1}{2 \sin \alpha} = - \frac{\frac{x}{l} + 1}{2 \sin \alpha}$$

care este o dreaptă având ordonatele :

în dreptul reazimului din stânga, pentru $x = 0$

$$a\, a_2 = - \frac{1}{2} \sin \alpha$$

iar în dreptul reazimului din dreapta, pentru $x = l$

$$b\, b_2 = - \frac{1}{\sin \alpha}$$

Cu ajutorul acestei drepte $a_2\, b_2$ (fig. 179) se determină ordonatele liniei de influență în dreptul nodurilor respective ale sistemului simplu din care face parte diagonala, în cazul de față în dreptul nodurilor 2′ și 4′.

Linia de influență variază liniar între noduri, deci conturul liniei de influență a diagonalei $D_4'_{-5}$ va avea forma unei linii frânte (în zigzag) : a-1-2-3-4-5-b.

Efortul din montantul dela mijloc $V_5'_{\ 5}$ se determină prin separarea nodului inferior, ale cărui condiții de echilibru în raport cu verticala dau următoarea ecuație ;

$$V_5'_{\ 5} + D_4'_{-5} \sin \alpha + D_{5-6}' \sin \alpha = 0 \qquad (75)$$

Aplicând sarcina unitară în toate nodurile care nu fac parte din sistemul simplu în compunerea căruia intră diagonalele $D_4'_{-5}$ și D_{5-6}'

și anume în nodurile 1', 3', 5', 7' și 9', eforturile din aceste diagonale se determină din expresiile (73):

$$D_{4'-5} = \frac{A}{2 \sin \alpha}$$

și

$$D_{5-6'} = + \frac{B}{2 \sin \alpha} = + \frac{1 - A}{2 \sin \alpha}$$

Substituind aceste valori ale eforturilor în ecuația (75), obținem următoare expresie:

$$V_{5-5'} = -\frac{1}{2}\left(\frac{A \sin \alpha}{\sin \alpha} + \frac{B \sin \alpha}{\sin \alpha}\right) = \frac{1}{2}\left[A + (1 - A)\right] = -\frac{1}{2}$$

De aci rezultă că aplicând sarcina în nodurile indicate mai sus, toate ordonatele liniei de influență sunt egale cu $-\frac{1}{2}$.

Aplicând sarcina în nodurile 2', 4', 6' și 8', ce aparțin sistemului simplu în care intră diagonalele $D_{4'-5}$ și $D_{5-6'}$, efortul în prima dintre aceste diagonale, ce se găsește în aceeași jumătate a grinzii în care se află și sarcina, se determină din expresia (74), așa încât ecuația de echilibru (75) se va scrie astfel:

$$V_{5-5'} = \frac{B + 1}{2 \sin \alpha} \sin \alpha - \frac{B}{2 \sin \alpha} \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

Prin urmare, toate ordonatele liniei de influență în dreptul acestor noduri vor fi egale cu $\frac{1}{2}$.

Astfel linia de influență a montantului dela mijloc este o linie în zig-zag, simetrică în raport cu axa absciselor, după cum se vede în fig. 179.

Pentru determinarea efortului în bara tălpii $O_{4'-5}$, se va folosi ecuația:

$$O_{4'5}\, h + Aa + D_{4'5}\, d \sin \alpha = 0$$

Aplicând sarcina în dreapta secțiunii, efortul din diagonală, după cum s'a arătat mai sus, se determină din expresia (73), prin urmare ecuația efortului se va transforma astfel:

$$O_{4'-5} = -\frac{1}{h}\left(Aa + \frac{A}{2 \sin \alpha} d \sin \alpha\right) = -\frac{A}{h}\left(a + \frac{d}{2}\right).$$

Aceasta va fi ecuația dreptei $a'b$, având în dreptul reazimului din stânga ordonata egală cu:

$$-\frac{1}{h}\left(a + \frac{d}{2}\right)$$

Ordonatele acestei drepte limitează linia de influență în intervalul cuprins între reazimul din stânga până la nodul 5.

Scanned with OKEN Scanner

Când sarcina trece în partea din stânga, expresia efortului în bara $O_4'-_5'$, se determină din condiția de echilibru a părții din dreapta și se scrie după cum urmează:

$$-O_4'-_5'\,h - B\,(l-a) - D_4'-_5'\,d\,\sin\alpha = 0 \qquad (77)$$

Aplicând sarcina în nodurile 2′ și 4′, aparținând sistemului simplu din care face parte diagonala $D_4'-_5'$, efortul din această bară se va determina din expresia (74); substituind această valoare a efortului în ecuația (77), acea expresie se va transforma în felul următor:

$$O_4'-_5' = -\frac{B}{h}\left(l - a - \frac{d}{2}\right) + \frac{d}{2h}$$

Prin această ecuație se determină dreapta a_3-b_3 (fig. 179) pentru: $x = 0$, și $B = 0$; ordonata ei în dreptul reazimului din stânga este:

$$a\,a_3 = \frac{d}{2h};$$

iar pentru:

$$x = l \quad \text{și} \quad B = 1,$$

ordonata ei în dreptul reazimului din dreapta este:

$$b\,b_3 = -\frac{l-a}{h} + \frac{d}{h}$$

Pe această dreaptă trebue să se găsească vârfurile ordonatelor liniei de influență, când sarcina este aplicată în nodurile 2′ și 4′.

Aplicând sarcina în nodurile 1′ și 3′, care nu fac parte din sistemul simplu din care face parte și diagonala $D_1'-_5$, efortul în această diagonală se va determina din expresia (73):

$$D_4'-_5 = +\frac{A}{2\sin\alpha} = \frac{1-B}{2\sin\alpha}$$

deci ecuația (77), poate fi transformată astfel:

$$O_4'-_5' = -\frac{B}{h}\left(l - a - \frac{d}{2}\right) - \frac{d}{2h}$$

Prin această ecuație se determină dreapta a_2b_2 având

ordonata: $a\,a_2 = -\frac{d}{2h}$ în dreptul reazimului din stânga

și ordonata: $b\,b_2 = -\frac{l-a}{h}$ în dreptul reazimului din

dreapta. Prin această dreaptă, se determină ordonatele liniei de influență în cazul când se aplică sarcina în nodurile 1′ și 3′.

In acest fel linia de influență a efortului din talpa superioară se va trasa după o linie frântă a-1-2-3-4-5-b, reprezentată în fig. 179.

Scanned with OKEN Scanner

Analog se determină eforturile și se construesc liniile de influență pentru barele tălpii inferioare. In fig. 179 este construită și linia de influență pentru bara tălpii inferioare $U_{3\ 4}$.

§ 41. Determinarea eforturilor prin metoda înlocuirii barelor*)

Avantajele metodei înlocuirii barelor față de celelalte metode pentru determinarea eforturilor, constă în faptul că nu impune nicio restricție în alcătuirea grinzilor cu zăbrele. Această metodă utilizează posibilitățile de transformare a grinzilor cu zăbrele, prin înlocuirea barelor, ceea ce permite determinarea eforturilor în barele grinzilor cu zăbrele suplimentare. Această metodă constă, în esență, din următoarele operațiuni: se izolează din grindă una din bare, iar influența aeesteia asupra grinzii se înlocuește printr'un efort x încă necunoscut, care menține echilibrul grinzii. Deoarece prin îndepărtarea barei se revine la o grindă cu zăbrele deformabilă, în locul ei se substitue o altă bară nouă, care readuce grinda la o grindă simplă cu zăbrele, indeformabilă și static determinată. In această grindă cu zăbrele astfel transformată, care se găsește sub acțiunea sarcinii date și a efortului x necunoscut, eforturile se pot determina prin oricare din procedeele descrise mai înainte și se exprimă prin suma eforturilor

$$N = N^0 + N_x ,$$

în care N^0 este efortul datorit sarcinii date;

N_x — efortul produs în barele grinzii cu zăbrele transformate de către efortul necunoscut x, care, în raport cu grinda transformată, se consideră ca o forță exterioară.

Deoarece efortul x este necunoscut, pentru determinarea efortului N_x se admite că în direcția barei suprimate nu acționează forța x, ci o forță egală cu unitatea (de exemplu 1 kg sau 1 t). Cu această forță unitară se determină eforturile N_x în toate barele grinzii transformate. Eforturile reale însă se vor determina din produsul $N_x X$, iar efortul total în aceste bare va avea forma:

$$N = N^0 + \overline{N}_x X \qquad (78)$$

In acest fel rămâne numai să determinăm valoarea efortului X în bara suprimată. Mărimea acestui efort poate fi determinată din condițiile de lucru ale barei introduse în grindă în locul celei îndepărtate. Intru cât grinda inițială, sub acțiunea sarcinii date și fără întroducerea barei, se află în stare de echilibru elastic, este evident că înlocuind bara suprimată prin efortul X nu se va distruge acest echilibru și de aceea efortul în bara înlocuitoare a grinzii transformate, ce se găsește sub acțiunea sarcinii date și a efortului X, trebue să fie egal cu zero. Notând efortul în bara întrodusă prin N_e, pe baza expresiei (78) avem:

$$N_e = N_e^0 + \overline{N}_{ex} X = 0$$

*) **Nota traducătorului:** Această metodă se numește și metoda lui *Henneberg*.

de unde

$$X = -\frac{N_e^0}{\overline{N}_{ex}} \qquad (79)$$

După ce s'a determinat valoarea efortului X, celelalte eforturi din barele grinzii inițiale se determină din expresia (78).

Prin urmare, posibilitatea de a determina eforturile cu metoda lui Henneberg este legată de introducerea unei bare de înlocuire și reducerea grinzii cu zăbrele suplimentare la un sistem simplu cu zăbrele.

Poziția barei de înlocuire într'o grindă cu bare suplimentare nu este întotdeauna precisă, însă poate fi găsită prin următorul procedeu: Izolând o bară a unei grinzi cu zăbrele suplimentare, trebue să înlăturăm succesiv, din schema ce a rămas, nodurile cu două bare ce se întâlnesc în ele; o astfel de suprimare după cum se știe, nu va modifica îndeformabilitatea grinzii. Această înlăturare a nodurilor trebue continuată până la apariția unei bare care nu are legătură cu altă bară. Această bară trebue să fie legată de partea indeformabilă ce a rămas din grindă prin intermediul altei bare noi, care va fi bara înlocuitoare.

Să explicăm procedeul de calcul și ordinea lui de efectuare printr'un exemplu.

Presupunem că se cere să se determine efortul în grinda cu zăbrele suplimentare, reprezentată în fig. 180-a.

Suprimând bara 4—5, înlocuim acțiunea ei asupra grinzii cu zăbrele prin efortul x (fig. 180-b). Prin înlăturarea succesivă a nodurilor 5, 4, 3 și a barelor adiacente 6-5, 2-5, 4-6, 3-4, 3-0 și 3-2, urmează să căutăm bara înlocuitoare. După separarea barelor 2-5 și 2-3, nodul 2 rămâne legat numai de o singură bară 1-2, ceea ce nu este admisibil, deci în partea ce a rămas din grindă trebue să se introducă o nouă bară care se lege nodul 2 cu nodul 0 sau 6. Introducem bara 2-6 care va înlocui bara 4-5 ce a fost înlăturată.

Noua schemă obținută a grinzii cu zăbrele este în acest fel static determinată și indeformabilă.

Determinăm eforturile: separat pentru N^0 provenite din sarcina P (fig. 181-a) și separat pentru forța unitară $X=1$, aplicată după direcția barei suprimate (fig. 181-b).

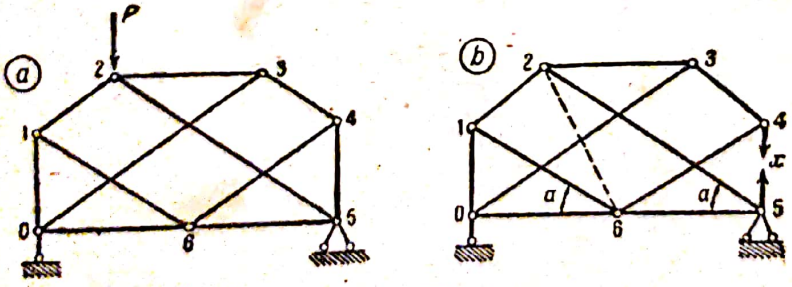


Fig. 180

Valorile acestor eforturi sunt date în tabloul ce urmează.

Valoarea efortului X se determină din condiția ca efortul din bara introdusă 2-6 să fie egal cu zero (79), adică

$$N_{2-6} = -\frac{3}{8}\frac{P}{\sin\beta} + \frac{3}{4}\frac{X}{\sin\beta} = 0$$

de unde $$X = \frac{P}{2}$$

Cunoscând valoarea efortului X, se pot determina după formula (79) eforturile în toate barele grinzii, pe care le găsim în tabloul de mai jos:

N-rul de ordine al barelor	Efortul N^0 produs de sarcina P	Efortul $\overline{N}_x$ produs de sarcina unitară	Efortul total $N = N^0 + \overline{N}_x X$
3-4	0	$\frac{1}{2 \sin \alpha}$	$\frac{P}{4 \sin \alpha}$
6-4	0	$-\frac{1}{2 \sin \alpha}$	$-\frac{P}{4 \sin \alpha}$
2-5	$-\frac{P}{4 \sin \alpha}$	$-\frac{1}{\sin \alpha}$	$-\frac{3}{4} \cdot \frac{P}{\sin \alpha}$
6-5	$\frac{P}{4} \operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\frac{3}{4} P \cdot \operatorname{ctg} \alpha$
0-3	0	$-\frac{1}{2 \sin \alpha}$	$-\frac{P}{4 \sin \alpha}$
2-3	0	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha$
0-6	0	$\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha$	$\frac{P}{4} \operatorname{ctg} \alpha$
0-1	$-\frac{3}{4} P$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} P$
1-6	$\frac{3}{8} \frac{P}{\sin \alpha}$	$-\frac{1}{4 \sin \alpha}$	$\frac{P}{4 \sin \alpha}$
1-2	$-\frac{3}{8} \frac{P}{\sin \alpha}$	$\frac{1}{4 \sin \alpha}$	$-\frac{P}{4 \sin \alpha}$
$N_{2\ 6}$	$-\frac{3}{8} \frac{P}{\sin \beta}$	$\frac{3}{4} \frac{1}{\sin \beta}$	0

Metoda lui Henneberg este redată în acest exemplu, în ipoteza că pentru determinarea eforturilor în barele grinzii cu zăbrele suplimentare, este nevoie de suprimarea unei singure bare. Trebue să menţionăm însă că acest procedeu rămâne valabil şi pentru cazurile când, pentru determinarea eforturilor, urmează să suprimăm două sau mai multe bare. In acest caz, grinda cu zăbrele transformată trebue să fie considerată nu numai sub acţiunea sarcinii, ci şi sub acţiunea eforturilor X, Y care se introduc în locul barelor suprimate.

Eforturile în barele grinzii cu zăbrele transformate se vor determina din expresia:

$$N = N^0 + \overline{N}_x X + \overline{N}_y Y + \ldots\ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea eforturilor X, Y ... va trebui să rezolvăm un sistem de ecuații, alcătuite pe baza că eforturile în toate barele înlocuitoare trebue să fie egale cu zero, adică:

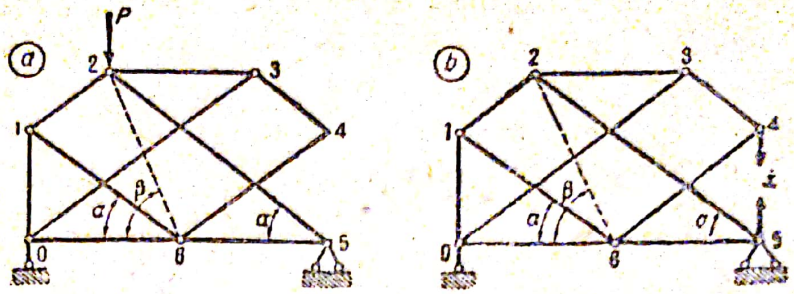


Fig. 181

$$N_e = N_e^0 + \overline{N}_{ex} X + \overline{N}_{ey} Y + \ldots = 0$$
$$N_i = N_i^0 + \overline{N}_{ix} X + \overline{N}_{iy} Y + \ldots = 0 \qquad \text{etc.}$$

§ 42. Determinarea eforturilor din condițiile cinematice cu ajutorul diagramei viteselor

Inainte de a expune partea esențială a metodei propriuzise de folosire a diagramei viteselor, pentru determinarea eforturilor în barele unei grinzi cu zăbrele, trebue să analizăm unele ipoteze pe baza cărora se construește această diagramă.

Orice punct m al unei figuri plane (fig. 182), rotindu-se în jurul unui centru instantaneu de rotație, descrie într'un interval de timp infinit mic o oarecare traiectorie care poate fi considerată ca un arc ds, descris din centrul de rotație cu raza ρ, egală cu distanța dela punctul m până la centrul F.

Lungimea arcului ds este foarte mică, iar direcția deviază prea puțin dela direcția tangentei, deci lungimea ei, cu suficientă aproximație, poate fi considerată egală cu segmentul de tangentă mk la acest arc în punctul m.

Dacă în punctul m este aplicată o forță P aleasă arbitrar, atunci lucrul mecanic efectuat de această forță în momentul mișcării compatibile cu legăturile sistemul va fi:

$$T = P \cos \alpha \cdot mk$$

în care α este unghiul de înclinare al forței P față de direcția tangentei.

Punem pe direcția razei de rotație segmentul mm' egal cu deplasarea mk și ducem din punctul m' perpendiculara $m'n$ pe direcția forței P. Atunci momentul forței P în raport cu punctul m' va fi

$$M = P \cdot nm' = P \cdot mk \cdot \cos \alpha = T \qquad (80)$$

egală cu expresia lucrului mecanic al forței P la deplasarea mk.

Punctul m' în limbaj tehnic se numește *punctul rabătut (reprezentat)**) în raport cu punctul m.

Astfel, dacă vom cunoaște poziția punctelor rabătute pentru toată figura, *expresia lucrului mecanic virtual poate fi înlocuită prin ex-*

Nota revizorului editorial:
*) In terminologia română în locul expresiei „punct reprezentat" se folosește denumirea de „punct rabătut".

presia momentelor aceloraşi forţe în raport cu punctele lor rabătute. Avantajele acestei metode se vor lămuri în expunerea ce urmează.

După cum s'a arătat mai sus, poziţia punctelor rabătute se determină prin raportarea vitesei rabătute (lungimii traiectoriei punctului) *) pe direcţia razei de rotaţie. Lungimea arcului traiectoriei unui punct oarecare al figurii poate fi exprimată prin distanţa ρ a punctului până la centrul instantaneu de rotaţie şi prin unghiul de rotaţie $d\theta$, comun pentru întreaga figură:

$$ds_a = \rho_a \; d\,\theta$$
$$ds_b = \rho_b \; d\,\theta,$$

de unde rezultă că lungimile traiectoriilor sunt între ele în acelaşi raport ca şi distanţele dintre puncte şi centrul instantaneu de rotaţie:

$$\frac{ds_a}{\rho_a} = \frac{ds_b}{\rho_b} = \ldots \text{ etc.} \qquad (81)$$

Cunoscând poziţia centrului instantaneu de rotaţie şi poziţia unui punct rabătut, putem, cu ajutorul acestui raport, să găsim poziţiile punctelor rabătute pentru întreagă figură.

Presupunem că există o figură determinată de punctele a, b şi c (fig. 183) şi se cunoaşte poziţia punctului rabătut a' şi a centrului instantaneu de rotaţie F.

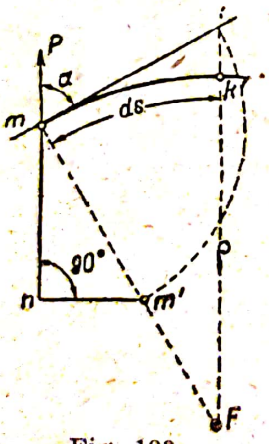


Fig. 182

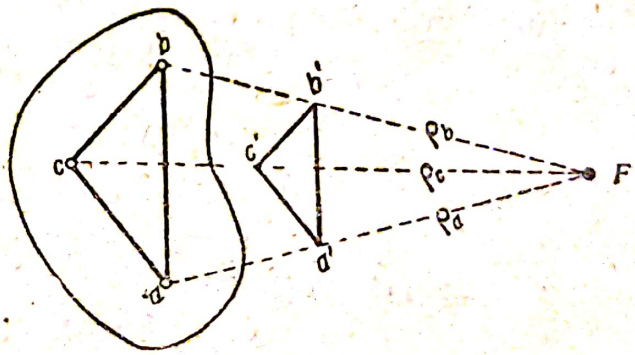


Fig. 183

Atunci poziţia punctului rabătut b' se va găsi ducând linia $a'b' \parallel ab$ până la intersecţia ei cu direcţia $\rho_b = bF$, deoarece în această construcţie avem:

$$\frac{ds_a}{\rho_a} = \frac{aa'}{aF} = \frac{bb'}{bF} = \frac{ds_b}{\rho_b}. \qquad (82)$$

Nota revizorului editorial:

*) In loc de a se considera „lungimea traiectoriei punctului", se consideră deplasarea infinitesimală raportată la timp, adică vitesa, aplicând în calcul această vitesă care se rabate apoi pe direcţia razei vectorii, constituind **„vitesa rabătută."**

Scanned with OKEN Scanner

Mai departe, din aceeaşi proprietate rezultă că poziţia punctului rabătut c poate fi determinată ducând liniile $a'c' \parallel ac$ şi $b'c' \parallel bc$, care se intersectează în punctul c'. Pe baza relaţiei de mai sus, acest punct c' se va găsi pe direcţia razei ρ_c. De aci rezultă că *cunoscând poziţia a două puncte rabătute oarecare ale unei figuri, se poate determina poziţia celorlalte puncte rabătute ale acestei figuri, fără să determinăm poziţia centrului instantaneu de rotaţie.*

După cum s'a arătat mai sus, segmentul între punctul iniţial m (fig. 182) şi punctul rabătut al acestuia m', ce se aşază în direcţia razei duse din centrul instantaneu de rotaţie, reprezintă valoarea deplasării virtuale a punctului iniţial în direcţia perpendiculară pe rază; întru cât aceste deplasări sunt proporţionale cu distanţele punctelor iniţiale ale figurii până la centrul instantaneu de rotaţie, atunci aceste segmente reprezintă vitesele relative compatibile ale acestor puncte şi deci figura formată din aceste segmente (sau din punctele rabătute) se va denumi *diagrama viteselor compatibile cu sistemul.*

Cunoscând diagrama viteselor compatibile, se poate determina deplasarea fiecărui punct.

Valoarea deplasării necunoscute după orice direcţie se determină ca fiind proiecţia segmentului care reprezintă vitesa compatibilă pe direcţia perpendiculară pe deplasarea necunoscută, întru cât toată diagrama viteselor se construeşte în ipoteza rotirii ei cu 90^0 (fig. 182).

Pentru ca să înţelegem mai uşor procedeul de determinare a eforturilor cu ajutorul diagramei viteselor, să analizăm mai întâi aplicarea lui la determinarea efortului în barele unei grinzii cu zăbrele simple.

Separăm din grinda cu zăbrele (fig. 184) bara 9-8, al cărei efort urmează să-l determinăm şi aplicând în locul ei efortul necunoscut, vom considera că toată partea din dreapta grinzii 3-6-8 este fixă. Atunci partea din stânga 0-3-9 va avea o deplasare relativă în jurul articulaţiei 3, ca în jurul unui centru instantaneu de rotaţie. Presupunem că segmentul 2-2' reprezintă vitesa punctului 2, care trebue să se găsească pe dreapta 2-3, fiind pe direcţia razei; poziţia punctului 9' se determină ducând dreapta 2'-9' $\parallel$ 2-9 [expresia 87], poziţia punctului 10' se găseşte ducând dreptele 2'-10' $\parallel$ 2-10 şi 9'-10' $\parallel$ 9-10 etc. Această construcţie ne dă diagrama viteselor figurii 0-3-9, a părţii din stânga. Pe baza relaţiei (80), expresia lucrului mecanic virtual a tuturor forţelor pe deplasările lor respective se va scrie ca şi momentele acestor forţe în raport cu punctele lor rabătute;

$$A\,(0\text{-}0')\cos\alpha - P\,(1\text{-}1')\cos\alpha - P_2\,(2\text{-}2')\cos\alpha - U_9\,(9\text{-}9')\sin\alpha = 0$$

de unde

$$U_9 = \frac{[A\ (0\text{-}0') - \sum P_n\ (n\text{-}n')]\cos\alpha}{(9\text{-}9')\sin\beta} \qquad *)$$

*) **Notă.** Din raportul segmentelor 0-0', 9-9' etc. nu este greu să demonstrăm că efortul U_9 corespunde întocmai celui obţinut din condiţiile echilibrului static.

Scanned with OKEN Scanner

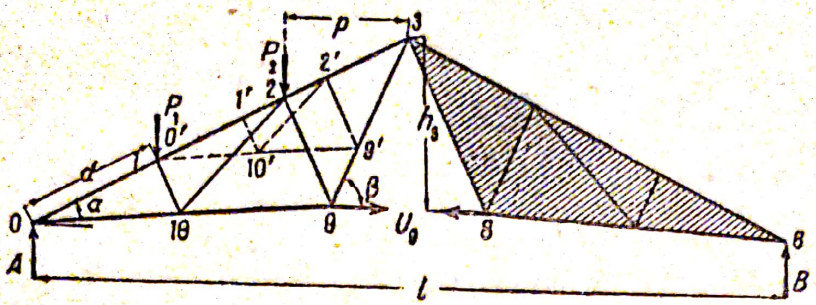


Fig. 184

In această ecuaţie (şi în general la alcătuirea expresiei lucrului mecanic virtual după diagrama viteselor) semnele se determină în raport cu sensul de rotaţie al forţei în raport cu punctul rabătut (considerând ca pozitiv sensul mersului acelor unui ceasornic).

După sensul construcţiei grafice, lungimea segmentelor $m\ m'$ (fig. 182) care determină poziţia punctelor rabătute, trebue să fie suficient de mică şi egală cu traiectoria mişcării instantanee. Insă relaţia dedusă mai sus (87)

$$\frac{ds_a}{\rho_a} = \frac{ds_b}{\rho_b} = \frac{ds_c}{\rho_c} = \ldots\ldots$$

permite schimbarea scării segmentelor fără modificarea raportului dintre ele şi deci fără modificarea expresiei finale a efortului unde valoarea scărilor intră ca un factor şi la numărător şi la numitor. Marele avantaj al acestei proprietăţi constă în faptul că *la construirea diagramei viteselor, se poate alege orice poziţie pentru punctul rabătut iniţial*, considerând că segmentul admis $m'm$ reprezintă, la o anumită scară, lungimea traiectoriei deplasării virtuale a punctului m.

Astfel alegând o vitesă iniţială arbitrară la o scară convenabilă pentru calcule, putem să trasăm diagrama viteselor şi să formăm expresia momentelor care determină efortul necunoscut.

Avantajul esenţial al acestui procedeu constă în faptul că poate fi aplicat în aceeaşi măsură la toate grinzile cu zăbrele. Singurul lui inconvenient se reduce la necesitatea construirii unei diagrame a viteselor pentru fiecare efort. De aceea în calcule, acest procedeu se întrebuinţează numai pentru determinarea primului efort din grinda cu zăbrele, care nu poate fi calculat după metodele staticii, deci imediat ce aplicarea regulelor staticii devine posibilă, acestea se vor aplica.

De exemplu, se cere să se determine efortul în grinda cu zăbrele, reprezentată în fig. 185. Schema acestei grinzi nu permite nici secţionarea a trei bare care nu sunt concurente, nici izolarea nodului şi introducerea a două eforturi necunoscute, deci trebue să aplicăm procedeul punctelor rabătute. Indepărtăm bara 4-5, aplicăm în locul ei efortul interior X şi, considerând ca invariabilă poziţia triunghiului 0-1-6, presupunem că segmentul 2-2 reprezintă vitesa pentru punctul 2; apoi determinăm poziţia punctului 5′ ducând dreapta 2′-5′ ∥ 2-5, poziţia punctului 3′, trasând dreapta 2′-3′ ∥ 2-3 şi poziţia punctului 4′ ducând dreapta 3′-4′ ∥ 3-4; în acest fel obţinem figura 2′-3′-4′-5′ şi în raport

cu vârfurile ei formăm ecuaţia momentelor (85) în raport cu punctele rabătute.

$$P_1 (2\text{-}2') \cos \alpha + P_2 (3\text{-}3' \cos \alpha) + X_{4\text{-}5}\, z - X_{4\text{-}5}\, z' - B (5\text{-}5') = 0$$

de unde

$$X_{4-5} = \frac{B (5\text{-}5') - P_1 (2\text{-}2') \cos \alpha - P_2 (3\text{-}3') \cos \alpha}{z\text{-}z'}$$

Generalizând, această expresie a efortului necunoscut se poate reprezenta astfel:

$$X_{4-5} = \frac{\sum Pp}{z-z'} \qquad (83)$$

în care $\sum Pp$ este suma momentelor forţelor exterioare în raport cu punctele rabătute, iar $(z-z')$ diferenţa braţelor de pârghie a efortului necunoscut în raport cu punctele rabătute.

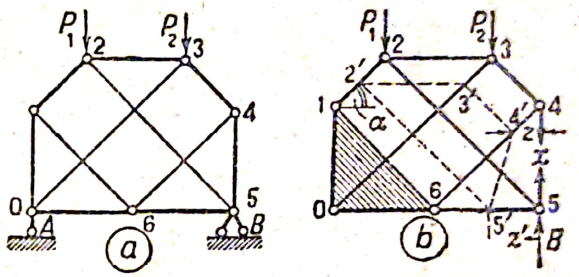


Fig. 185

După ce în grinda cu zăbrele s'a determinat efortul din bara X_{4-5}, calculul celorlalte elemente ale grinzii cu zăbrele devine posibil prin procedeele staticii.

Relevăm totuşi o proprietate a expresiei obţinute (83) care reprezintă o formă generalizată a ecuaţiei efortului necunoscut cu ajutorul punctelor rabătute. Dacă în această expresie $z=z'$, atunci $X = \infty$; aceasta arată că starea de echilibru este posibilă numai la o valoare infinit mare a efortului, ceea ce echivalează cu aceea că grinda este deformabilă (vezi § 43).

In exemplul din fig. 184, valoarea braţului de pârghie $z' = 0$, deoarece aparţine punctului fix 3.

§ 43. Determinarea condiţiilor de indeformabilitate

1. Procedeul geometric

Indeformabilitatea grinzilor cu zăbrele simple se verifică uşor prin cercetarea schemelor lor geometrice. Prin acelaşi procedeu se poate determina uneori indeformabilitatea grinzilor cu zăbrele suplimentare. De exemplu, indeformabilitatea grinzilor cu zăbrele reprezentate în fig. 178 şi 179 este evidentă, deoarece considerând triunghiul din mijlocul grinzii cu zăbrele ca fiind sistemul de bază, putem trece peste toată schema grinzii cu zăbrele, adăugând succesiv fiecărui nod câte două bare.

Insă foarte adeseori, indeformabilitatea grinzilor cu zăbrele nu poate fi determinată prin analizarea construcţiei lor geometrice (fig. 185).

In astfel de grinzi, indeformabilitatea se determină sau după condiţiile date de cinematică, ori analitic.

2. Metoda cinematică

Deoarece schema oricărei construcții, care nu are un număr suficient de legături poate fi considerată ca un mecanism mobil, problema indeformabilității unui sistem de construcție poate fi rezolvată pe baza principiilor cinematice relative la deplasările virtuale ale figurilor în plan. După acest principiu, deplasarea relativă a trei elemente rigide este posibilă, numai dacă trei centre instantanee de rotație, care condiționează mișcarea elementelor rigide, se găsesc pe aceeași linie dreaptă.

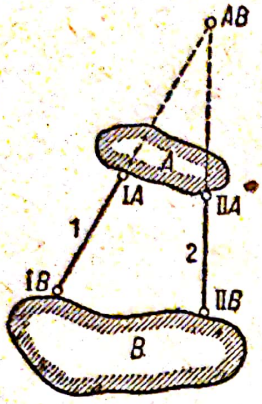


Fig. 186

Pe baza acestui principiu deplasarea relativă

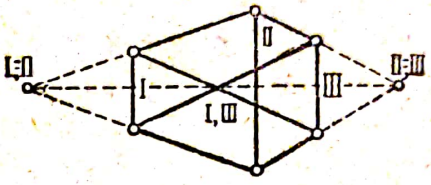


Fig. 187

a două elemente rigide A și B (fig. 186) este posibilă în jurul centrului instantaneu de rotație AB, a cărui poziție este determinată prin intersecția a două drepte. Intr'adevăr, articulațiile $I\,B$, $I\,A$, $II\,A$ și $II\,B$ sunt centrele care permit deplasarea barelor 1 și 2 în raport cu elementele rigide B și A, iar de aci deplasarea virtuală a elementului rigid A față de B trebue să se producă în jurul centrului $A\,B$ aflat pe o dreaptă, care trece prin centrele de rotație $I\,B$ și $I\,A$ și pe dreapta ce trece prin centrele de rotație $II\,B$ și $II\,A$, adică în raport cu punctul de intersecție al acestor două drepte.

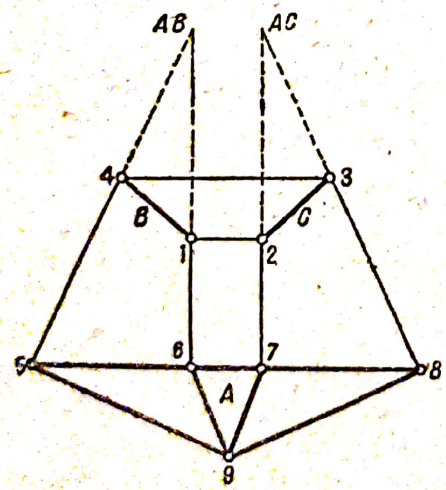


Fig. 188

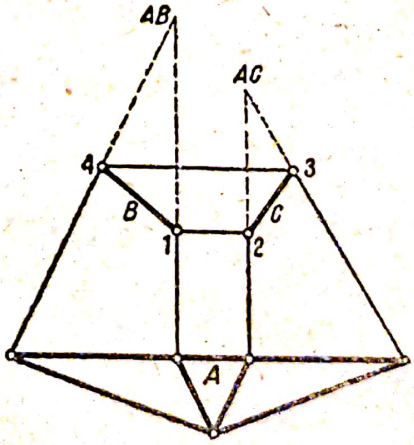


Fig. 189

Exagonul din fig. 187 reprezintă un sistem deformabil, deoarece în el toate cele trei centre I-II, II-III și I-III se găsesc pe o aceeași dreaptă.

Pe baza acestor ipoteze se poate spune că grinda cu zăbrele simetrică, reprezentată în fig. 188, este deformabilă, deoarece elementele rigide din care se compune A, B și C pot avea o deplasare relativă în

jurul centrelor AB, AC și CB ce se găsesc pe o aceeași dreaptă (centrul CB care ar fi determinat de intersecția dreptelor 1-2 și 3-4 se găsește la infinit, ceea ce echivalează cu poziția lui pe aceeași dreaptă cu celelalte două centre).

Dimpotrivă, grinda cu zăbrele asimetrică din fig. 189, având centrele AB și BC situate pe o dreaptă care nu este paralelă cu dreptele 1-2 și 3-4, este indeformabilă.

In sistemele complicate este destul de greu să găsim centrele instantanee de rotație și să stabilim posibilitățile de deplasare reciprocă a barelor și a elementelor rigide. Indeformabilitatea la aceste sisteme se determină mult mai simplu prin construirea diagramei viteselor (fig. 190). După cum se știe, diagrama viteselor permite alcătuirea expresiei lucrului mecanic virtual, după care efortul în bara suprimată se determină prin expresia (83):

$$X = \frac{\sum Pp}{z\text{-}z'},$$

în care z și z' sunt distanțele dela elementul suprimat până la punctele rabătute, corespunzătoare nodurilor dela extremitățile barei. Dacă aceste distanțe sunt egale între ele, efortul va fi infinit mare sau, exprimându-ne altfel, nu se poate stabili echilibrul în sistemul considerat, care este prin urmare deformabil.

Egalitatea brațelor de pârghie z și z' ce se referă la ultima bară, cu care se încheie diagrama viteselor, arată că această diagramă este absolut asemenea cu schema grinzii. De aci rezultă că grinda cu zăbrele va fi îndeformabilă, dacă diagrama viteselor rabătute construită pentru ea nu va fi asemenea cu schema grinzii cu zăbrele.

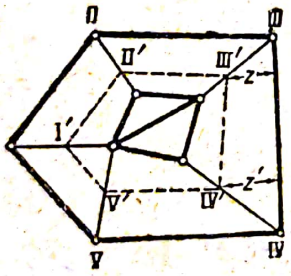


Fig. 190

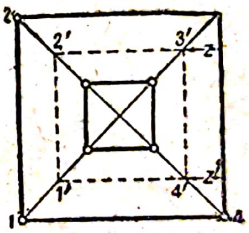


Fig. 191

De exemplu, în diagrama viteselor, construită pentru grinda cu zăbrele din fig. 190, latura finală III'-IV' nu este paralelă cu bara III-IV a grinzii; diagrama în acest caz nu este asemenea cu schema grinzii și prin urmare grinda cu zăbrele este indeformabilă.

Invers, grinda cu zăbrele reprezentată în fig. 191 este deformabilă, întru cât diagrama viteselor construită pentru ea 1'-2'-3'-4' este absolut asemenea cu conturul grinzii 1-2-3-4.

3. Procedeul analitic

Determinarea analitică a indeformabilității grinzilor cu zăbrele suplimentare se face ușor folosind metoda lui Henneberg. După această

metodă, efortul din bara suprimată se determină după expresia (79):

$$X = \frac{N_e^o}{\overline{N}_{ex}}$$

în care $\overline{N}_{ex}$ este efortul în bara ce s'a introdus, dat de forțele unitare îndreptate după direcția articulațiilor barei înlăturate.

Dacă în calcule acest efort $\overline{N}_{ex}$ este egal cu zero, aceasta înseamnă că efortul X în bara reală a grinzii cu zăbrele este infinit de mare, ceace se interpretează în sensul că grinda este deformabilă.

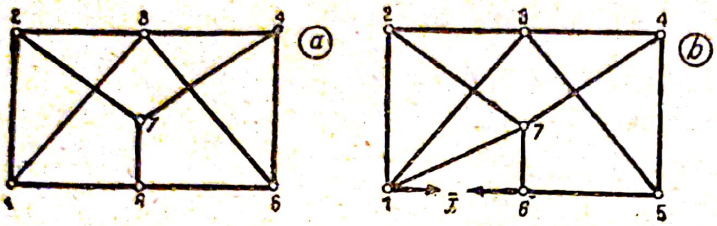


Fig. 192

Presupunem că trebue să stabilim dacă grinda cu zăbrele reprezentată în fig. 192 este sau nu indeformabilă. Indepărtăm bara 1-6 și găsim că bara înlocuitoare va fi 1-7. Aplicând în locul barei ce am înlăturat două forțe egale cu unitatea, găsim succesiv că eforturile

$$N_{7-6} = 0;\quad N_{6-5} = 1;\quad N_{4-5} \neq 0;\quad N_{3-5} \neq 0;\quad N_{4-7} \neq 0;$$

adică

$$N_{7-1} \neq 0;$$

de aci deducem că grinda cu zăbrele este indeformabilă.

Probleme și exerciții

45. Să se determine grinda inițială din care s'au obținut schemele grinzilor

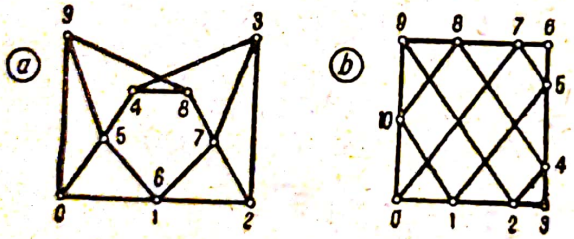


Fig. 193

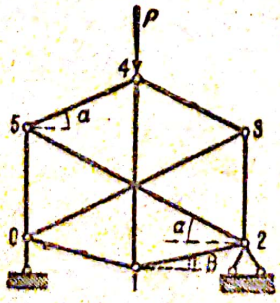


Fig. 194

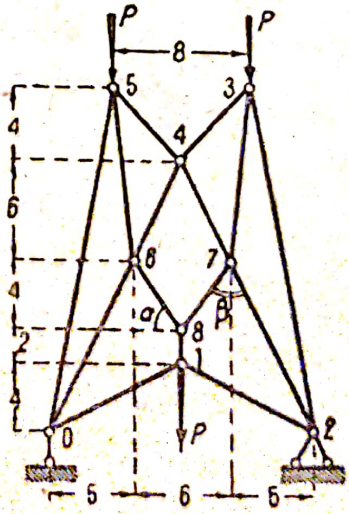


Fig. 195

cu zăbrele suplimentare, reprezentată în fig. 193, prin introducerea în acestea a barei înlocuitoare 8-9.

Indicație. Înlăturând, de exemplu, bara 8-9, trebue să studiem sistemul rămas și să găsim o bară care ar face sistemul rămas indeformabil în structura lui.

46. Să se determine, după metoda Henneberg, eforturile în barele grinzii cu zăbrele din fig. 194.

Indicație. După suprimarea barei 3-2, bara ce o înlocuește în sistemul inițial este aceea dintre nodurile 0-2. Se recomandă ca determinarea efortului în bara înlăturată să se facă analitic.

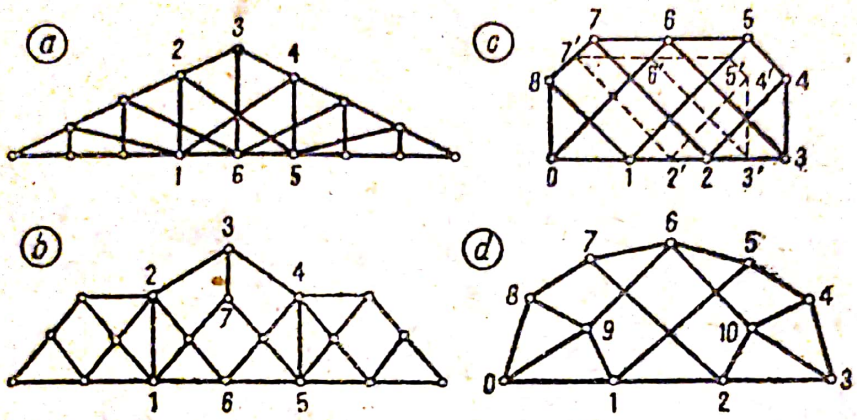


Fig. 196

47. Să se determine prin metoda Henneberg eforturile în barele grinzii cu zăbrele înfățișată în fig. 195.

Indicație. Pentru a stabili modul de calcul, se recomandă să se înlăture din sistem bara 1-8, fiind pe axa de simetrie și să se introducă bara 6-7 care să o înlocuiască, păstrând simetria sistemului. Se recomandă calculul analitic și construirea epurei lui Cremona.

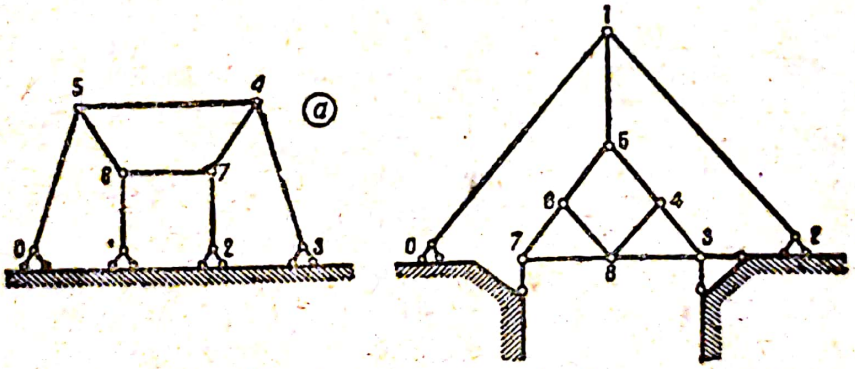


Fig. 197

48. Să se stabilească dacă schemele grinzilor cu zăbrele, reprezentate în fig. 193 și 196, sunt exact întocmite.

Indicație. Problema referitoare la schemele *a* și *b* (fig. 196) se reduce la a stabili dacă exagoanele din mijloc sunt sau nu deformabile.

Intrebare. Pentru care direcție a barelor 2-3 și 3-4, schema *b* din fig. 196 se transformă într'un sistem deformabil și de ce?

49. Să se constate dacă schemele reprezentate în fig. 197, în care barele înlocuitoare nu se introduc în conturul grinzilor propriu zise, ci numai în legătură cu elementul rigid (pământul), sunt alcătuite corect?

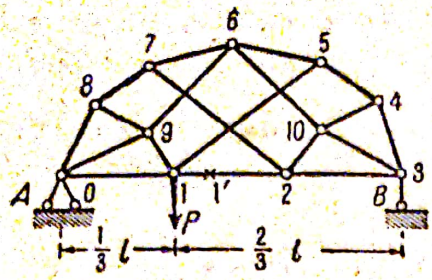


Fig. 198

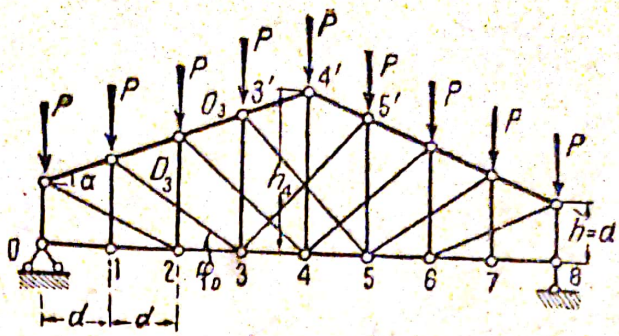


Fig. 199

50. Să se determine prin construcţia diagramei viteselor efortul în bara S_{2-3} aparţinând grinzii cu zăbrele reprezentată în fig. 194.

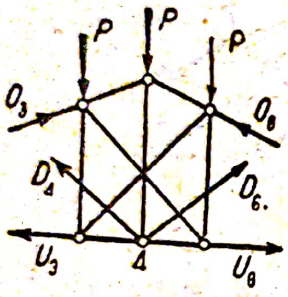


Fig. 200

51. Prin construirea diagramei viteselor, să se determine efortul în bara S_{7-3} aparţinând grinzii cu zăbrele din fig. 198, în ipoteza că este încărcată cu o sarcină P în nodul 1.

52. Să se determine eforturile în grinda cu zăbrele înfăţişată în fig. 199.

Indicaţie. Trecând succesiv dela un nod la altul, începând cu nodurile de pe reazim, se pot determina eforturile în toate barele, cu excepţia barelor care sunt cuprinse în conturul 3-4-5-5'-4'-3'.

Eforturile în barele exagonului din mijloc pot fi aflate prin metoda lui Henneberg (vezi problema 44), ţinând seama de încărcările exterioare şi de eforturile care acţionează asupra acestui exagon (fig. 200).

§ 44. Construirea liniei de influenţă cu ajutorul diagramei viteselor

In § 42 s'a arătat cum se aplică diagrama viteselor în cazul când trebue să determinăm deplasările nodurilor grinzii cu zăbrele, care devin posibile prin suprimarea din sistem a barei cu efortul necunoscut. Cunoscând deplasările virtuale ale nodurilor încărcate pe direcţia sarcinilor, se poate construi epura liniilor de încărcare. Aceasta, după cum se ştie (vezi § 35), poate fi considerată ca linia de influenţă a efortului în legătura suprimată, fiind măsurată însă la scara corespunzătoare deformaţiilor virtuale ale barei. In acest fel diagrama viteselor poate fi utilizată nu numai pentru determinarea valorii efortului, ci şi pentru construirea liniilor lor de influenţă. Această construcţie a liniei de influenţă, nefiind legată de condiţiile speciale de alcătuire a grinzii cu zăbrele, poate fi executată pentru orice grindă. In aceasta constau avantajele metodei. Pentru o mai bună înţelegere a problemei, vom analiza mai întâi aplicarea acestei metode în construcţia liniilor de influenţă pentru grinzile cu zăbrele simple.

Pentru determinarea efortului în bara U_{3-4} a grinzii reprezentate în fig. 201-a, înlăturăm această bară, transformând astfel grinda într'un sistem deformabil. Inlocuim bara U_{3-4} prin efortul corespunzător şi fixând toată partea indeformabilă din dreapta grinzii 4-12-8, admitem prin această ipoteză că partea din stânga 3-12-0-3, împreună

cu reacțiunea A și efortul U_{3-4}, pot să se deplaseze față de partea din dreapta în jurul nodului 12. Deplasarea relativă compatibilă a nodului 3 poate fi caracterizată prin vitesa respectivă, pe care o reprezentăm prin segmentul 3-3' pe direcția diagonalei D_{3-12}. Considerând punctul 3' drept punct inițial (de pornire), putem — pe baza datelor din § 42 — să construim diagrama viteselor relative pentru toate nodurile grinzii. Punctul 13' se obține ducând linia 3'-13' $\parallel$ 3-13 până la intersecția cu direcția 12-13; punctul 2' se obține la întretăierea dreptelor 3'-2' $\parallel$ 3-2 cu 13'-2' $\parallel$ 13-2; punctul 14' la intersecția dreptelor 2'-14' $\parallel$ 2-14 cu 13'-14' $\parallel$ 13—14 etc. până ce obținem punctul 0'.

In cazul de față, ne interesează deplasările pe verticală a nodurilor încărcate 0, 1, 2, 3, 4 . . . , 8. Pe diagrama obținută aceste deplasări se vor determina prin proiecțiile pe orizontală ale deplasărilor efective, adică prin proiecțiile orizontale ale liniilor 0-0', 1-1', 2-2', . . . , deoarece după cum se știe, direcția vitelor relative sau a deplasărilor se ia pe perpendiculara dusă pe direcția deplasării virtuale.

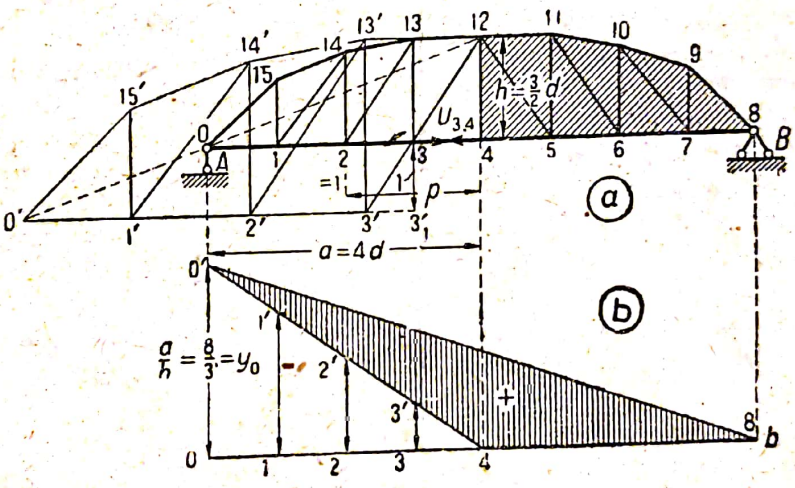


Fig. 201

Măsurând aceste segmente, le așezăm sub formă de ordonate: 0-0', 1-1', 2-2', 3-3', *de o singură parte a axei absciselor 0b* (fig. 201, b) *întru cât toate deplasările în diagrama obținută sunt dirijate într'o singură parte* (către stânga) *dela poziția reală a nodurilor*; unind prin drepte vârfurile lor, vom obține diagrama deplasărilor virtuale ale acestor noduri în raport cu partea fixă din dreapta, a cărei poziție este determinată de dreapta 4-8 sau de axa absciselor. Deoarece am analizat deplasarea părții din stânga a grinzii față de partea fixă din dreapta, și nodul din reazim va căpăta o deplasare, determinată prin segmentul 0-0', pe când în realitate el nu va avea această deplasare. De aceea pentru obținerea deplasărilor reale, trebue să rotim toată grinda în așa fel, încât această deplasare să fie împiedecată. In diagrama deplasărilor verticale, aceasta se caracterizează prin ducerea liniei drepte 8-0'. *Atunci valorile deplasărilor reale, posibile pe verticală, ale tuturor nodurilor se determină prin diferența ordonatelor acestei drepte și a*

ordonatelor obținute din diagrama vitezelor. După scăderea acestor ordonate, obținem diagrama deplasărilor virtuale, verticale, care în fig. 201-b este reprezentată prin triunghiul haşurat. Pentru a putea trece dela diagrama deplasărilor virtuale la linia de influență, trebue să determinăm semnul și scara deplasării virtuale.

Expresia analitică a efortului U_{3-4}, alcătuită după diagrama vitezelor, se va scrie pe baza expresiei lucrului mecanic virtual astfel:

$$U_{3-4}\,\delta - A y_0 + 1 \cdot y_p = 0$$

In această expresie semnele sunt puse în conformitate cu semnele momentelor forțelor A, U și $P = 1$, luate în raport cu punctele rabătute.

Deoarece în general

$$A = 1\,\frac{l-x}{l},$$

ecuația se va reduce la forma:

$$U_{3-4} = \frac{1}{\delta}\left(y_0\,\frac{l-x}{l} - y_p\right). \qquad (84)$$

Din această ecuație rezultă de asemenea că ordonatele diagramei deplasărilor reale se determină prin scăderea ordonatelor deplasărilor relative ale fiecărui nod din ordonatele dreptei 8-0', ceea ce a fost demonstrat mai înainte. [1])

Scara de trecere dela diagrama deplasărilor virtuale la linia de influență va fi factorul $1:\delta$, în care δ este deplasarea reciprocă a nodurilor dela extremitățile barei suprimate U_{3-4}; în diagramă, această deplasare va fi reprezentată prin segmentul vertical $3'_1$-3, fiind proiecția deplasărilor virtuale a nodului 3. Intr'adevăr valoarea deplasării nodului 3 pe direcția barei U_{3-4} poate fi exprimată și prin unghiul de rotație $\Delta\,\delta$ a părții din stânga în jurul articulației 12 și anume:

$$\delta = h\,\Delta\,\delta$$

Deplasările virtuale pe direcția forțelor A și P pot fi exprimate astfel:

$$y_0 = \frac{1}{2}\,\Delta\,\delta \quad \text{și} \quad y_p = p\,\Delta\,\delta$$

Substituind aceste valori ale deplasărilor virtuale în expresia (84), obținem:

$$U_{3-4} = \frac{1}{h}\left(a\,\frac{l-x}{l} - p\right)$$

---

[1]) **Notă.** In cazul de față, construirea diagramei deplasărilor virtuale s'ar putea simplifica pe baza considerentului că elementul rigid din stânga 0-3-12 este indeformabil, putându-se astfel, fără a determina deplasările tuturor nodurilor, să se afle direct deplasarea nodului 0 ducând dreapta 3'-0' ∥ 3-0 până la intersecția cu direcția 12-0. Cu ordonata 0-0' ca proiecție a deplasării virtuale, se determină dreapta 0'—4 care caracterizează deplasarea virtuală a elementului rigid 0-3-12 în raport cu elementul rigid 12-4-8, deci și deplasările nodurilor 1, 2 și 3 (fig. 201-b).

Construirea mai departe a diagramei deplasărilor virtuale devine ușoară în urma acestor explicații.

Scanned with OKEN Scanner

Această expresie reprezintă ecuația liniei de influență a tălpii și este rezultatul transformării la scară a segmentelor δ, y_0 și y_p.

Astfel pentru determinarea scării unei linii de influență, trebue să considerăm ca unitate a scării ordonatelor deplasărilor virtuale, segmentul perpendicular pe direcția barei suprimate, care determină deformația virtuală a acestei bare. In cazul de față, scara este determinată prin segmentul $3\text{-}3'_1 = 1$ (fig. 201).

Semnul liniei de influență se determină din ecuația lucrului mecanic virtual. Semnul primului membru al ecuației (84) este pozitiv, deci ordonatele dreptei b-0' în diagramă (fig. 201) trebue să fie și ele pozitive.

Să analizăm acum construcția liniei de influență cu ajutorul diagramei viteselor la o grindă în sistem dublu dreptunghiular, cu o talpă curbă (fig. 202-a).

In această figură, în dreptul literei *a* sunt construite : diagrama viteselor și linia de influență a montantului V_{4-17} dedusă din diagrama viteselor.

Prin separarea acestui montant din grinda cu zăbrele, partea din dreapta delimitată de nodurile 5-18-17 . . . 10-5 rămâne indeformabilă.

Toată partea din stânga se prezintă ca un sistem de bare mobile.

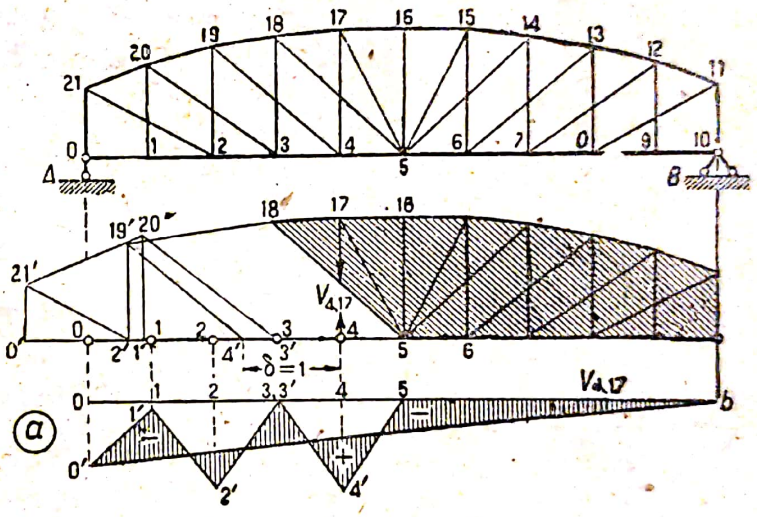


Fig. 202

Considerând segmentul 4-4' ca vitesa deplasării virtuale a nodului 4 și punând-o pe direcția barei 5-4, construim astfel succesiv diagrama viteselor pentru toate nodurile părții din stânga.

Pentru ca să obținem epura deplasărilor virtuale, măsurăm dela axa absciselor valorile deplasărilor verticale ale nodurilor inferioare solicitate ale grinzii, care în diagrama viteselor se determină prin segmentele orizontale 0-0', 1-1', 2-2' etc. Epura deplasărilor relative de forma unei linii frânte obținută prin această construcție se corectează după valoarea deplasării nodului de pe reazim 0-0', egalând această deplasare cu zero. Linia frântă obținută în acest fel, 0'-1'-2'-3'-4'-5-b este epura deplasărilor reale pe verticală a nodurilor încărcate.

Scara și semnul se determină din ecuația lucrului mecanic virtual aplicat pentru partea din stânga a grinzii din care rezultă :

$$-V_{4-17} \cdot \delta - Ay_0 + 1 \cdot y_p = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$V_{4\cdot 17} = \frac{1}{\delta}\left(-\frac{l-x}{l}\,y_0 + y_a\right).$$

Prin urmare, pentru partea din dreapta grinzii, pentru care $y_a = 0$; semnul liniei de influenţă va fi negativ.

Scara se determină direct prin segmentul iniţial 4-4' al diagramei viteselor, care reprezintă deplasarea virtuală a nodului 4-4', când se suprimă bara V_{4-17}.

In fig. 203 este reprezentată linia de influenţă a efortului din bara U_{4-5} din talpa inferioară.

Prin suprimarea acestei bare din alcătuirea grinzii, devine posibilă deplasarea părţii din stânga în raport cu nodurile 17 şi 18, care aparţin părţii fixe din dreapta.

Pentru construirea diagramei viteselor, alegem deplasarea virtuală a nodului 4, pe care o luăm egală cu segmentul 4-4' şi o punem pe direcţia barei 17-4. Construirea în continuare a diagramei viteselor se face în mod obişnuit.

Corectând epura obţinută, 0'-1'-2'-3' a deplasărilor relative cu valoarea rotirii grinzii întregi în jurul articulaţiei reazimului B şi egalând deplasările verticale ale reazimului A cu zero, vom obţine epura deplasărilor reale delimitată prin punctele 0'-1'-2'-3'-b.

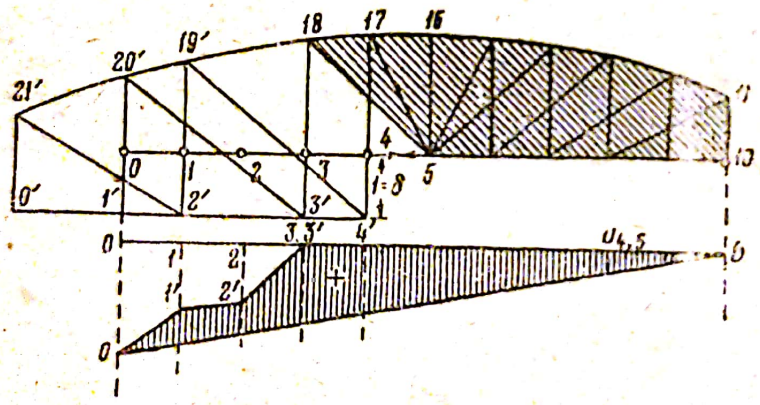


Fig. 203

Scara de transformare a epurei deplasărilor virtuale în linia de influenţă a barei U_{4-5} este segmentul iniţial 4-4', care determină valoarea deplasării virtuale a nodului 4, în cazul când se înlătură bara U_{4-5}.

Semnul liniei de influenţă se determină prin ecuaţia lucrului mecanic virtual, care în cazul când sarcina unitară este aplicată în partea din dreapta, va fi următoarea:

$$+\,U_{4-5}\,\delta - A_0 y_0 = 0'$$

şi rezultă deci că efortul este pozitiv.

In fig. 204, este reprezentată linia de influenţă pentru efortul din diagonala D_{18-5} a aceleiaşi grinzi.

Eliminând această diagonală din alcătuirea grinzii, porţiunea 4-17-11-10-4 rămâne indeformabilă, iar întreaga porţiune din stânga va putea să se deplaseze pe verticală.

Alegând segmentul 3-3' ca deplasare virtuală a nodului 3, construim succesiv pe cale normală diagrama viteselor pentru toate nodurile părții din stânga, corectând-o printr'o rotire în jurul articulației din reazimul B, egală cu valoarea deplasării verticale 0-0' a nodului din reazimul din stânga. Epura va fi linia frântă 0'-1'-2'-3'-4-b.

Scara de transformare a acestei epure în linie de influență va fi deplasarea nodului 18, care devine posibilă prin suprimarea diagonalei; unitatea scării $\delta = 1$ se determină prin segmentul 18-18_2 al normalei dusă din punctul rabătut 18' pe direcția diagonalei.

Aplicând sarcina unitară în partea din dreapta, ecuația lucrului mecanic virtual va fi:

$$D_{18-5}\,\delta - Ay_0 = 0$$

de unde

$$D_{18-5} = A\frac{y_0}{\delta}$$

deci în partea din dreapta, linia de influență are semnul pozitiv.

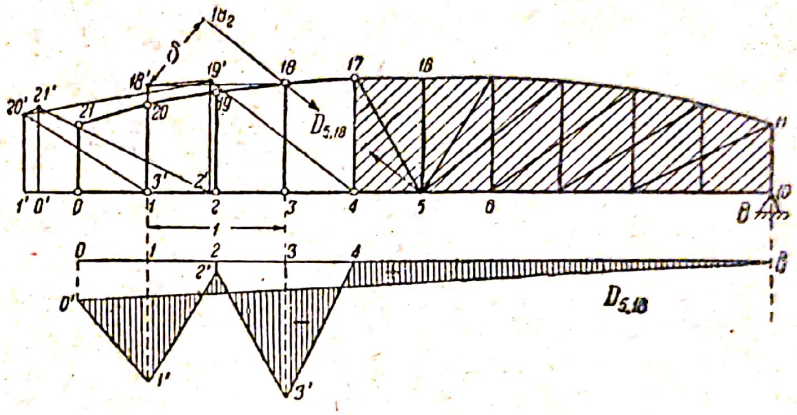


Fig. 204

Desavantajul metodei expuse constă în necesitatea de a construi câte o linie de influență pentru fiecare bară ce se examinează. Se poate evita acest inconvenient, prin construirea diagramei viteselor și după ea a liniei de influență pentru una sau două bare, utilizându-le apoi la construcția liniilor de influență pentru celelalte bare.

Să arătăm posibilitatea de a utiliza liniile de influență construite pentru unele bare, la construirea liniilor de influență ale altor bare.

Aceasta se poate face considerând că liniile construite sunt linii de influență totală, ale căror ecuații se determină pe baza principiilor staticii.

De exemplu, având linia de influență a diagonalei D_{5-18}, efortul elementului din talpă U_{4-5}, pe care l-am examinat anterior, poate fi determinat din condițiile de echilibru după secțiunea s-s (fig. 205) și se va scrie astfel:

$$-U_{4-5}\,h_4 + Aa_4 - D_{5-18}\cdot r = 0$$

de unde

$$U_{4-5} = A\,\frac{a_4}{h_4} - D_{5\ 18}\,\frac{r}{h_4} = U^0_{4\ 5} - D_{5-18}\frac{r}{h_4}$$

In această ecuație a_4, h_4 și r sunt brațele de pârghie respective ale reacțiunii și ale eforturilor U_{4-5} și D_{5-18} în raport cu punctul momentelor (în nodul 17).

Din această ecuație rezultă că efortul U_{4-5} în grinda cu zăbre-

Scanned with OKEN Scanner

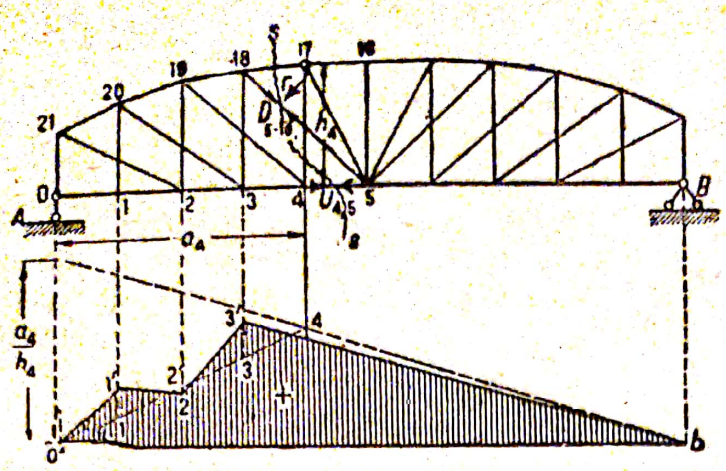


Fig. 205

le suplimentare se compune din efortul U^0_{4-5} al sistemului simplu și din efortul diagonalei D_{5-18}, modificat în raportul r/h_4. Prin urmare, linia de influență a barei U_{4-5}, făcând parte dintr'o grindă cu zăbrele suplimentare, se va compune din linia de influență a efortului U^0_{4-5} reprezentând triunghiul 0 4 b cu ordonata în dreptul reazimului egală cu a_4/h_4 și din linia de influență a diagonalei D_{5-18}, arătată în fig. 204, ale cărei ordonate măsurate în raportul r/h trebuesc adunate sau scăzute, în raport cu semnul lor, din ordonatele liniei de influență U^0_{4-5}. Conturul definitiv al liniei de influență totală va fi poligonul 0 1′2′3′b, care este asemenea cu conturul liniei de influență pentru aceeași bară U_{4-5}, reprezentată în fig. 203.

Metoda falselor poziții

Diagrama viteselor poate fi construită dacă cunoaștem *două puncte inițiale* (§ 42). De obiceiu, la construcția diagramei se alege o vitesă oarecare a unui nod. Vitesa unui alt punct sau nod se determină din condițiile deplasării compatibile ale grinzii cu zăbrele, considerată ca un mecanism, de exemplu din condițiunile fixării, adică: articulații, mobilitatea reazimelor etc.

La grinzile cu zăbrele suplimentare însă se pot ivi cazuri când, deși există un punct ales sau dedus al diagramei vitesei rabătute, punctul următor al acesteia nu se poate afla în mod direct. In astfel de cazuri construcția diagramei poate fi executată numai pe calea aproximațiilor succesive, pe baza următoarei ipoteze cunoscută din geometria proiectivă: *dacă un poligon oarecare, păstrându-și laturile paralele, își schimbă poziția în așa fel, încât toate vârfurile unghiurilor lui, în afară de unul, se deplasează pe linii drepte, atunci și acest din urmă vârf se va deplasa pe o dreaptă.*

Să explicăm acest procedeu printr'un exemplu (fig. 206), examinând o grindă cu zăbrele care devine deformabilă prin suprimarea barei D_{2-4}. Construirea diagramei viteselor s'a început plecând dela ipoteza că elementul din stânga 1 poate să se rotească în jurul articulației 0 sau în jurul centrului instantaneu de rotație E I. Alegând vitesa virtuală a nodului 2 sub forma segmentului 2-2′, găsim — după regula generală — vitesa nodului 1, ducând în acest scop dreapta 2′-1′ ∥ 2-1 până la intersecția cu direcția 1-E I. Mai departe, pentru determinarea viteselor nodurilor 3 și 4, putem duce dreptele 2′-3 ∥ 2-3 și 1′-4_1 ∥ 1-4 însă ele sunt insuficiente pentru a putea determina vitesa relativă a unuia din aceste noduri. Vom putea ieși din această situație numai dacă vom alege *două deplasări arbitrare.*

De exemplu, alegând pentru nodul 3 două puncte arbitrare 3_1 și 3_2 pe dreapta 2′-3 ∥ 2-3, fără să ținem seama de faptul acestei alegeri

arbitrare, putem să continuăm construirea diagramei, aflând succesiv prin construcțiile obișnuite punctele 4_1, 6_1 și 4_2, 6_2. In acest fel vom duce până la sfârșit construirea ambelor diagrame, obținând *două false diagrame* ale viteselor, asemănătoare între ele și având proprietatea că toate punctele lor din noduri se deplasează pe liniile drepte 4_1-4_2, 3_1-3_2, 6_1-6_2 etc. Având aceste diagrame, putem să le comparăm cu condițiile deplasării virtuale a unui nod oarecare al grinzii considerate ca un mecanism, de exemplu cu condițiile de deplasare a nodului de reazim etc. Astfel vom avea două condiții care determină mișcările virtuale ale nodului: prima din condițiile grinzii considerată ca un mecanism și a doua, din mișcarea nodurilor diagramei după liniile drepte, obținute prin *metoda falselor poziții*.

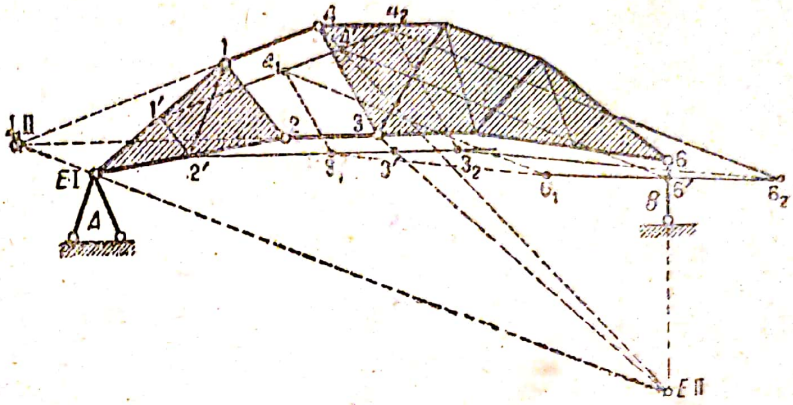


Fig. 206

In fig. 206 poziția adevărată a diagramei se determină prin condiția deplasării virtuale a nodului din reazimul B prin normala în punctul B la planul mișcării și prin dreapta 6_1-6_2, care face parte din falsa diagramă. Intersecția acestor drepte stabilește

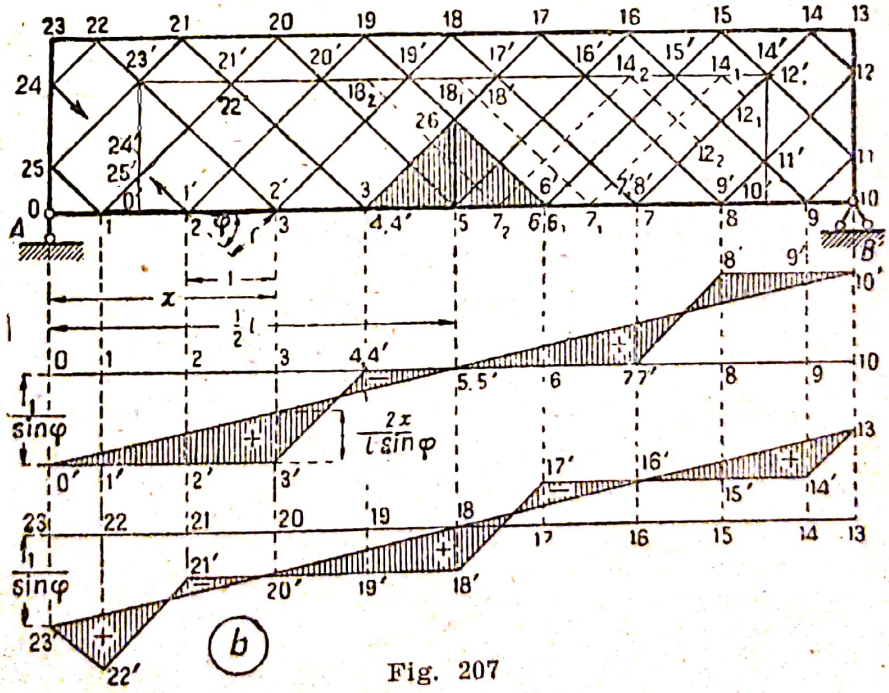


Fig. 207

poziția adevărată a punctului 6', dându-ne astfel posibilitatea să construim adevărata poziție a diagramei viteselor, care se va determina prin punctele 6', 4' 3'.

Deoarece procedeele de construcţie a epurelor deplasărilor virtuale cu ajutorul centrelor instantanee de rotaţie şi a diagramei viteselor se bazează pe acelaşi principiu de mişcare virtuală a unei figuri indeformabile, ele pot să se completeze reciproc şi totodată să servească pentru verificarea unui procedeu prin celălalt.

Adeseori, fără să determinăm toate centrele instantanee de rotaţie, putem să cunoaştem poziţia centrelor unor elemente rigide sau a unora din bare. Poziţia acestor centre va corecta şi poziţiile diferitelor puncte din diagrama viteselor.

Astfel, dacă în fig. 206 se va cunoaşte poziţia centrului instantaneu E II, care se determină uşor prin centrele E I şi I—II, atunci poziţia fiecăruia dintre punctele rabătute 3' şi 4' ale diagramei viteselor poate fi obţinută la intersecţia dreptelor 2'-3' ∥ 2-3 cu 3 E II şi 1'-4' ∥ 1-4 cu 4 E II, fără să mai utilizăm metoda falselor poziţii.

Pentru lămurirea metodei expuse, analizăm mai jos un procedeu de construire a liniei de influenţă într'o grindă cu tălpi paralele şi cu zăbrele de sistem triunghiular cuadruplu.

Grinda cu zăbrele multiple, reprezentată în fig. 207, este indeformabilă şi static determinată (are 27 noduri şi 51 bare). Indeformabilitatea sistemului este asigurată prin bara 5-26, ceea ce se verifică cel mai simplu prin diagrama viteselor (vezi § 44).

Să analizăm modul de construire a liniei de influenţă pentru diagonala D_{24-3}.

Suprimând această bară şi aplicând în locul ei două forţe egale şi de sens contrar, sistemul devine deformabil, iar nodul 2 poate avea anumite deplasări verticale. Considerând imobil triunghiul 4-26-6, care rămâne indeformabil prin suprimarea barei 24-2, construim diagrama viteselor pentru întregul sistem, alegând segmentul 2-2' ca deplasare virtuală a nodului 2 pe direcţia verticală.

Având punctul 2', găsim punctele rabătute 19', 20' şi 21' pentru nodurile corespunzătoare, deoarece aceste puncte trebue să se găsească pe dreptele 6-19, 5-20 şi 4-21, care pot să se rotească în jurul nodurilor triunghiului fix. Construirea diagramei devine mai departe imposibilă din cauza insuficienţii datelor, de aceea vom utiliza metoda falselor poziţii.

Să alegem o poziţie arbitrară a punctului rabătut 18_1, care trebue să se găsească pe o dreaptă paralelă cu 19-18. Pornind dela acest punct, vom găsi poziţia punctelor rabătute 17', 16', 15' şi 7_1, care trebue să se afle pe dreptele 4-17, 5-16, 6-15, 6-7, ca drepte ce se rotesc în jurul nodurilor triunghiului fix. Mai departe ducând linia

$15'-14_1$	∥ 15-14	şi	7_1-14_1	∥ 7-14	găsim punctul 14_1
17'-8'	∥ 17-8	„	7_1-8'	∥ 7-8	„ „ 8'
16'-9'	∥ 16-9	„	8'-9'	∥ 8-9	„ „ 9'
14_1-12_1	∥ 14-12	„	$8'-12_1$	∥ 8-12	„ „ 12_1
9'-11'	∥ 9-11	„	15'-11'	∥ 15-11	„ „ 11'

Din condiţia de mişcare a sistemului, punctul 12_1 trebue să se găsească pe verticala dusă din punctul 11', condiţie care nu este îndeplinită în diagrama construită, dându-ne în acest fel prima falsă poziţie.

A doua falsă poziţie a diagramei viteselor se găseşte pornind dela a doua falsă poziţiei a punctului rabătut 18_2, care păstrează poziţiile punctelor 17', 16' şi 15', însă dă altă poziţie a punctului 7_2 şi în consecinţă şi poziţii noi pentru punctele 14_2 şi 12_2; punctele 8', 9' şi 11' îşi păstrează vechile poziţii.

Din aceste două false poziţii ale diagramei viteselor, rezultă că punctul rabătut 12' trebue să se deplaseze pe linia dreaptă 8'-14, pe când punctul 11' rămâne fix, deci, după condiţia sistemului, poziţia adevărată a punctului 12' va fi la intersecţia dreptei 8-14 cu verticala dusă din punctul 11', unde el se va confunda

Scanned with OKEN Scanner

cu punctul 14'. Astfel făcând construcţia inversă, vom obţine poziţia adevărată a diagramei, care va corespunde când punctul 7' va coincide cu nodul 7 şi punctul 18' cu punctul 17'.

Cunoscând poziţia punctului rabătut 18' se poate găsi poziţia punctului 3', care trebue să se găsească la intersecţia dreptei 2'-3' ‖ 2-3 cu 18'-3' ‖ 18-3.

Mai departe ducând dreptele :

3'-22' ‖ 3-22	şi	21'-22' ‖ 21-22	găsim	punctul	22'
20'-1' ‖ 20-1	„	2'-1' ‖ 2-1	„	„	1'
1'-25' ‖ 1-25	„	21'-25' ‖ 21-25	„	„	25'
25'-24' ‖ 25-24	„	22'-24' ‖ 22-24	„	„	24'
24'-23' ‖ 24-23	„	22'-23' ‖ 22-23	„	„	23'
25'-0' ‖ 25-0	„	1'-0' ‖ 1-0	„	„	0'

cu care se încheie construcţia diagramei viteselor.

Cunoscând deplasările virtuale ale nodurilor tălpii inferioare, construim epura deplasărilor virtuale ale acestor noduri, care se caracterizează prin faptul că toate nodurile ce se găsesc la stânga triunghiului 4-26-6 au punctele rabătute în dreapta lor, iar toate nodurile din dreapta aceluiaşi triunghiu au punctele rabătute în stânga lor. Deci în epura deplasărilor virtuale, ordonatele care determină deplasările virtuale ale acestor noduri trebue să se aşeze în ambele părţi ale absciselor, ceea ce face ca epura să se prezinte după poligonul 0'-3'-4-7-8'-10'.

Deoarece punctele de reazim 0 şi 10 nu pot avea deplasări verticale, trebue să corectăm această epură prin rotirea ei în jurul triunghiului fix, la care rotire corespunde dreapta 0'-10'. Epura reală a deplasărilor virtuale este reprezentată prin poligonul haşurat 0'-3'-4'-7'-8'-10' şi se compune din patru părţi.

Scara liniei de influenţă şi semnul se determină din condiţia lucrului mecanic virtual în raport cu punctele rabătute care, pentru poziţia sarcinii P în nodul 3, se va scrie astfel :

$$D_{2-24}\ (2\text{-}2')\ \sin\varphi + A\ (0\text{-}0') - P\ (3\text{-}3') - B\ (10\text{-}10') = 0\ ;$$

însă, deoarece toate segmentele 2-2', 0-0' şi 10-10' sunt egale cu lungimea panoului d, iar valorile reacţiunilor A şi B pot fi exprimate în funcţie de P, ecuaţia eforţului poate fi pusă sub forma :

$$D_{2-24} = \frac{P}{\sin\varphi}\left(+1+\frac{x}{l}-\frac{l-x}{l}\right)=\frac{P}{\sin\varphi}\cdot\frac{2x}{l}$$

din care rezultă că atunci când trecem la linia de influenţă, ordonatele epurei deplasărilor virtuale trebue să fie modificate în raportul $1/\sin\varphi$ şi că semnul ordonatei în dreptul nodului 3 trebue să fie pozitiv ; cu aceasta se determină şi semnul în celelalte părţi ale liniei de influenţă,

In aceeaşi fig. 207, la litera *b*, este reprezentată epura deplasărilor virtuale pentru nodurile superioare (sarcina fiind aplicată sus). Schimbarea încărcării nu modifică diagrama viteselor, însă epura deplasărilor virtuale fiind în funcţie de schimbarea nodurilor încărcate va suferi modificări.

Scara şi semnul liniei de influenţă se determină din ecuaţia lucrului mecanic, care — pentru sarcina P aplicată în nodul 22 — se va scrie astfel :

$$D_{2-24}\ d\sin\varphi + Ad - P\cdot 1{,}5\ d - B\cdot d = 0$$

In această ecuaţie, braţul de pârghie al forţei P faţă de punctul rabătut 22' este egal cu 1,5 d.

Examinând reacţiunile A şi B în funcţie de sarcina P şi făcând reducerea termenilor, obţinem

$$D_{2-24} = \frac{P}{\sin\varphi}\left(1{,}5+\frac{x}{l}-\frac{l-x}{l}\right)=\frac{P}{\sin\varphi}\left(0{,}5+\frac{2x}{l}\right)$$

Prin urmare scara de transformare a acestei linii de influenţă, ca şi cea dintâi, este egală cu $1/\sin\varphi$, iar ordonata liniei de influenţă în dreptul nodului 22 este pozitivă ; prin aceasta se determină şi semnele celorlalte părţi ale liniei de influenţă.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 8

GRINZI CU ZĂBRELE IN CONSOLĂ

§ 45. Caracteristicele grinzilor cu zăbrele simple în consolă

Grinzile cu zăbrele simple în consolă, prin asemănare cu grinzile simple cu console, sunt grinzi cu zăbrele pe două reazime, având una sau ambele extremități scoase în consolă. Aceste grinzi au proprietățile grinzilor simple cu console în ce privește curbele momentelor și forțelor tăietoare și ale grinzilor simple cu zăbrele în privința eforturilor în elementele grinzii.

După variația curbei momentelor, care are momentele minime negative pe reazime, conturul rațional din punct de vedere teoretic al grinzilor cu zăbrele în console trebue să prezinte o sporire a înălțimii spre reazime. In fig. 208 este reprezentată o grindă cu zăbrele și două console, care au conturul caracteristic al curbei momentelor. Mai frecvent însă, din considerente estetice și constructive, conturul grinzilor se racordează prin linii continue (fig. 209 și 210), iar uneori chiar se rectifică (fig. 211).

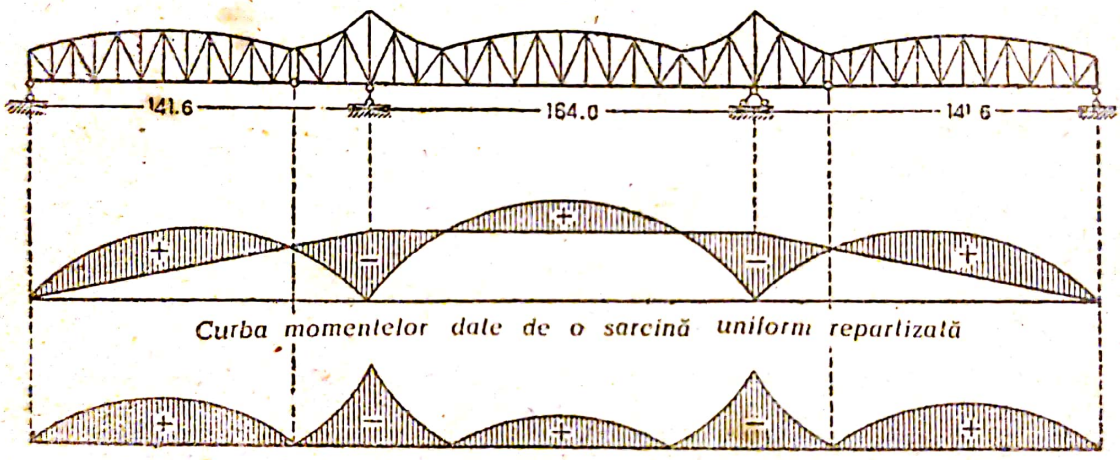


Fig. 208

In calculul grinzilor cu zăbrele în consolă, trebue să distingem în primul rând porțiunea dintre reazime (deschiderea), ale cărei eforturi în elementele ce o compun depind de încărcarea acestei porțiuni, precum și a consolelor și în al doilea rând consolele, ale căror eforturi în bare depind de încărcările consolelor și ale grinzilor independente susținute de acestea.

Eforturile în toate elementele consolelor, cu rare excepții, se caracterizează prin aceea că semnul lor, care este în funcție de încărcarea numai de o singură parte, este constant.

Porțiunea dintre reazime (deschiderea) a grinzii cu zăbrele și consolele lucrează în condiții mult mai complexe; spre deosebire de grinzile cu zăbrele simple, eforturile în aceeași talpă pot fi diferite, în raport cu încărcarea deschiderii sau a consolei.

Relația rațională dintre lungimea deschiderii, lungimea consolei și a grinzii independente se determină printr'o funcție complicată, care

depinde de valoarea încărcării permanente și temporare, precum și de conturul grinzii cu zăbrele, deci, *fără să ne oprim* asupra acestei chestiuni, menționăm că la grinzile cu zăbrele cu două console raportul cel mai frecvent între lungimea consolei l și deschiderea L este cuprins între :

$$\frac{l}{L} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}$$

Sporirea lungimii consolei provoacă mărirea reacțiunii negative dela celălalt reazim, care trebue să fie consolidat, spre a preveni ridicarea grinzii de pe el.

§ 46. Eforturile în elementele din deschidere și liniile lor de influență

Eforturile în barele grinzilor cu zăbrele în console se determină prin același procedeu ca și la grinzile cu zăbrele pe două reazime și în cazul când sistemul de zăbrele al acestor grinzi este simplu, aceste eforturi se pot exprima ușor în funcție de momente și de forțe tăietoare.

In deschidere, unde momentele și forțele tăietoare variază în funcție de reacțiune, problema construirii liniilor de influență se reduce la problema cunoașterii liniilor de influență ale reacțiunii care, în cazul grinzilor cu zăbrele cu console, se construește la fel ca și pentru grinzile simple cu console (fig. 209).

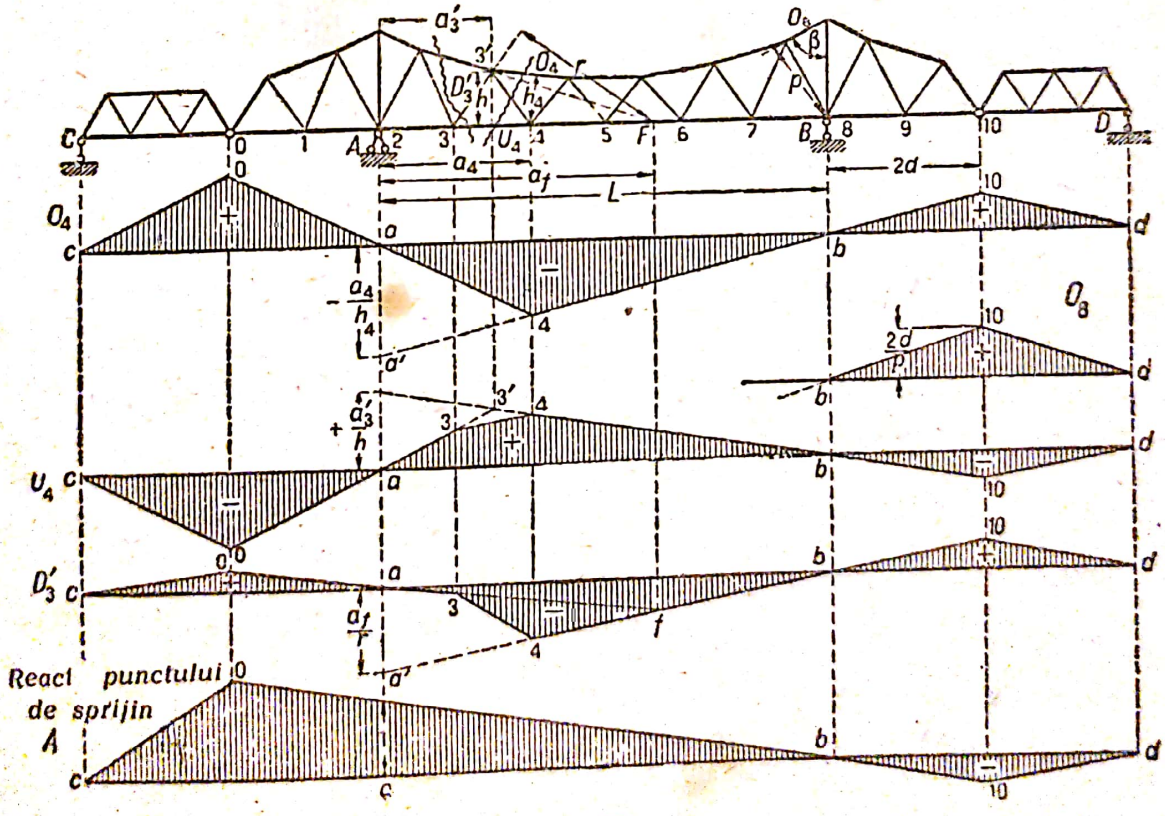


Fig. 209

Pentru construirea liniei de influență a efortului într'o bară oarecare, trebue să alcătuim expresia analitică a efortului, fixând după

această poziția liniilor din dreapta și din stânga, proiectând pe ele nodurile din margine și prelungind liniile până la extremitatea consolelor. In cazul când avem grinzi independente, linia de influență la capetele consolelor se racordează cu dreptele care trec între articulațiile grinzii independente.

In fig. 209, sunt arătate exemple de construcție a liniilor de influență pentru unele bare din deschidere.

Linia de influență a efortului în bara tălpii superioare O_4 se determină prin ecuația:

$$O_4 = -\frac{M_4}{h_4}$$

Pentru construirea acestei linii vom folosi proprietățile de bază ale liniei de influență a momentelor, punând pe verticala reazimului A ordonata $-\frac{a_4}{h_4}$, prin care se determină poziția liniei din dreapta. La trecerea sarcinii unitare pe consola din dreapta, linia din dreapta, ca și linia de influență a reacțiunii, se va prelungi până la verticala ce trece prin extremitatea consolei. Linia din stânga a-4 a aceleiași linii de influență va trece prin punctul de intersecție al liniei din dreapta cu verticala coborîtă din punctul momentelor, având ordonata egală cu zero în dreptul reazimului din stânga. Ordonata fiind proporțională cu reacțiunea B, linia se va prelungi până în extremitatea consolei din stânga. In sfârșit, în limitele grinzii independente, linia de influență va varia după dreptele O-c și 10-d care trec prin vârful ordonatelor liniei de influență la capetele consolelor și prin zero pe verticala coborîtă din reazimul opus al grinzii independente.

In mod analog se construesc și liniile de influență pentru talpa inferioară (în fig. 209 — U_4).

Linia de influență a diagonalei D'_3 se determină din ecuația:

$$D'_3 = -\frac{M_f}{r}$$

Pentru construcția acestei linii de influență, așezăm pe verticală în dreptul reazimului A ordonata $-a_f/r$, prin vârful căreia și prin zero în dreptul reazimului din dreapta va trece linia din dreapta, ale cărei ordonate sunt proporționale cu ordonatele liniei de influență a reacțiunii.

Această dreaptă se prelungește până la extremitatea consolei din dreapta. Linia din stânga af, ca întotdeauna, se determină cu zero în dreptul reazimului din stânga și cu punctul de intersecție f al liniei din dreapta cu verticala coborîtă din punctul momentelor. Această linie se prelungește până în extremitatea consolei din stânga. Proiectând pe linia din dreapta nodul 4, iar pe cea din stânga nodul 3, vom obține conturul liniei de influență a diagonalei, delimitat de dreptele ce trec prin punctele C, O, 3, 4, 10 și d.

Scanned with OKEN Scanner

§ 47. Eforturile în elementele din consolă şi liniile lor de influenţă

Eforturile în elementele din consolă ale grinzilor cu zăbrele depind numai de încărcarea ce se găseşte în partea secţionată a consolei, ceea ce rezultă de-a-dreptul din condiţia de echilibru a porţiunii tăiate. Dacă pe această porţiune nu se găseşte nicio încărcare, rezultă că eforturile în barele secţionate vor fi egale cu zero. In conformitate cu aceasta, construirea liniilor de influenţă pentru eforturile din barele consolei se reduce la aflarea poziţiei dreptei care determină forma liniei de influenţă din partea extremităţii consolei, deoarece dreapta care determină forma liniei de influenţă pe deschidere se confundă cu axa absciselor.

Ecuaţia dreptei care formează linia de influenţă spre extremitatea consolei se compune din expresia analitică a efortului, când sarcina unitară se găseşte chiar în porţiunea tăiată a consolei. Poziţia acestei drepte se determină printr'o ordonată în dreptul extremităţii consolei şi cu zero pe axa absciselor în dreptul punctului momentului, deoarece axa absciselor este cea de a doua linie dreaptă ce formează această linie de influenţă. Proiectând pe aceste drepte nodurile încărcate cele mai apropiate de secţiune, obţinem conturul liniei de influenţă. În limitele lungimii grinzii independente susţinută de consolă, linia de influenţă variază după o dreaptă, ca fiind cuprinsă între două articulaţii.

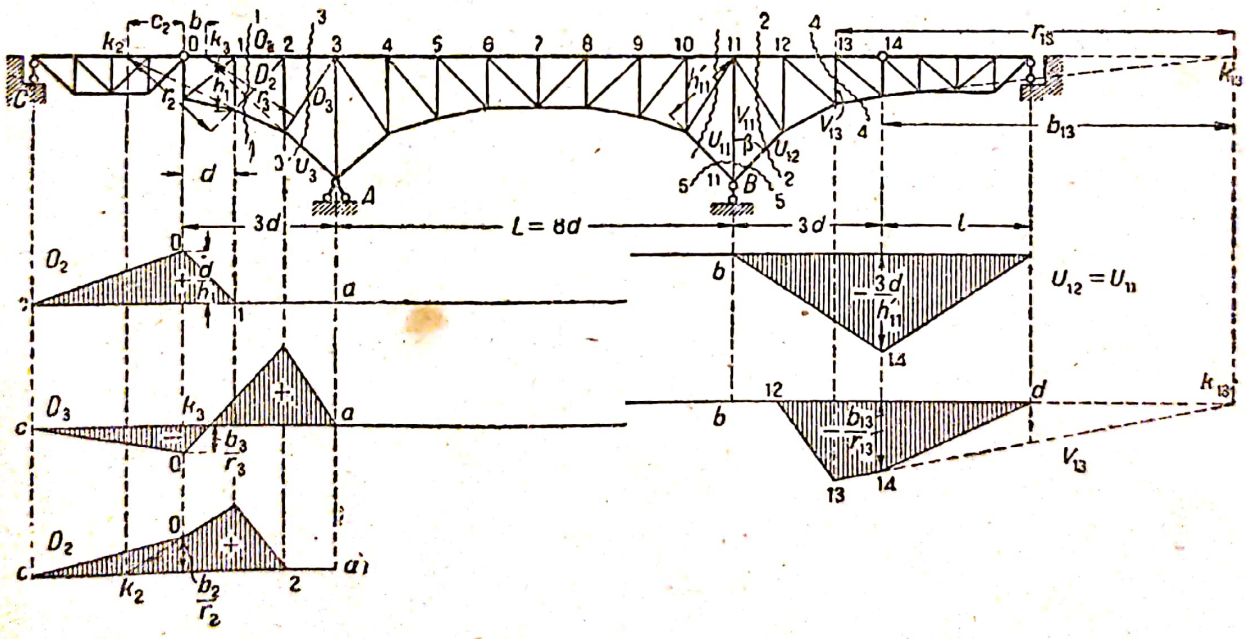


Fig. 210

In fig. 210 sunt reprezentate liniile de influenţă pentru barele O_2 şi U_{12} din tălpile consolei.

Aplicând sarcina unitară la capătul consolei, valoarea efortului este

$$O_2 = + \frac{1d}{h_1}$$

Acesta determină ordonata în dreptul extremității consolei și poziția liniei din stânga; linia din dreapta contopindu-se cu axa absciselor se intersectează cu cea din stânga în dreptul nodului 1.

O formă asemănătoare va avea și linia de influență a efortului U_{12}, pentru care ordonata liniei de influență la extremitatea consolei este egală cu $-\frac{3d}{h'_{11}}$.

In aceeași fig. 210, sunt reprezentate liniile de influență pentru barele zăbrelelor D_3, D_2 și V_{13} din consolă.

Pentru toate aceste bare ecuația momentului, față de punctul de intersecție al tălpilor k, are forma generală:

$$Dr \pm 1\ x = 0$$

Aplicând sarcina la extremitatea consolei, această ecuație va avea forma:

$$D = \pm 1 \cdot \frac{b}{r}$$

și determină ordonata liniei de influență la extremitatea consolei.

In raport cu poziția punctului momentului k se va modifica și conturul liniei de influență a zăbrelelor, care este întotdeauna dreptunghiular.

Pentru poziția punctului zero în limitele consolei (fig. 210, D_3) linia de influență va avea două semne.

La ieșirea punctului momentelor în afara limitelor consolei, (fig. 210, D_2 și V_{13}), linia de influență va avea un singur semn și pe măsură ce punctul momentelor k se îndepărtează spre infinit, dreapta care reprezintă linia de influență în limitele porțiunii de consolă tăiată se apropie tot mai mult de orizontală.

Probleme și exerciții

53. Să se demonstreze dacă s'a făcut corect construcția liniilor de influență pentru montanții V_3, V_{11} și diagonala D_{11} care fac parte din grinda cu zăbrele re-

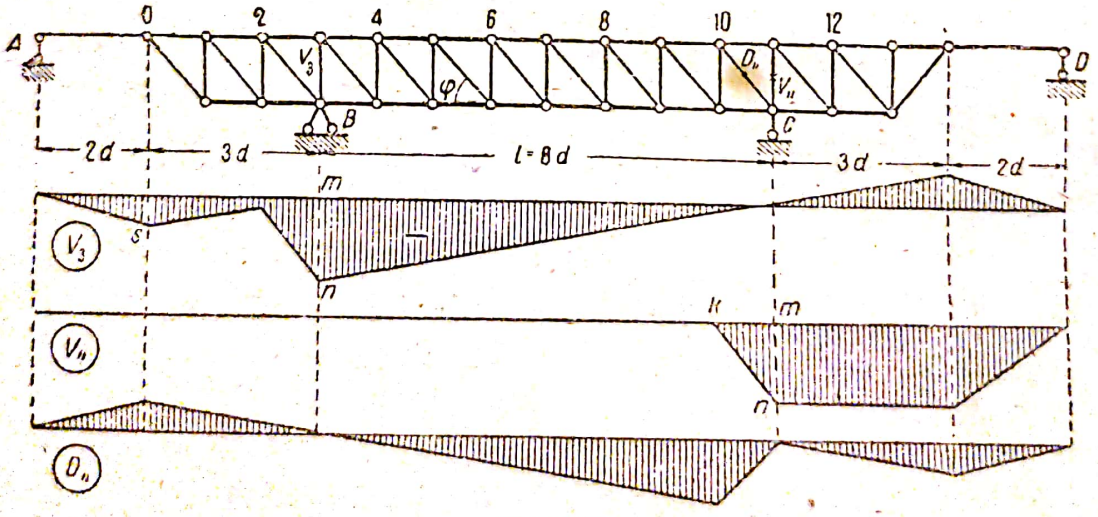


Fig. 211

prezentată în fig. 211, grinda fiind solicitată la nodurile superioare. Să se demonstreze cum vor varia liniile de influență ale montanților când grinda va fi transformată astfel ca să fie solicitată la nodurile inferioare.

54. Să se construiască linia de influență a efortului în barele U_4, V_3, D_6 și D_{15} ale grinzii cu zăbrele în consolă, înfățișată în fig. 212, grinda fiind solicitată la nodurile inferioare.

Scanned with OKEN Scanner

Indicații. Înainte de a începe determinarea eforturilor în bare, trebue să stabilim după schema grinzii dacă barele U_4 și U_{13} vor lucra când porțiunea de pe deschidere este încărcată. Se recomandă ca efortul în montantul V_3 să fie determinat din condițiile de separare a nodului inferior.

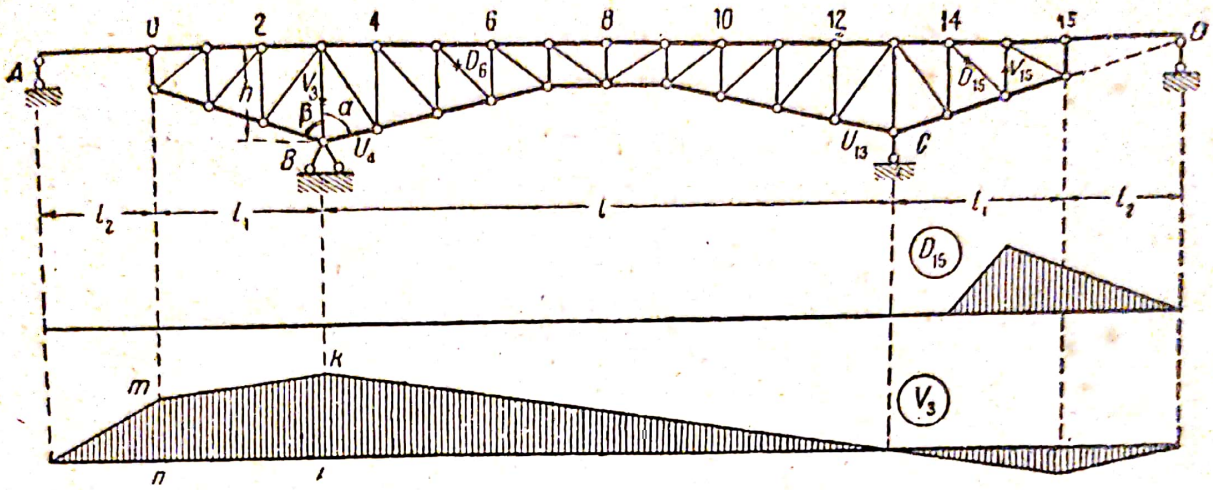


Fig. 212

55. Să se demonstreze dacă liniile de influență pentru eforturile în montanții V_2 și V_3 ai grinzii cu zăbrele și cu calea jos, reprezentată în fig. 213, sunt corect construite.

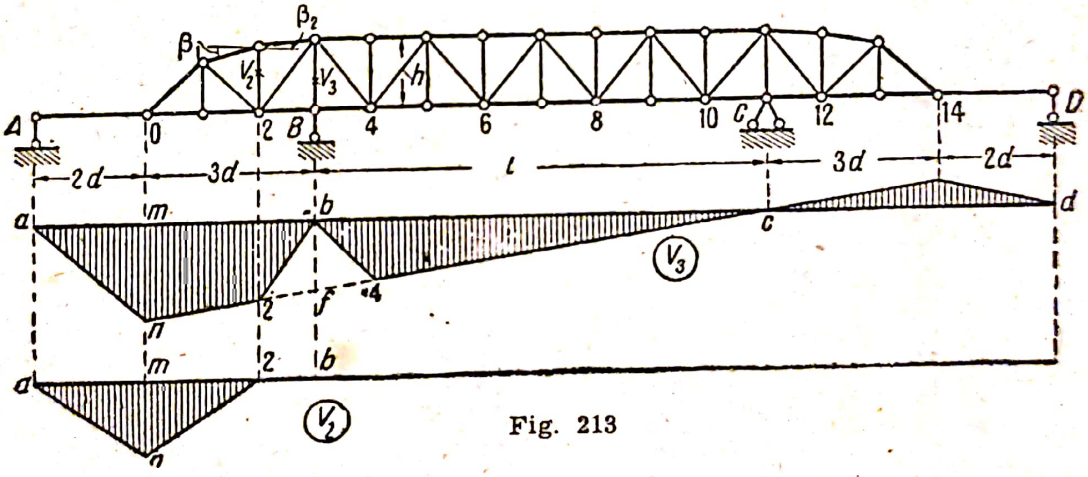


Fig. 213

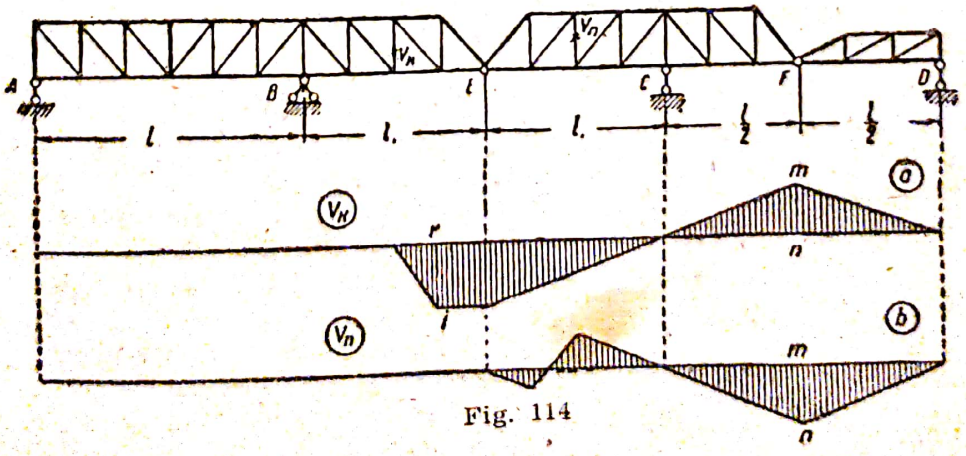


Fig. 114

56. Să se arate dacă linia de influență, pentru eforturile în montanții V_k și V_n ai grinzii în console cu zăbrele din fig. 214 este, corect construită, grinda fiind încărcată la nodurile inferioare.

Indicație. La rezolvare trebue să stabilim în primul rând cum lucrează porțiunile *E F* și *F D* atunci când sunt încărcate.

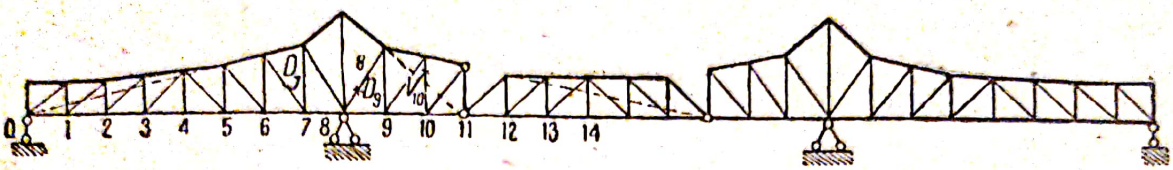


Fig. 215

57. Să se construiască liniile de influență ale barelor D_7, V_8, D_9 și V_{10} ale grinzii cu zăbrele cu calea jos, reprezentată în fig. 215; condițiile de intersecție ale tălpilor sunt arătate în figură cu linii punctate.

CAPITOLUL 9

GRINZI CU ZĂBRELE PE MAI MULTE REAZIME STATIC DETERMINATE

§ 48. Alcătuirea grinzilor cu zăbrele static determinate pe mai multe reazime

Orice grindă cu zăbrele trebue să fie fixată invariabil de pământ sau de un alt sistem indeformabil. Din condițiile de determinare statică și de indeformabilitate, rezultă că această fixare trebue să fie realizată cu ajutorul a trei legături.

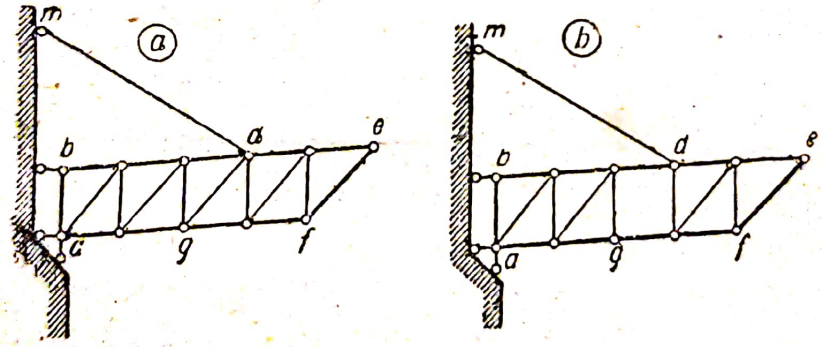


Fig. 216

Dacă această fixare se realizează cu un număr mai mare de legături, se creează o nedeterminare statică, care poate fi înlăturată dacă în locul legăturilor suplimentare de reazim vom suprima unele bare din interiorul grinzii.

De exemplu, grinda cu zăbrele *adef* reprezentată în fig. 216, fixată de pământ cu patru legături de reazim, este static nedeterminată față de dispozitivele ei de rezemare. Dacă însă în această grindă se suprimă bara *g-d*, întregul sistem devine static determinat și indeformabil, cu toate că grinda, după alcătuirea ei interioară, a devenit deformabilă.

Scanned with OKEN Scanner

În acest caz, în compunerea întregului sistem inclusiv pământul, legătura de reazim m-d este o bară înlocuitoare față de bara g-d pe care am suprimat-o.

Principiul de introducere a unor legături de reazim suplimentare în locul barelor interioare eliminate sau operația inversă de eliminare a barelor interioare când avem legături de reazim suplimentare, permite crearea unor grinzi speciale cu zăbrele static determinate și cu mai multe reazime.

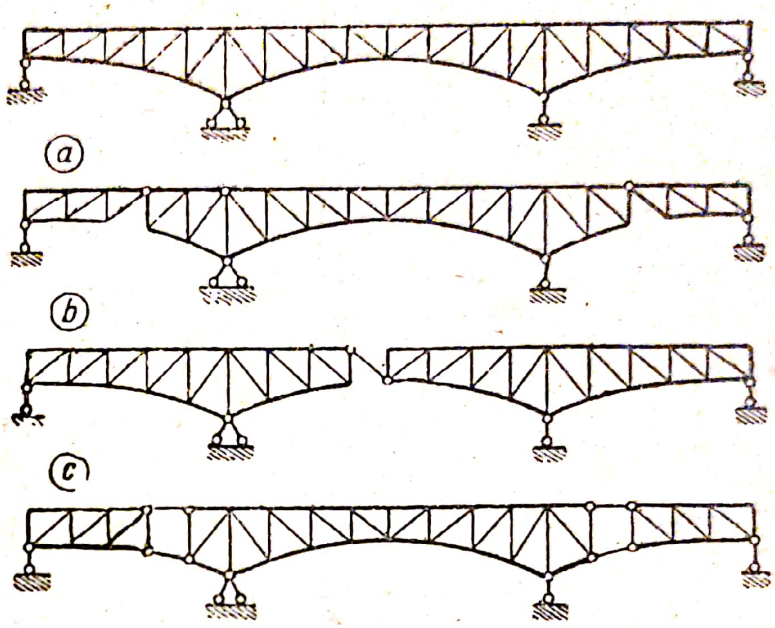


Fig. 217

Grinzile cu zăbrele în console de sistem simplu, analizate în paragrafele precedente, pot fi considerate ca formate din grinzi cu zăbrele continue, din care au fost eliminate anumite bare interioare.

Numărul articulațiilor intermediare obținute astfel trebue să fie suficient pentru a transforma grinda cu zăbrele într'o grindă static determinată și indeformabilă (vezi § 20).

Avem, de exemplu, o grindă pe patru reazime (fig. 217). O astfel de grindă are două legături de reazime suplimentare față de trei legături câte sunt necesare. Aducerea acestei grinzi la un sistem static determinat se poate face prin suprimarea a două elemente oarecare ale tălpilor, ceea ce echivalează cu introducerea în sistem a două articulații efective (fig. 217-a). Dacă ambele elemente din talpă vor fi îndepărtate din același panou (fig. 217-b), aceasta va echivala cu întroducerea în sistem a unei singure articulații mobile.

Reducerea grinzii la un sistem static determinat poate fi efectuată și prin suprimarea barelor zăbrelor (fig. 217-c), ceea ce echivalează cu introducerea în grindă a unei articulații fictive, a cărei poziție va fi determinată prin intersecția barelor din tălpi.

In fig. 218 este înățișată o grindă pe trei reazime, care este static determinată prin suprimarea barei dintre nodurile 3 și 5, față de care una din legăturile de reazim se consideră ca bară inlocuitoare.

In cazurile când un sistem cu mai multe reazime este format prin introducerea articulațiilor efective, condițiile de indeformabilitate se stabilesc ușor examinând îmbinările geometrice ale elementelor rigide între ele și cu pământul. In caz de transformări mai complicate ale sistemului, se recomandă să se cerceteze condițiile de informabilitate cu ajutorul metodelor cinematice (vezi § 43).

Scanned with OKEN Scanner

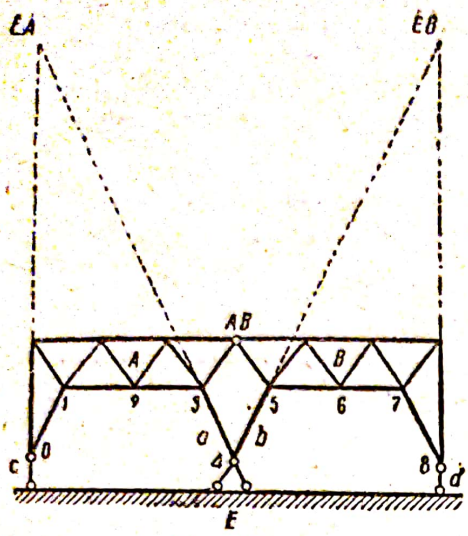


Fig. 218

De exemplu, condiţiile de indeformabilitate ale sistemului reprezentat în fig. 218, compus din două elemente indeformabile *A* şi *B* unite între ele prin articulaţia *A B* şi legată de pământ prin barele *c*, *a*, *b* şi *d*, se stabilesc destul de simplu după centrele instantanee de rotaţie ale deplasărilor virtuale relative ale elementelor indeformabile şi pământ. Centrele instantanee ale deplasării virtuale ale acestor elemente în raport cu pământul se găsesc în punctele *E A* şi *E B*, care nu se află pe aceeaşi dreaptă cu centrul *A B*. Rezultă astfel că sistemul este indeformabil.

Dimpotrivă, sistemul similar din fig. 219 este deformabil, deoarece cele trei centre instantanee de rotaţie ale deplasării relative ale elementelor *E* (pământ) *D* şi *B* se găsesc pe aceeaşi dreaptă. Ar fi însă suficient să se schimbe direcţia legăturii de reazim *C*, pentru ca centrul *B E* să se deplaseze şi sistemul să devină indeformabil.

Când determinăm condiţiile de indeformabilitate ale sistemului faţă de legăturile de reazim cu ajutorul diagramei viteselor, trebue să suprimăm una din legăturile de reazim şi să construim această diagramă. După ce am aflat poziţia în care trebue să se deplaseze nodul de reazim care a devenit liber, verificăm posibilitatea acestei deplasări, presupunând că bara eliminată face parte din sistem. Dacă această deplasare este posibilă, înseamnă că sistemul este deformabil şi vice-versa.

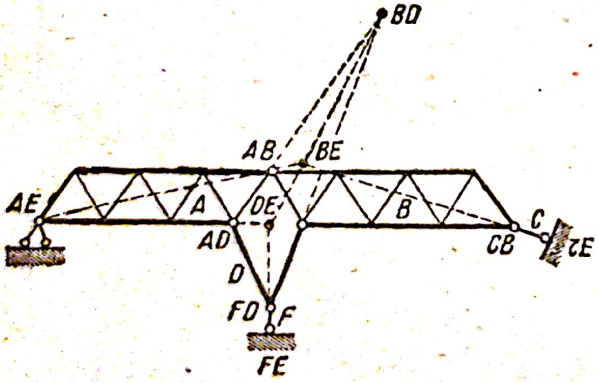


Fig. 219

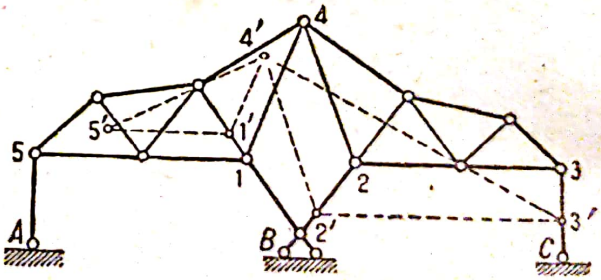


Fig. 220

De exemplu, se cere să determinăm indeformabilitatea sistemului reprezentat în fig. 220. Eliminând legătura de reazim din punctul *A*, construirea diagramei viteselor devine posibilă; pornind dela punctul fix *B* şi alegând vitesa 2-2' a punctului 2, găsim poziţia punctului 3', care se determină prin intersecţia dreptei 2'-3' ‖ 2-3 cu direcţia legăturii de reazim *C*, care admite numai deplasarea pe orizontală. Poziţia punctului 4' se determină prin intersecţia dreptelor 3'-4' ‖ 3-4 cu 2'-4' ‖ 2-4; apoi poziţia punctului 1' se stabileşte prin întretăierea

Scanned with OKEN Scanner

dreptei 1'-4' || 1-4 cu direcția barei de reazim 1-B, care permite numai rotirea în jurul articulației fixe și în sfârșit poziția punctului 5' se determină prin intersecția dreptelor 4'-5' || 4-5 cu 1'-5' || 1-5. Deoarece legătura de reazim *A* permite numai mișcări orizontale, direcția înclinată față de verticala obținută pentru vitesa 5-5' nu poate corespunde cu condițiile dispozitivului de rezemare, deci sistemul este indeformabil.

Probleme și exerciții

58. Să se stabilească dacă sistemele reprezentate schematic în fig. 221 și 222 sunt static determinate și indeformabile.

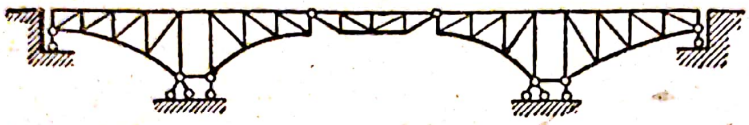


Fig. 221

59. Să se demonstreze pentru care direcție a legăturii de reazim *C* sistemul din fig. 223 va deveni deformabil.

Indicație. Această problemă trebue să fie rezolvată prin determinarea pozițiilor centrelor instantanee și prin construirea diagramei viteselor.

60. Să se stabilească deformarea sistemului reprezentat în fig. 224.

Indicație. Sistemul este simetric ; articulația III se găsește pe axa de simetrie și în ipoteza că părțile din dreapta și din stânga au deplasări egale, această articulație trebue să se deplaseze pe verticală.

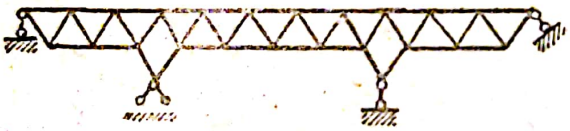


Fig. 222

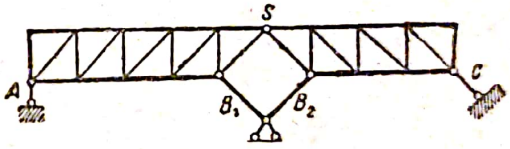


Fig. 223

Deplasarea virtuală a articulației III în fiecare jumătate a sistemului poate fi determinată prin construirea diagramei viteselor. Este bine să se aleagă vitesa inițială de deplasare pentru nodul II din jumătatea din stânga și nodul V din jumătatea din dreapta sistemului.

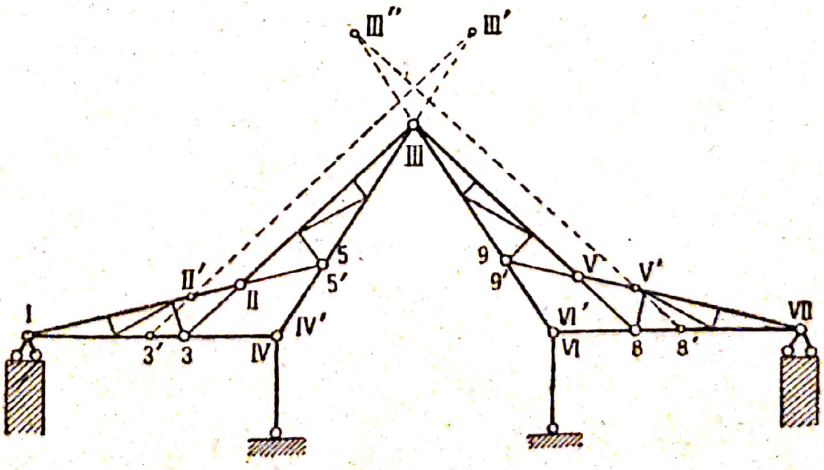


Fig. 224

Construirea diagramei în jumătatea din stânga ne conduce la găsirea punctului rabătut III', iar în jumătatea din dreapta la punctul rabătut III''.

Scanned with OKEN Scanner

§ 49. Determinarea reacţiunilor cu ajutorul condiţiilor de echilibru static

La unele sisteme de grinzi cu zăbrele pe mai multe reazime (fig. 218, 220 etc.) nu se întâmpină dificultăţi la determinarea reacţiunilor după condiţiile de echilibru static. Procedeul de determinare depinde de modul cum sistemul este alcătuit.

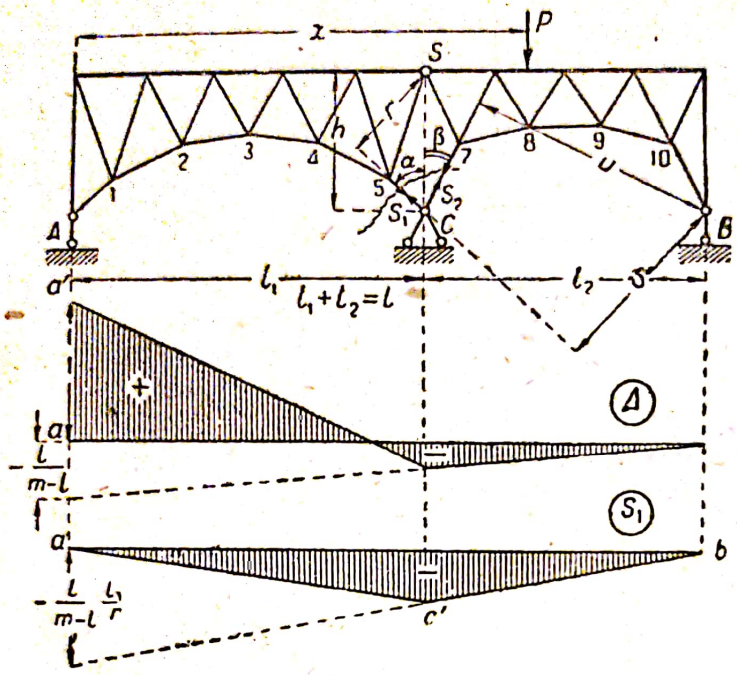


Fig. 225

De exemplu, reacţiunile grinzii cu zăbrele, reprezentată în fig. 225, pot fi determinate considerând-o ca o grindă pe două reazime şi suprimând reazimul intermediar C, ţinând însă seama de influenţa eforturilor din barele S_1 şi S_2 asupra grinzii.

Considerând astfel sistemul, se formează articulaţii reale şi fictive care vor permite alcătuirea ecuaţiilor, care nu sunt însă suficiente pentru determinarea reacţiunilor şi a eforturilor din barele S_1 şi S_2 ale reazimului care a fost suprimat.

Când sarcina unitară se găseşte la dreapta articulaţiei S, ecuaţiile care servesc pentru determinarea reacţiunii A se vor scrie astfel:

$$Al - S_1 v - S_2 u = P\,(l-x);$$

$$Al_1 - S_1 r = 0;$$

$$S_1 \sin\alpha - S_2 \sin\beta = 0$$

şi rezolvându-le în raport cu A obţinem:

$$S_1 = A\,\frac{l_1}{r},$$

$$S_2 = S_1\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = A\,\frac{l_1}{r}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \qquad (85)$$

de aceea

$$A\left(l - \frac{l_1}{r}\,v - \frac{l_1}{r}\,u\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right) = P\,(l-x).$$

Pentru cazul particular de mai sus:

$$r = h\sin\alpha\,;\ v = l_2\cos\alpha \text{ şi } u = l_2\cos\beta$$

deci reacțiunea din reazim poate fi exprimată astfel :

$$A = \frac{P\,(l - x)}{l - l_1 \frac{l_2}{h}\,(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)} = -\frac{P\,(l - x)}{m - l} \qquad (86)$$

în care

$$m = \frac{l_1 \cdot l_2}{h}\,(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$$

Aplicând sarcina unitară la stânga articulației, ecuațiile vor fi :

$$Al - S_1 v - S_2 u = P\,(l - x)$$

$$Al_1 - S_1 r = P\,(l_1 - x)$$

$$S_1 \sin\alpha - S_2 \sin\beta = 0$$

Rezolvându-le în raport cu A, vom obține :

$$S_1 = A \cdot \frac{l_1}{r} - P\,\frac{l_1 - x}{r}$$

$$S_2 = \left(A\,\frac{l_1}{r} - P\,\frac{l_1 - x}{r}\right)\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad (87)$$

astfel încât

$$A\left(l - \frac{l_1}{r}\,v - \frac{l_1}{r}\,u\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right) =$$

$$= P\left[(l - x) - \frac{l_1 - x}{r}\,v - \frac{l_1 - x}{r}\,u\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right]$$

Având în vedere că :

$$r = h \sin\alpha\,;\; u = l_2 \cos\beta \text{ și } v = l_2 \cos\alpha$$

obținem

$$A = \frac{P\left[(l - x) - (l_1 - x)\,\frac{l_2}{h}\,(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)\right]}{l - \frac{l_1 l_2}{h}\,(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)} =$$

$$= P\,\frac{(l - x) - (l_1 - x)\,\frac{m}{l_1}}{l - m} \qquad (88)$$

Aceste ecuații permit construirea liniei de influență care se va trasa prin dreptele cu următoarele ordonate în dreptul punctelor caracteristice și anume :

în dreptul nodului A când $x = 0$ $A = 1$

„ „ articulației S „ $x = l_1$ $A = -1\,\frac{l - l_1}{m - l} = -\frac{l_2}{m - l}$;

„ „ nodului B „ $x = l$ $A = 0$

Această linie de influenţă are forma arătată în fig. 225 şi se compune din o porţiune pozitivă şi una negativă, ceea ce impune la asemenea grinzi o construcţie specială a aparatelor de reazim pentru a preveni ridicarea lor.

Cunoscând linia de influenţă a reacţiunii A este uşor să construim şi linia de influenţă a efortului S_1, care atunci când sarcina unitară este aplicată în dreapta articulaţiei, se determină prin ecuaţia (85)

$$S_1 = A \frac{l_1}{r}$$

care reprezintă linia de influenţă a reacţiunii A, transformată în raportul l_1 / r (fig. 225).

Când sarcina unitară este în stânga articulaţiei, efortul S_1 se determină prin ecuaţia (87)

$$S_1 = \left[A - P \frac{l_1 - x}{l_1} \right] \frac{l_1}{r},$$

care este linia de influenţă a reacţiunii A pentru porţiunea din stânga sistemului, din care s'au scăzut ordonatele dreptei ce satisface ecuaţia $\frac{P(l_1 - x)}{l_1}$, adică ecuaţia reacţiunii grinzii cu deschiderea l_1.

Astfel linia de influenţă a efortului S_1 va avea forma triunghiului $a\ c_1\ b$ cu ordonata în dreptul reazimului din stânga egală cu

$$- \frac{l \cdot l_1}{(m - l)_1}$$

Linia de influenţă a efortului S_2 va fi la fel cu linia de influenţă S_1, ordonatele celei din urmă urmând să fie transformate în raportul $\sin \alpha / \sin \beta$.

Cunoscând liniile de influenţă S_1 şi S_2 se poate construi linia de influenţă a reacţiunii C care se determină prin ecuaţia :

$$C = - (S_1 \cos \alpha + S_2 \cos \beta)$$

adică această linie se compune din liniile de influenţă pentru S_1 şi S_2 transformate în anumite raporturi. Ea va avea deci forma unui triunghiu cu vârful în dreptul reazimului C.

Exemplul de mai sus ne arată că determinarea analitică a reacţiunilor la grinzile cu zăbrele pe mai multe reazime, cu ajutorul condiţiilor de echilibru static, implică câte odată calcule destul de complicate ; simplificarea lor se obţine prin folosirea metodelor cinematicii.

§ 50 Determinarea reacţiunilor cu ajutorul condiţiilor cinematice

In fig. 226 este reprezentată construirea, cu ajutorul centrelor instantanee de rotaţie, a liniei de influenţă a reacţiunii reazimului exterior A al unei grinzi cu zăbrele având două deschideri.

Pentru construirea liniei de influenţă a reacţiunii din acest rea-

Scanned with OKEN Scanner

zim, suprimăm reazimul în cauză şi considerăm tot sistemul ca un mecanism compus din două elemente rigide I, II şi din două bare III şi IV.

Centrul instantaneu de rotaţie al elementului II se determină prin punctul de intersecţie E II al celor două direcţii ale legăturilor articulate ale acestui element rigid. Centrul instantaneu al elementului rigid I se determină prin punctul de intersecţie E I al dreptei E II — II-I cu direcţia barei III, considerată ca fiind articulată şi mobilă.

Cu aceste două centre instantanee E I şi E II se determină proiecţia punctelor zero pe axa absciselor, prin care trebue să treacă dreptele a'-1-2 şi 1-2-$e2$, care reprezintă epura deplasărilor virtuale. Aceste drepte se vor intersecta, după cum se ştie, în punctele 1-2 pe verticala coborîtă din punctul de articulaţie I, II. Pentru determinarea scării liniei de influenţă folosim ecuaţia lucrului mecanic virtual presupunând că sarcina unitară se găseşte în elementul I. Dacă această sarcină se găseşte la distanţa x de centrul I E, atunci în ipoteza că elementul I se roteşte cu unghiul $\triangle\vartheta$, expresiunea lucrului mecanic virtual va fi :

$$Aa\ \triangle\vartheta - Px\ \triangle\vartheta = 0$$

de unde

$$A = P\ \frac{x}{a}$$

Ordonata aa', care se găseşte la distanţa $x = a$ dela centrul E I, serveşte drept unitate a scării.

Cum era şi de aşteptat, am obţinut o linie de influenţă identică cu cea construită pe cale analitică (fig. 225).

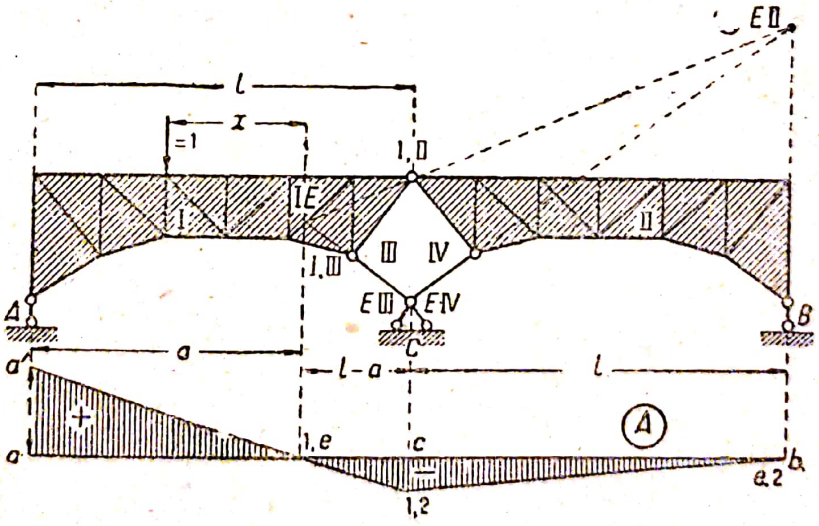


Fig. 226

Atragem atenţia asupra următoarei particularităţi. După expresia analitică a reacţiunii de pe reazim (88), poziţia punctului zero se determină din condiţia că numărătorul acestei expresii să fie egal cu 0.

$$(l - x) - (l_1 - x)\ \frac{l_2}{h}\ (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) = 0\ ;$$

de unde rezultă că poziţia punctului zero nu depinde de poziţia reazimului fix, ci

depinde de mărimea deschiderilor și de conturul patrulaterului articulat de pe reazimul intermediar.

De aceea, în realitate poziția centrului instantaneu este în funcție de reazimul fix ; iar invariabilitatea punctului zero, ca proiecție a centrului instantaneu, arată că *centrul instantaneu de rotație se deplasează pe verticală.*

Această particularitate este rezultatul condiției deplasării virtuale a unui patrulater și anume : *dacă trei elemente ale unui patrulater sunt legate printr'o condiție determinată de deplasare în raport cu pământul, care obligă centrele instantanee ale acestor elemente să se deplaseze pe anumite drepte perpendiculare pe planurile de mișcare, atunci și centrul instantaneu al celui de al patrulea element se va deplasa tot pe o dreaptă care intersectează dreptele de mai sus într'un singur punct.*

Presupunem că avem un sistem compus din două elemente rigide ; triunghiurile E1-E2-E3 și E1'-E2'-E3' (fig. 227) unite între ele cu trei bare I, II și III care se intersectează în punctul 0. Acest sistem, prin condițiile lui de alcătuire, este deformabil, de aceea centrele instantanee I-II, II-III, I-III ale barelor I, II și III trebue să se găsească pe o singură dreaptă ; fără îndeplinirea acestei condiții nu este posibilă deformarea sistemului.

De aci rezultă că, dacă două vârfuri E_3 și E_2 ale unui triunghiu oarecare se deplasează pe două drepte, care se intersectează în punctul 0 și dacă la această mișcare laturile corespunzătoare ale triunghiurilor se intersectează în punctele fixe II-III, I-II și I-III, ce se găsesc pe o singură dreaptă, atunci cel de al treilea vârf al acestui triunghiu trebue să se deplaseze pe o dreaptă, care trece prin punctul 0, punctul de intersecție al dreptelor pe care se deplasează primele două vârfuri ale triunghiului.

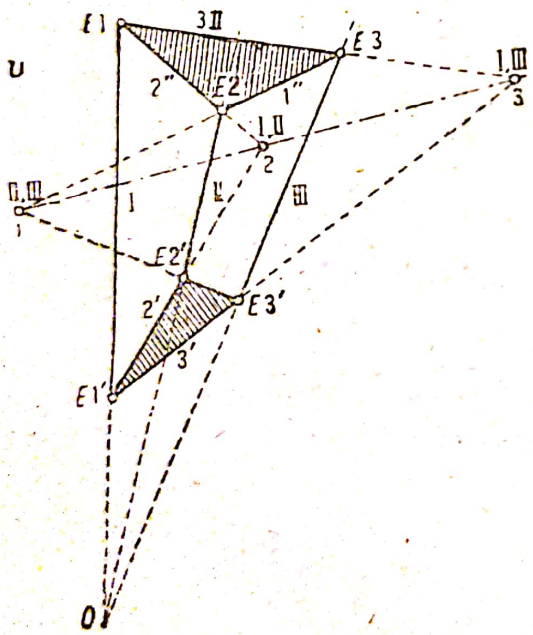


Fig. 227

Să trecem la cazul, când avem patru bare sau elemente rigide I, II, III și IV (fig. 228) unite între ele prin articulații, trei din ele fiind legate de condiții de mobilitate în raport cu planele *B* și *C*. In acest sistem centrele instantanee *E*2 și *E* III ale barelor corespunzătoare pot să se deplaseze numai pe drepte normale pe planele *B* și *C*. Din condițiile de alcătuire ale dreptunghiului articulat, centrele EI și E2 ; E2 și EIII ; EI și EIII sunt conjugate (perspective) și în ipoteza mișcării centrelor *E*2 și *E*III după drepte, formează fascicole în punctele 1-', 3-1, 2-3, care sunt invariabile și se găsesc pe o singură dreaptă. Astfel în acest caz avem triunghiul *E*I-*E*2-*E*III care cu două vârfuri E2 și EIII se mișcă pe drepte, iar laturile lui corespunzătoare se intersectează la orice poziție a triunghiului în punctele 1-2, 3-1, 2-3 ce se găsesc pe o singură dreaptă. Prin urmare al treilea vârf EI al acestui triunghiu trebue să se deplaseze pe o dreaptă ce trece prin punctul de intersecție al dreptelor pe care se deplasează centrele instantanee *E*2 și *E*III, ceea ce era de demonstrat.

Trăgând concluzia din cele expuse mai sus, putem spune că dacă o grindă cu zăbrele are reazime orizontale mobile, atunci toate centrele instantanee se deplasează pe verticale, iar proiecțiile lor pe axa absciselor rămân constante.

Această proprietate simplifică mult construcția liniilor de influență ale grinzilor cu zăbrele pe mai multe reazime, întru cât înlătură necesitatea de a determina poziția exactă a centrului instantaneu, ceea ce la acest tip de grinzi implică uneori construcții complicate.

Scanned with OKEN Scanner

Ca întotdeauna, cunoașterea reacțiunilor și a liniilor lor de influență, permite determinarea eforturilor în elementele grinzii și liniilor de influență.*)

Probleme și exerciții

61. Să se construiască linia de influență a reacțiunii și a eforturilor O și D_3 din barele grinzii cu zăbrele, reprezentată în fig. 229.

Indicații. Porțiunea acestei grinzi între articulațiile A și B este o grindă cu zăbrele indeformabilă pe două reazime; reazimul C se deplasează numai pe direcția orizontală; porțiunea Cg_1 este în consolă în raport cu deschiderea AB.

Linia de influență a reacțiunii C se determină din condițiile de echilibru ale porțiunii în consolă secționată în panoul BC; când sarcina unitară se găsește în consolă, vom avea $C = 1$.

Prin aceasta se determină conturul liniei de influență a montantului de reazim (fig. 229 a).

Valorile reacțiunilor A și B, după cum se vede din reacțiunea 1 — 1, vor depinde de efortul O din talpa superioară a panoului BC, deci determinăm mai întâi linia de influență a acestei tălpi.

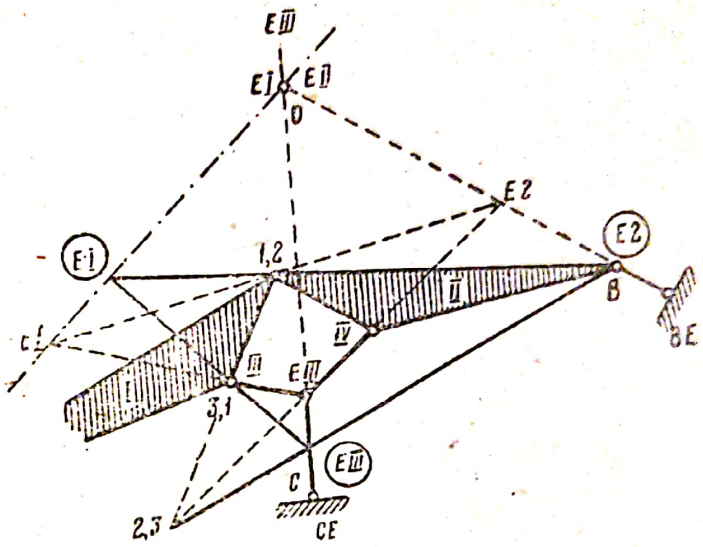


Fig. 228

Efortul în elementul O al tălpii superioare, egal cu efortul din elementul U al tălpii inferioare din același panou, se determină din ecuația momentului forțelor aplicate în consolă. Luând momentul în raport cu nodul 5, vom obține:

$$O = -U = +\frac{x}{h}$$

Linia de influență a acestui efort are forma unui triunghiu cu ordonata cea mai mare la extremitatea consolei și egală cu $\frac{3d}{h}$ (fig. 229 b).

Reacțiunea A se va determina acum din ecuația momentelor tuturor forțelor exterioare aplicate pe grinda AB, precum și a efortului O în raport cu punctul B:

$$A = \frac{1}{l}\,(M_B - Oh).$$

Atât timp cât sarcina se găsește în limitele deschiderii, efortul O este egal cu zero, deci reacțiunea va fi egală cu:

$$A = \frac{M_B}{l} = \frac{l-x}{l},$$

adică este egală cu reacțiunea unei grinzi cu zăbrele cu două reazime (fig. 229 c). Când sarcina unitară este aplicată pe consolă, grinda cu zăbrele nu va mai fi încărcată cu forțe exterioare și asupra ei va acționa numai efortul O, astfel încât reacțiunea va fi determinată prin ecuația:

$$A = -O\,\frac{h}{l} = -\frac{x}{l},$$

---

*) **Notă:** A se vedea *I. P. Procofiev* „Statica construcțiilor" partea I ediția 1936 § 54.

care reprezintă o linie dreaptă cg_1 paralelă cu dreapta $a'b$ a liniei de influență a reacțiunii unei grinzi simple, însă cu origina coordonatelor în dreptul reazimului C.

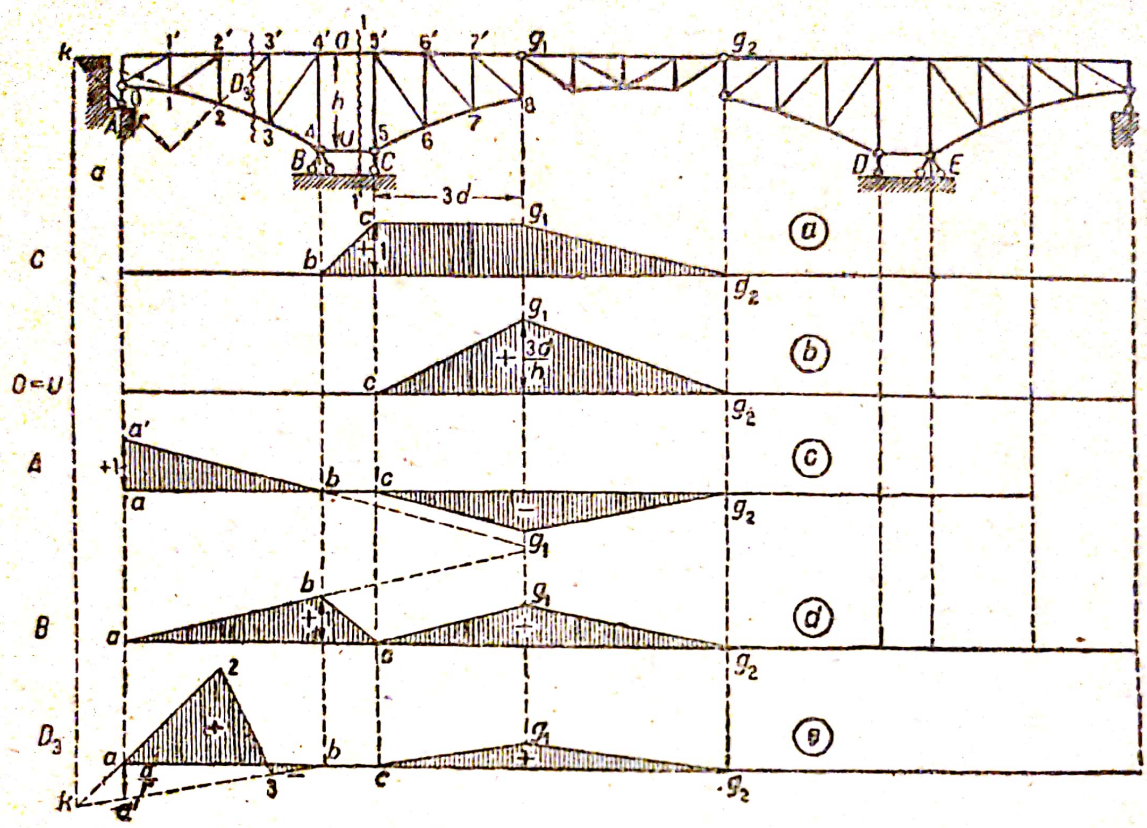


Fig. 229

Reacțiunea B se determină pe baza acelorași considerațiuni ca și reacțiunea A. Linia ei de influență este reprezentată în fig. 229 d.

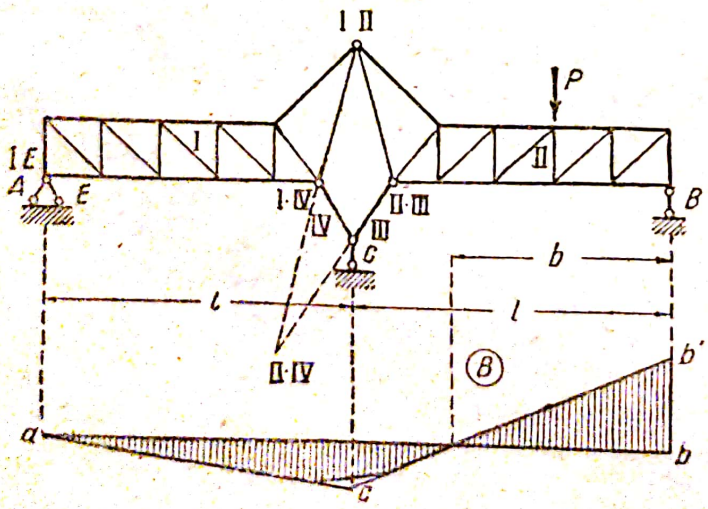


Fig. 230

Cunoscând liniile de influență ale reacțiunilor se poate determina ușor efortul în orice bară a grinzii, construind și linia de influență a acestuia.

De exemplu, în fig. 229 e, se arată linia de influență a diagonalei D_3.

62. Să se construiască liniile de influență ale reacțiunilor B și C ale grinzii cu zăbrele reprezentată în fig. 230. Sarcinile sunt aplicate la talpa inferioară.

Indicații. Trebue să determinăm mai întâi poziția centrului instantaneu al mișcării virtuale a părții din dreapta grinzii cu zăbrele, când din alcătuirea ei se suprimă legătura de reazim B. Pe urmă trebue să se folosească poziția centrului instantaneu pentru construirea liniei de influență. După ce s'a stabilit reacțiunea B, linia de influență a reacțiunii C se determină ușor din condițiile echilibrului static.

CAPITOLUL 10

GENERALITĂȚI

§ 51. Noţiuni generale asupra sistemelor cu împingeri şi alcătuirea lor

Dintre sistemele cu împingeri cele mai răspândite sunt *arcele.* Arcele se deosebesc de grinzi prin aceea că: *chiar atunci când sunt solicitate numai de sarcini verticale, există întotdeauna şi componente orizontale ale reacţiunilor care se numesc împingeri. Impingerile arcelor tind întotdeauna să deplaseze reazimele,* deci, reacţiunile care împiedecă această deplasare, sunt orientate spre interiorul arcului, considerând acest sens al reacţiunii ca pozitiv.

Existenţa împingerii la arce nu permite să executăm reazime mobile, de aceea reazimele la aceste construcţii se fac sau cu *încastrarea perfectă* (fig. 232-a) sau cu *articulaţii fixe* (fig. 232-b).

Impingerea poate să se producă şi la diferitele sisteme de grinzi, când planul de deplasare al reazimului se face înclinat (fig. 231), iar nu orizontal. In acest caz, sub acţiunea sarcinilor verticale, vor apare, în ambele reacţiuni, componente orizontale egale ca valoare, însă opuse ca sens. Aceasta va provoca schimbări corespunzătoare ale eforturilor în barele grinzii cu zăbrele.

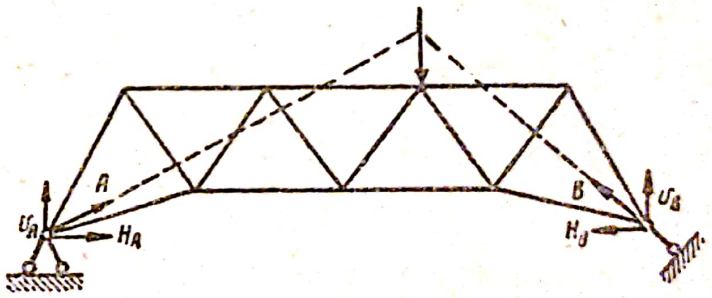


Fig. 321

Ambele sisteme de arce sunt static nedeterminate în raport cu reacţiunile lor. Aceste arce pot fi aduse la un sistem static determinat prin introducerea unor articulaţii intermediare, după numărul de legături de rezemare în plus peste numărul de trei care este necesar pentru fixarea indeformabilă a oricărui sistem. Intr'un arc cu două articulaţii trebue să mai introducem o articulaţie intermediară (fig. 232-c), iar într'un arc încastrat trebue să introducem trei articulaţii.

Scanned with OKEN Scanner

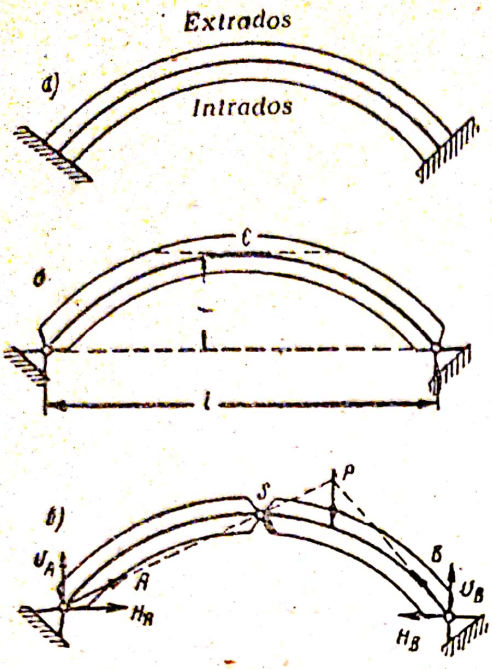


Fig. 232

Axa arcului este reprezentată prin o curbă oarecare, însă ea poate avea și forma unei linii poligonale (frânte) al cărei contur poate prezenta câteodată devieri accentuate (fig. 233).

In acest din urmă caz, denumirea de arc este înlocuită cu aceea de *cadru.*

La arce avem câteva denumiri caracteristice ale părților lor și anume (fig. 232) :

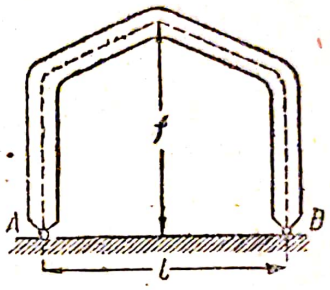


Fig. 233

1. suprafețele de rezemare *A* și *B* se numesc *naşterile arcului ;*

2. punctul *s* al axei arcului, cel mai îndepărtat de linia dreaptă care unește centrele planelor naşterilor se numește *cheia arcului* ;

3. distanța pe verticală *f* dela cheia arcului până la linia dreaptă care unește centrele planelor naşterilor se numește *săgeata arcului ;*

4. raportul dintre săgeată și deschiderea arcului $\frac{f}{l}$ se numește *pleoştirea arcului ;*

5. partea convexă a arcului se numește *extradosul arcului,* iar cea concavă *intradosul arcului.*

Arcele cu *secțiune plină (întreagă)* sunt arcele al căror corp, între intrados și extrados este umplut cu un material oarecare, iar *arce cu zăbrele* sunt acelea la care legătura între intrados și extrados se face prin bare ca și la grinzile cu zăbrele (fig. 234).

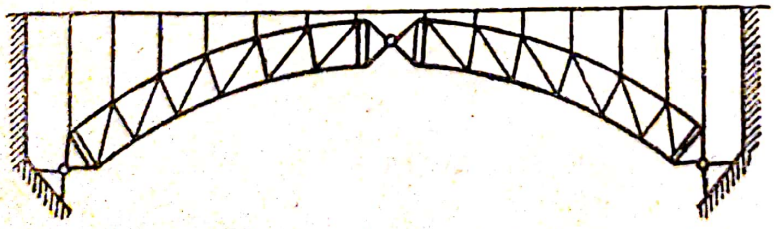


Fig. 234

Alte sisteme cu împingeri sunt *sistemele suspendate.* Sub acțiunea forțelor verticale se nasc în reazimele lor, ca și la arce, componentele orizontale (fig. 235) care dau împingeri, dar spre deosebire de sistemele cu arce, această împingere, ca reacțiune, este îndreptată spre exterior.

Fiind solicitate la tensiune, provocată de acțiunea verticală a forțelor exterioare, sistemele suspendate pot fi proiectate flexibile : din cabluri, lanțuri etc.

Scanned with OKEN Scanner

Sistemele suspendate de acest gen se consideră și se calculează ca fire flexibile. De asemenea, sistemele suspendate pot fi proiectate și ca sisteme rigide, alcătuite din elemente pline sau cu zăbrele unite între ele prin articulații (fig. 236). Asemenea sisteme suspendate sunt un fel de arce răsturnate, având toate proprietățile acestora.

După cum s'a arătat, indeformabilitatea sistemelor cu împingeri, se asigură prin imobilitatea punctelor de reazim. De aceea, aceste sisteme trebue să se sprijine pe reazime indeformabile, puțin elastice, capabile să preia reacțiunea verticală și împingerea.

Fig. 235

Transmiterea împingerii asupra construcției care susține sistemul în arce sau sistemul suspendat, poate fi totuși suprimată prin introducerea unei bare speciale care unește articulațiile reazimelor sistemului (fig. 237). Aceste bare se numesc *tiranți*, iar tot sistemul se va numi *arc cu tirant*. In sistemele suspendate asemenea bare se numesc *contrafișe* și se întrebuințează foarte rar, nefiind recomandabile.

Tirantul la arce preia toate eforturile de tensiune ale împingerii, în sistem rămânând astfel numai componentele verticale ale reacțiunii. De aceea, aceste sisteme, după caracterul lor, fac parte din categoria grinzilor.

In unele cazuri, tiranții se proiectează destul de rigizi sub formă de grinzi sau ferme, chiar mai rigide decât arcul propriu zis. Aceasta permite ca, o parte din sarcini, să fie preluate de tirant. O astfel de combinație între arce și grinzi cu zăbrele (fig. 238) care lucrează ca un singur tot, formează așa numitele *sisteme combinate (mixte)*.

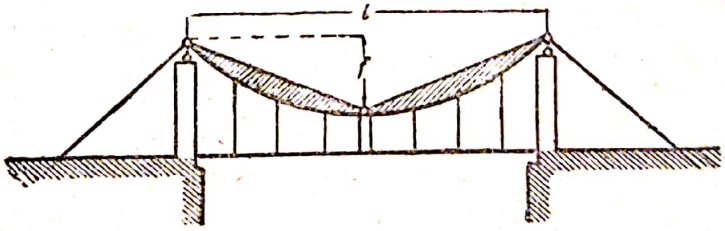


Fig. 236

Aceste sisteme se creează prin combinarea sistemelor de grinzi cu arce sau a sistemelor de grinzi cu construcțiile suspendate. In afară de sistemele cu împingeri pe două reazime, este posibil să se alcătuiască sisteme cu împingeri pe mai multe reazime. Sporirea numărului legăturilor de rezemare la sistemele cu împingeri implică, pentru a păstra determinarea statică a sistemului, ca să se elimine din schema lui unele bare interioare suplimentare, în raport cu legăturile de reazim ce se introduc în plus.

Scanned with OKEN Scanner

La alcătuirea sistemelor complicate cu împingeri pe mai multe reazime, precum și la formarea sistemelor combinate (mixte), rămân valabile toate regulile de alcătuire ale sistemelor cu grinzi (§ 48, 43) și toate metodele pentru studiul indeformabilității lor.

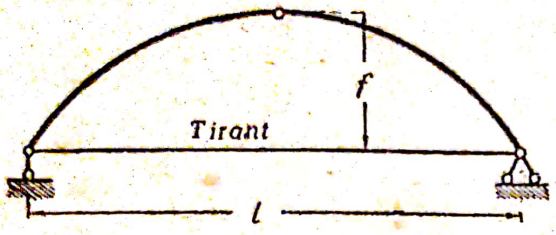


Fig. 237

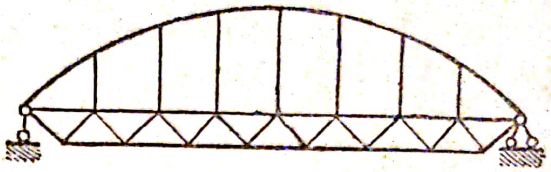


Fig. 238

Probleme și exerciții

63. Să se demonstreze pentru ce poziție a articulațiilor intermediare, sistemul cu arce, reprezentat în fig. 239, devine deformabil.

64. Arcul cu zăbrele cu două articulații înfățișat în fig. 240, se transformă într'un sistem static determinat prin suprimarea uneia din barele interioare. Să se demonstreze dacă este posibil ca, prin eliminarea uneia din bare, sistemul să devină deformabil.

Fig. 239

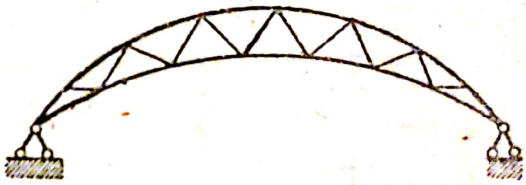


Fig. 240

65. Să se transforme sistemul din fig. 241 într'un sistem static determinat, fără să se introducă articulații mobile și fără să se modifice condițiile de rezemare.

Fig. 241

§ 52. Determinarea reacțiunilor

Arce static determinate, în raport cu reacțiunile lor, sunt numai arcele cu trei articulații, întru cât existența articulației intermediare ne dă posibilitatea să formăm, față de această articulație, o ecuație suplimentară de echilibru pentru determinarea componentelor reacțiunilor de pe reazime. Aceasta, este valabil atât pentru arcele pline cât și pentru cele cu zăbrele.

Scanned with OKEN Scanner

Calculul analitic

Direcţiile reale ale legăturilor de reazim dela naşterile arcelor sunt necunoscute, însă ele pot fi determinate prin componentele lor V_a şi V_b pe direcţia verticală şi prin componentele Z_a şi Z_b pe direcţia liniei drepte care uneşte articulaţiile dela naşteri.

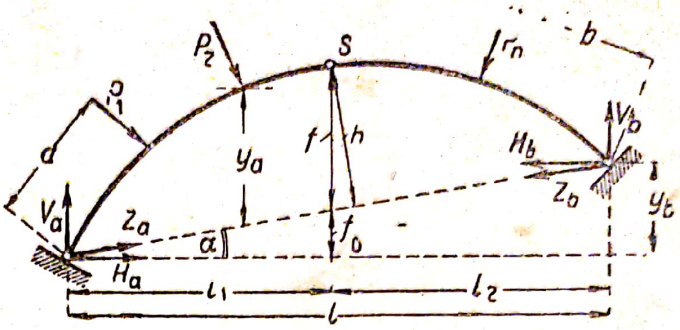


Fig. 242

În cazul general al unui arc cu naşterile fixe, valorile componentelor reacţiunilor se stabilesc din următoarele ecuaţii de echilibru (fig. 242).

Componentele verticale se determină din ecuaţia momentelor în raport cu punctele de reazim şi anume:

$$\left.\begin{aligned} V_a &= \frac{1}{l}\sum M_b = \frac{1}{l}\sum_0^l Pb\,; \\ V_b &= \frac{1}{l}\sum M_a = \sum_0^l Pa\,, \end{aligned}\right\} \qquad (89)$$

în care a şi b sunt distanţele forţelo P faţă de articulaţiile A şi B.

Componentele pe direcţia articulaţiilor naşterilor se determină din ecuaţia proiecţiei forţelor pe o axă orizontală

$$Z_a \cos\alpha - Z_b \cos\alpha + \sum_0^{l_1} P\cos(PX) = 0, \qquad (90)$$

şi din ecuaţia momentelor, faţă de articulaţia intermediară S, a forţelor ce se găsesc în dreapta sau în-stânga ei:

$$Z_a = \frac{M_s}{h} = \frac{1}{h}\left[V_a l_1 - \sum_0^{l_1} Ps\right], \qquad (91)$$

în care s este braţul de pârghie al forţelor P faţă de articulaţia S.

Valoarea reacţiunilor poate fi exprimată de asemenea şi prin componentele lor orizontale

$$H_a = Z_a \cos\alpha\,; \text{ şi } H_b = Z_b \cos\alpha\,.$$

In acest caz ecuaţia de echilibru pentru determinarea componentelor va fi:

$$\left.\begin{aligned} V'_a &= V_a + H_a \operatorname{tg}\alpha\,; \\ V'_b &= V_b + H_b \operatorname{tg}\alpha\,; \\ H_a - H_b &+ \sum_0^l P\cos(PX) = 0\,; \\ H_a = Z_a\cos\alpha &= \frac{M_s}{h}\cos\alpha = \frac{M_s}{f}. \end{aligned}\right\} \qquad (92)$$

Când asupra unui arc acţionează numai sarcini verticale, compo-

nentele verticale V_a și V_b ale reacțiunilor arcului vor fi egale cu reacțiunile A_o și B_o ale unei grinzi simplu rezemate

$$V_a = A_o \text{ și } V_b = B_o .$$

Componentele pe direcția liniei nașterilor Z_a și Z_b vor fi egale ca valoare și se vor determina din expresia momentului în raport cu articulația dela mijloc, considerat ca momentul unei grinzi simplu rezemate pentru aceeași secțiune:

$$Z_a = Z_b = \frac{M_s}{h} \text{ și } H = \frac{M_s}{f} . \qquad (93)$$

Construcția grafică

Determinarea grafică a reacțiunilor poate fi făcută prin descompunerea succesivă a rezultantelor grupelor de forțe R_1 și R_2 aplicate în partea din stânga, respectiv din dreapta arcului (fig. 243). In adevăr, rezultanta R_1 a forțelor aplicate pe partea din stânga, trebue să se descompună după direcția reacțiunilor A_1 și B_1; după proprietatea generală a sistemelor articulate, direcția B_1 trebue să fie îndreptată după dreapta care trece prin articulațiile S și B; direcția reacțiunii A_1 va fi determinată pe de o parte de articulația de pe reazimul A, iar pe de altă parte de punctul F_1 care este intersecția direcției S-B cu rezultanta R_1 (fig. 243 a).

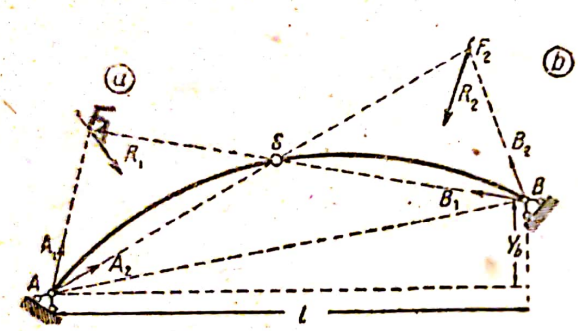


Fig. 243

Pe baza unor considerente asemănătoare, se poate efectua și descompunerea rezultantei R_2 după direcțiile A_2 și B_2. Determinarea reacțiunilor totale A și B se face prin însumarea geometrică a reacțiunilor A_1 cu A_2 și B_1 cu B_2, cum se vede în fig. 243-b.

Din fig. 243 se poate vedea ușor că, indiferent de valoarea și direcția rezultantei R_1 a forțelor aplicate în partea din stânga, direcția reacțiunii B_1 va fi întotdeauna îndreptată după linia S-B, iar direcția reacțiunii A_1, precum și mărimea ambelor reacțiuni, vor rămâne întotdeauna variabile; același lucru va avea loc și în partea din dreapta sistemului, unde direcția A_2 va rămâne constantă. *Ambele linii S-F_1 și S-F_2 care determină direcțiile reacțiunilor de pe reazime, pentru orice fel de încărcare, se numesc liniile reacțiunilor de pe reazime.*

Liniile de influență a reacțiunilor

Deoarece expresiile (89) pentru valorile componentelor verticale ale reacțiunilor la un arc cu trei articulații, produse de sarcini verticale, nu se deosebesc cu nimic de cele ale unei grinzi simplu rezemate, ecuația componentelor verticale ale reacțiunilor produse de o sarcină unitară, va fi:

Scanned with OKEN Scanner

$$V_a = 1\,\frac{l-x}{l} \quad \text{și} \quad V_b = 1\,\frac{x}{l}.$$

Liniile de influență ale acestor componente vor fi identice cu cele ale unei grinzi simplu rezemate (fig. 244).

Linia de influență a componentei Z_a a reacțiunii de pe reazim, îndreptată după linia ce unește articulațiile reazimelor, se determină din ecuația care, atunci când sarcina unitară este aplicată în dreapta articulației intermediare S, se scrie astfel:

$$Z_a = \frac{M_s^o}{h} = \frac{l_1}{h} \cdot \frac{l-x}{l} \qquad (94)$$

Această expresie este asemănătoare cu expresia momentului în secțiunea corespunzătoare a unei grinzi simplu rezemate. Deci linia de influență a momentului unei grinzi simplu rezemate, se deosebește de aceasta numai prin introducerea factorului l_1/h.

Punând segmentul l_1/h pe verticala coborîtă din reazimul A, determinăm poziția liniei din dreapta bs, care formează linia de influență (fig. 244); poziția liniei din stânga, după cum se știe, este determinată de direcția a-s.

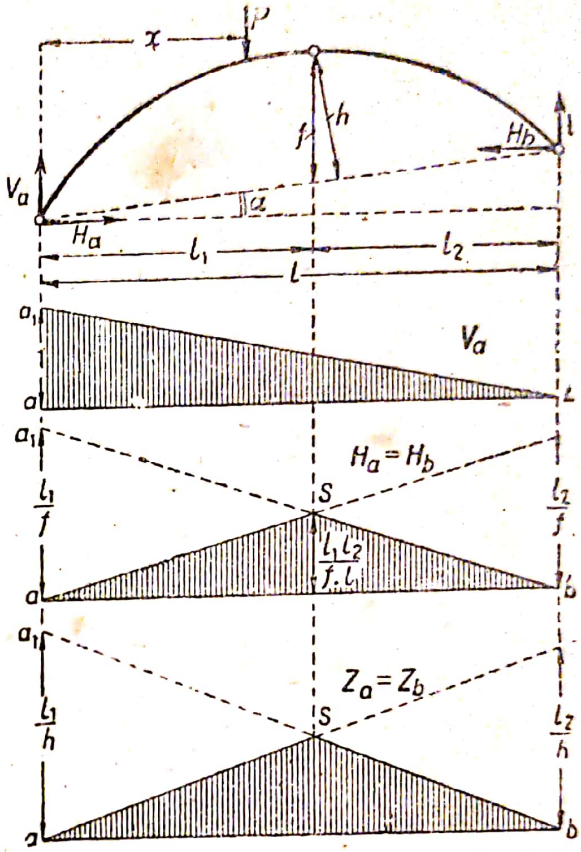


Fig. 244

Componenta reacțiunii H îndreptată după orizontală se determină prin expresia:

$$H = Z\cos\alpha = \frac{M_s}{h}\cos\alpha = \frac{l_1}{f} \cdot \frac{(l-x)}{l} \qquad (95)$$

Este evident că linia de influență a acestei componente va fi proporțională cu linia de influență a momentului în secțiunea unei grinzi simplu rezemate ce s'ar găsi în dreptul articulației S (fig. 244) și se deosebește de ea prin introducerea factorului l_1/f.

CAPITOLUL 11

ARCE PLINE

§ 53. Eforturi și momente

Pentru determinarea efortului în arcele pline, se face o secțiune perpendiculară pe axa arcului (fig. 245); poziția acestei secțiuni este

determinată de coordonatele x_k și y_k ale centrului de greutate al secțiunii și de unghiul de înclinare φ_k al tangentei față de orizontala dusă la axă în punctul considerat.

Porțiunea de arc separată prin această secțiune se va găsi în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare și a rezultantei R_x a eforturilor aplicate în planul secțiunii. Dacă această rezultantă se va aplica în centrul de greutate al secțiunii, eforturile interioare se vor determina printr'un moment M și rezultanta R_x sau componentele ei:
componenta normală pe secțiune:

$$N_x = R_x \cos (RN)$$

și componenta tangențială pe secțiune:

$$Q_x = R_x \cos (RQ)$$

Când poziția sarcinilor este invariabilă, valorile eforturilor și momentelor în secțiunile arcului se determină prin următoarele condițiuni de echilibru.

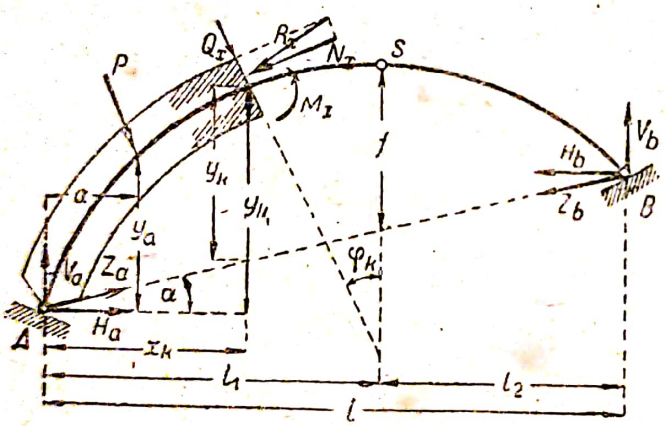


Fig. 245

Valoarea momentului M_x al eforturilor se determină din condiția ca acest moment să fie egal cu momentul tuturor forțelor exterioare, care se găsesc la dreapta sau la stânga secțiunii, luate în raport cu centrul de greutate al secțiunii (fig. 245):

$$M_x = (V_a + H_a \operatorname{tg} \alpha)\, x_k - H_a y_k - \sum_0^x P \cos (PY)\,(x_k - a) - \sum_0^x P \cos (PX)\,(y_k - y_a) \qquad (96)$$

în care a și y_a sunt coordonatele punctelor de aplicație ale forțelor P, față de reazimul din stânga. Ca sens pozitiv s'a admis sensul momentului M_x, care, în raport cu porțiunea din stânga arcului este contrar sensului mersului acelor unui ceasornic.

Din fig. 246 se vede că:

$$x_k \operatorname{tg} \alpha = y_{k_1} - y_k$$

şi de aceea ecuaţia (96) poate fi pusă sub forma următoare:

$$M_x = V_a\, x_k - H_a\, y_k - \sum_0^x P \cos (PY)\ (x_k - a) -$$

$$- \sum_0^x P \cos (PX)\ (y_k - y_a)$$

Când asupra arcului acţionează numai forţe verticale, ecuaţia va avea următoarea formă:

$$M_x = V_a\, x_k - H_a\, y_k - \sum_0^x P\ (x_k - a) =$$

$$= M_x^0 - H_a\, y_k \qquad (97)$$

în care $$M_x^0 = V_a\, x - \sum_0^x P\ (x - a)$$

este expresia momentului în secţiunea unei grinzi simplu rezemate cu aceeaşi încărcare.

Prin urmare, *valoarea momentului în secţiunea arcului, diferă de valoarea momentului la o grindă simplu rezemată cu aceeaşi deschidere şi încărcare, prin valoarea momentului produs de împingerea* $H y_k$.

Valoarea efortului normal N_k se determină prin proiectarea tuturor forţelor exterioare ce se găsesc în dreapta sau în stânga secţiunii, pe direcţia tangentei la axa arcului:

$$N_x = (V_a + H_a \operatorname{tg} \alpha) \sin \varphi +$$

$$+ H_a \cos \varphi - \sum_0^x P \cos (PY) \sin \varphi + \sum_0^x P \cos (PX) \cos \varphi. \qquad (98)$$

Când acţionează numai sarcini verticale, suma termenilor

$\left(V_a - \sum_0^x P\right) \sin \varphi$, reprezintă tocmai valoarea forţei tăietoare a unei grinzi simplu rezemată, multiplicată cu sin φ. De aceea, expresia forţei axiale în secţiunea arcului poate fi exprimată astfel:

$$N_x = Q_x^0 \sin \varphi + H_a (\cos \varphi + \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \varphi) \qquad (99)$$

Valoarea *forţei tăietoare* Q_x în secţiunea arcului se determină din condiţia proiecţiei tuturor forţelor din partea din stânga pe planul secţiunii:

Scanned with OKEN Scanner

$$Q_x = (V_a + H_a \operatorname{tg} \alpha) \cos \varphi - H_a \sin \varphi - $$

$$- \sum_0^x P \cos (PY) \cos \varphi - \sum_0^x P \cos (PX) \sin \varphi. \qquad (100)$$

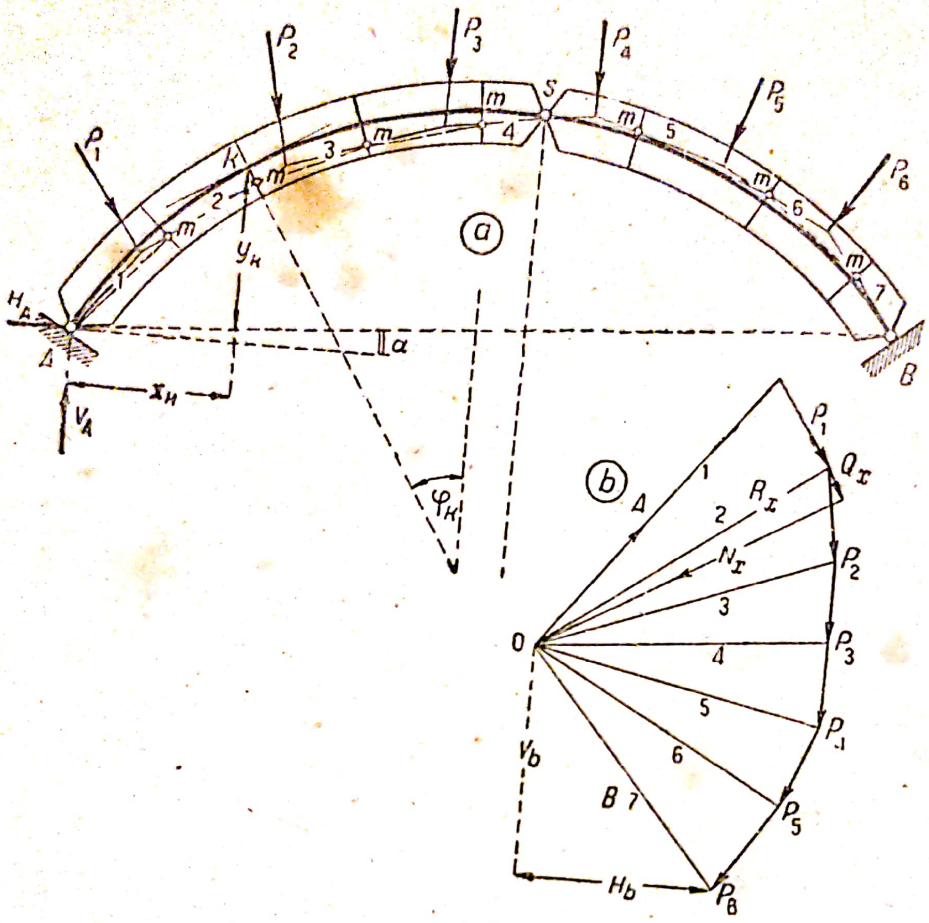


Fig. 246

Când asupra arcului acționează numai încărcări verticale, această expresie a forței tăietoare se transformă astfel:

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi - H_a (\sin \varphi - \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi) \qquad (101)$$

Dacă nașterile arcului se găsesc la același nivel, adică $\alpha = 0$, toate expresiile eforturilor interioare și ale momentelor se simplifică și în cazul când avem nu mai încărcări verticale, aceste expresii au forma următoare:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M_x^0 - Hy_k; \\ N_x &= Q_x^0 \sin \varphi + H \cos \varphi; \\ Q_x &= Q_x^0 \cos \varphi - H \sin \varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (102)$$

§ 54. Poligonul și curba de presiune

Valoarea eforturilor în secțiunile arcului pot fi determinate cu ajutorul poligonului funicular, construit pentru încărcarea dată și trecând

prin trei articulații ale arcului. Această condiție de trecere prin trei articulații ale arcului, o satisface numai un singur poligon funicular, pentru construirea căruia polul poligonului forțelor urmează să fie luat în punctul de intersecție al reacțiunilor A și B (fig. 243 și 246).

In poligonul forțelor construit cu distanța polară indicată, direcțiile razelor extreme determină direcțiile reacțiunilor A și B, iar lungimea razelor extreme, măsurate la scara forțelor, determină valorile reacțiunilor A și B.

Din construcția unui asemenea poligon de forțe se vede că fiecare rază polară care precede, reprezintă rezultanta R_x a forțelor ce se găsesc la stânga, adică reacția A și raza considerată a poligonului de forțe.

Fiecare din aceste raze reprezintă direcția laturii corespunzătoare a poligonului funicular. *De aci rezultă: dacă pentru o încărcare oarecare a unui arc se construește poligonul funicular care trece prin articulațiile arcului, iar după aceasta se face o secțiune prin arc, atunci direcția laturii secționate a poligonului funicular va determina direcția rezultantei forțelor interioare în această secțiune a arcului; valoarea acestei rezultante se determină prin lungimea razei respective a poligonului forțelor* (fig. 246 b). Descompunând fiecare din aceste raze pe direcția normală și tangențială la secțiune, vom obține valorile efortului normal N_k și a forței tăietoare Q_k din această secțiune.

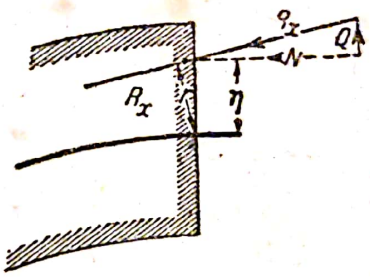


Fig. 247

Valoarea momentului în secțiunea arcului se determină ca moment al rezultantei forțelor R_k față de centrul de greutate al secțiunii, adică prin expresia (fig. 247)

$$M = R_x \, r \qquad (103)$$

în care r este brațul de pârghie măsurat pe perpendiculară din centrul de greutate la direcția laturii poligonului funicular, corespunzătoare secțiunii.

Inlocuind acest moment cu momentele componentelor N și Q, raportate la planul secțiunii, putem să transformăm expresia (103) astfel:

$$M = R_x \, r = N \cdot \eta \, , \qquad (104)$$

în care η este distanța între punctul de aplicație a efortului normal și centrul de greutate al secțiunii, momentul dat de forța tăietoare Q fiind egal cu zero.

In acest fel ajungem la concluzia că *poligonul funicular construit pentru un arc servește nu numai pentru determinarea eforturilor, ci*

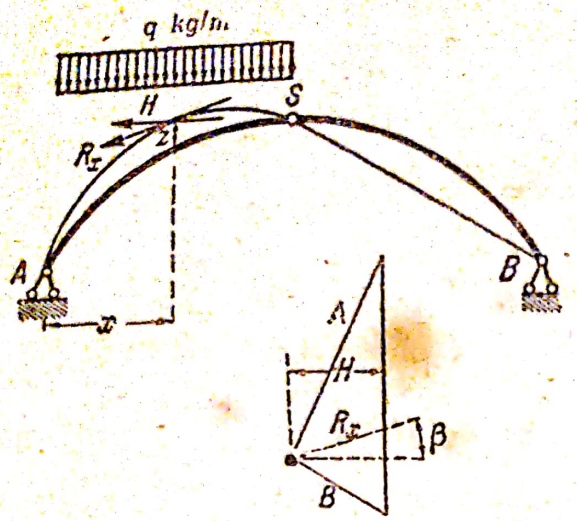


Fig. 248

prin poziția lui în raport cu fibra medie a arcului caracterizează valorile momentelor produse de eforturi.

Cu cât poligonul funicular se îndepărtează mai mult de axa arcului, cu atât brațele de pârghie r și η vor fi mai mari și cu atât momentele în secțiunile arcului vor fi și ele mai mari.

Dacă arcul este solicitat numai de forțe verticale (fig. 248), componenta orizontală (împingerea) va fi constantă ca valoare în toate secțiunile :

$$H = R_x \cos \beta_x$$

In acest caz momentul într'o secțiune oarecare a arcului poate fi determinat prin expresia :

$$M_x = Hz \qquad (105)$$

în care z este distanța pe verticală dela centrul de greutate al secțiunii până la direcția laturii secționate a poligonului funicular.

Rezultă, deci : *când arcul este încărcat numai cu sarcini verticale, suprafețele delimitate de poligonul funicular și axa arcului, reprezintă epura curbei momentelor în arc, măsurate la scara împingerii sau distanței polare.*

S'a menționat mai înainte că punctele de intersecție ale laturilor poligonului funicular cu secțiunile arcului, sunt punctele de aplicație ale eforturilor. Poligonul care trece prin aceste puncte va fi înscris în poligonul funicular și se denumește *poligonul de presiune*. Mărind numărul secțiunilor, poligonul de presiune tinde să se suprapună peste poligonul funicular. Prin urmare, poligonul funicular poate fi considerat ca fiind el însuși poligonul de presiune. Pentru încărcări permanente (greutatea proprie, greutatea umpluturii etc.), poligonul de presiune se transformă în *curba de presiune* și în acest caz direcția rezultantelor în secțiuni se determină prin direcțiile tangentelor la curba de presiune.

Intr'un caz particular când un arc cu axa parabolică este încărcat cu o sarcină uniform repartizată, curba de presiune coincide cu axa arcului. Aceasta se explică prin faptul că, în acest caz, curba funiculară din încărcarea uniform distribuită are forma unei parabole și fiind obligată ca și curba de presiune să treacă prin cele trei articu-

Scanned with OKEN Scanner

laţii ale arcului, trebue să coincidă aşa dar cu axa arcului. In acest caz momentele în arc, date de încărcare sunt egale cu zero, secţiunile arcului fiind supuse numai eforturilor axiale.

Probleme şi exerciţii

66. Să se construiască curba momentelor într'un arc solicitat de două sarcini diferite însă simetrice (fig. 249), fără să se determine analitic sau grafic reacţiunile.

Indicaţie. Curba momentelor se trasează după poligonul de presiune.

Fig. 249

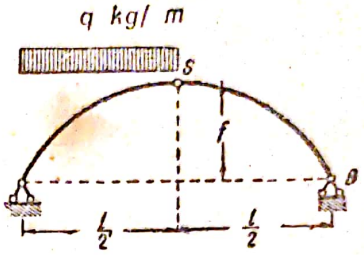


Fig. 250

67. Se dă un arc cu axa parabolică (fig. 250) încărcat pe jumătatea din stânga cu o sarcină uniform distribuită. Să se determine distanţa pe verticală dela axa arcului, la care trece curba de presiune în primul şi al treilea sfert al deschiderii.

Indicaţie. Ecuaţia axei parabolei faţă de articulaţiile dela naşteri, este

$$y = \frac{4f}{l^2} x (l - x)$$

Problema se rezolvă considerând curba de presiune ca fiind epura momentelor şi exprimând momentele în funcţie de împingere.

68. Folosind datele problemei precedente, să se găsească punctul de aplicaţie al curbei de presiune în secţiunea transversală a sfertului din stânga arcului (fig. 250).

Indicaţie. Momentul în secţiunea arcului trebue să fie exprimat prin forţa axială din aceeaşi secţiune.

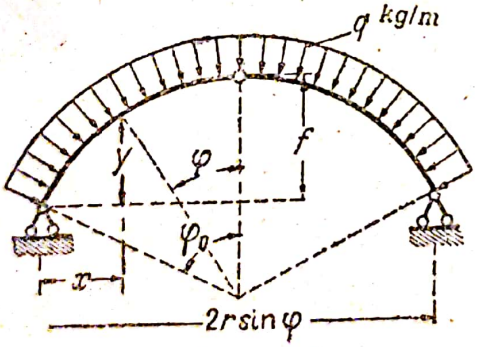
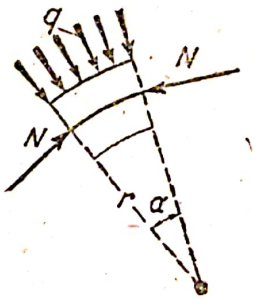


Fig. 251



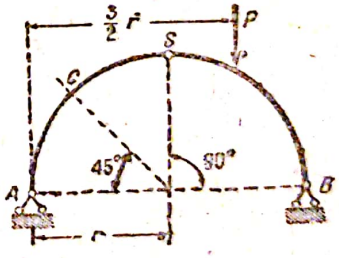


Fig. 252

69. Să se demonstreze că într'un arc cu axa în arc de cerc (fig. 251), încărcat cu o sarcină uniformă radială, momentele din toate secţiunile sunt egale cu zero, iar valorile forţelor axiale din toate secţiunile sunt egale.

Indicaţii. Coordonatele axei arcului se determină prin valorile :

$$x = r (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)$$
$$y = r (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

Pentru a stabili că valoarea eforturilor axiale este constantă, se recomandă să se întrebuinţeze expresia momentului faţă de centrul cercului. Expresia forţelor interioare trebue să fie alcătuită considerând un bolţar al arcului de lungimea $ds = r d\alpha$ cu presiunea pe acest bolţar $q \cdot r d\alpha$ şi considerând încărcarea în limitele dela φ până la φ_0.

70. Să se determine valoarea sarcinii P, care solicită un arc circular în punctul k (fig. 252) producând în secţiunea C a arcului următorul moment :

$$M = -(\sqrt{2}-1)\ t\ m$$

Raza arcului este $r = 2\ m$.

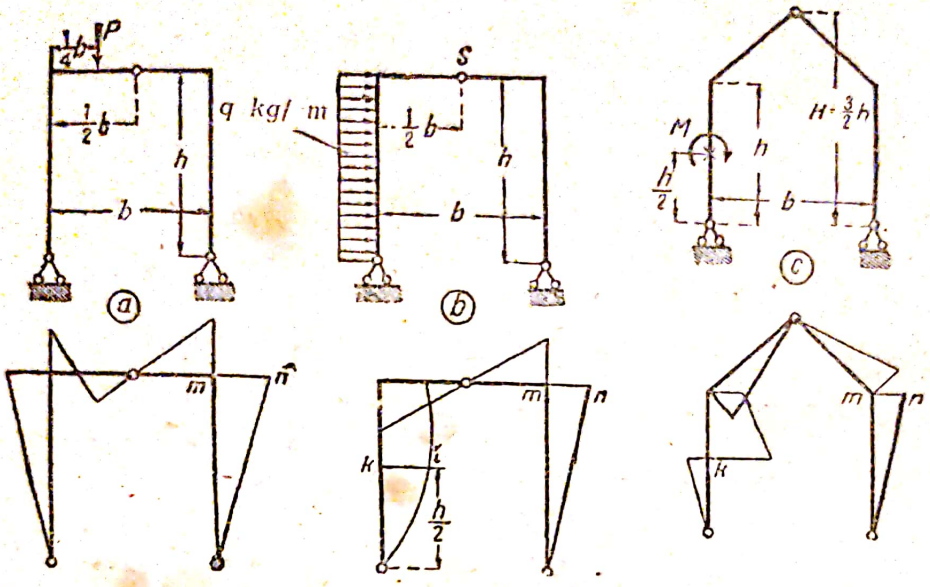


Fig. 253

Indicaţie. Trebue să folosim epura momentelor corespunzătoare acestei încărcări.

71. Să se arate dacă contururile epurelor momentelor într'un cadru cu trei articulaţii reprezentate în fig. 253 sunt corect construite.

Indicaţie. Trebue să se calculeze ordonatele principale ale epurei momentelor.

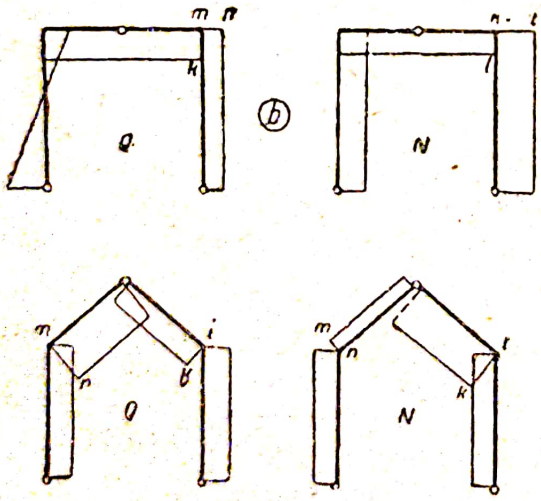


Fig. 254

Intrebări. Ce relaţie există între ordonatele momentelor din colţurile unui cadru ?

Cum se pot construi aceste epure sub forma poligonului presiunilor ?

Cum se explică faptul că părţile din dreapta ale epurelor sunt de acelaşi tip în toate schemele ? Se poate prevedea acest lucru din poligonul de presiune ?

Se poate construi epura schemei a, calculând numai ordonata mn şi cum anume ?

72. Să se demonstreze dacă contururile epurelor forţelor axiale şi ale forţelor tăietoare, reprezentate în fig. 254, construite după schemele din fig 253 b şi c sunt corecte.

Intrebare. Există echilibru în epurele construite între forţele din nodurile cadrului ?

§ 55. Linia de influenţă a momentului

Valoarea momentului în secţiunea unui arc, se determină în general prin expresia (97) :

$$M_x = M_x^0 - Zy_k \cos\alpha = M_x^0 - Hy_k = M_x^0 - \frac{M_s^0}{f} y_k \qquad (106)$$

în care termenii M_x^0 și M_s^0 sunt momentele din secțiunile respective ale unei grinzi simplu rezemate, iar segmentul y_k se determină pe distanța pe verticală dela punctul K din axa arcului în planul secțiunii, până la linia ce unește centrele articulațiilor dela nașteri.

Să analizăm construcția liniei de influență a momentului.

Incărcând arcul cu o sarcină unitară în partea din dreapta secțiunii, vom avea ecuația:

$$M_x = V_a \cdot a_k - Hy_k = \frac{l-x}{l} a_k - \frac{l-x}{l} l_1 \cdot \frac{y_k}{f} \qquad (107)$$

Primul membru al acestei ecuații reprezintă linia de influență a momentului în aceeași secțiune a unei grinzi simplu rezemate, având forma unui triunghiu cu ordonata maximă în dreptul secțiunii. Al doilea membru al ecuației reprezintă ordonata liniei de influență a împingerii înmulțită cu y_k sau linia de influență — într'o grindă simplu rezemată — a momentului în secțiunea ce se găsește în dreptul articulației S, modificată cu raportul $\frac{y_k l_1}{f}$; această linie de influență are forma unui triunghiu cu ordonata maximă în dreptul articulației S.

In fig. 255 a, este reprezentată construcția liniei de influență pentru ambii membri ai ecuației (107). Suprafața haşurată — reprezentând diferența ordonatelor celor două linii de influență — este linia de influență a momentului în secțiunea arcului.

Semnul liniei de influență se determină ușor după semnul liniei de influență a momentului într'o grindă simplu rezemată, pentru care momentul produs de încărcarea de sus în jos, este pozitiv pe toată lungimea grinzii. De aceea, în linia de influență a momentului pentru arc, porțiunea unde predomină linia de influență a momentului M_x^0 al grinzii simplu rezemate, va fi pozitivă.

In fig. 255 b este înfățișată linia de influență a momentului pentru aceeași secțiune a arcului, transformată față de axa absciselor în așa fel, încât linia a-s se confundă cu această axă. La această transformare, ordonata liniei de influență în dreptul reazimului din stânga, egală cu segmentul a_k, rămâne invariabilă.

Procedeul de construire a liniei de influență totală poate fi simplificat recurgând la punctul caracteristic f în care se intersectează linia

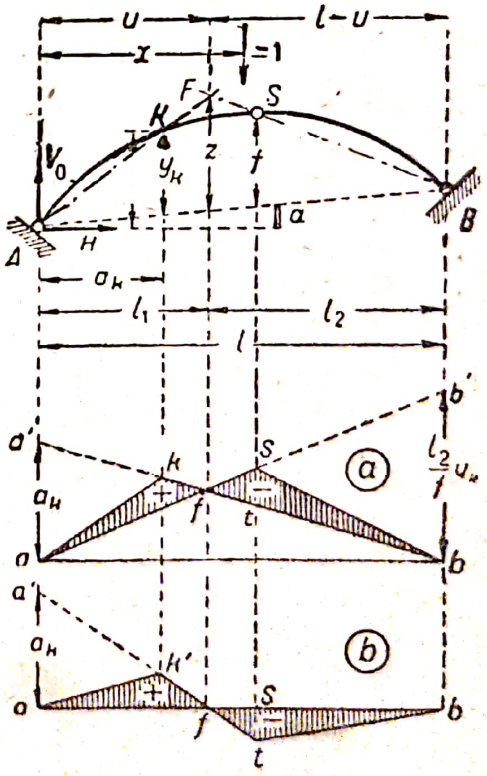


Fig. 255

din dreapta b-a' a unei componente a liniei de influență cu linia din stânga a-b' care aparține celeilalte componente a liniei de influență. Acest punct de intersecție leagă ambele componente ale liniei de influență și dacă acest punct este cunoscut, construirea liniei de influență totală poate fi executată direct fără să se mai traseze în prealabil ambele linii de influență componente.

§ 56. Determinarea punctului de intersecție de valoare zero la liniile totale de influență

Din fig. 256 se vede ușor că în punctul de intersecție f, ordonata liniei din dreapta b-a', a celei dintâi dintre liniile de influență componente, este egală cu ordonata liniei din stânga a-b' aparținând celei de a doua linii de influență.

Prima dintre liniile de influență însumate este linia de influență a momentului unei grinzi simplu rezemate și de aceea se exprimă întotdeauna în funcție de reacțiunea V_a a grinzii simplu rezemate

A doua dintre liniile de influență însumate este în funcție de împingerea H.

Această relație funcțională, aplicată la linia de influență a momentului în arc, se determină prin următoarea expresei (97) :

$$M_k = V_a a_k - H y_k .$$

Deoarece în punctul de intersecție, ordonatele V_a, a_k și Hy_k ale liniilor de influență însumate sunt egale între ele, rezultă următoarea expresie :

$$V_a a_k - H y_k = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{V_a}{H} = \frac{y_k}{a_k} \tag{108}$$

Dacă presupunem că punctul de intersecție f, care satisface această condiție, se găsește la distanța u față de reazimul din stânga, atunci ordonata liniei de influență a reacțiunii V_a, corespunzătoare acestei poziții, se determină din raportul $\frac{l-u}{l}$, iar ordonata liniei din stânga a liniei de influență a împingerii H din raportul $\frac{l_2}{f} \cdot \frac{u}{l}$. Substituind aceste valori în expresia (108) obținem următoarea relație :

$$\frac{V_a}{H} = \frac{(l-u)\,f}{l_2} \cdot \frac{1}{u} = \frac{y_k}{a_k} \tag{109}$$

care permite *să determinăm poziția punctului de intersecție de valoarea zero prin raportul* y_k / a_k.

Distanța u sau poziția punctului f se determină destul de simplu pe baza relațiilor geometrice :

$$\frac{f\,(l-u)}{l_2} = u\,\frac{y_k}{a_k}$$

Scanned with OKEN Scanner

Partea din stânga a acestei ecuații reprezintă segmentele verticale $z_1 = \frac{f}{l_2}(l-u)$ între linia AB a naşterilor şi dreapta BS ce trece prin articulațiile B şi S ale arcului (fig. 255). Partea din dreapta a aceleiași ecuații reprezintă segmentele verticale $z_2 = u\frac{y_k}{a_k}$ dintre linia AB a naşterilor şi dreapta AK, care trece prin articulația dela naştere A şi punctul momentelor K.

Condiția ca $z_1 = z_2$, va avea loc la intersecția dreptelor BS şi AK în punctul F, care se va găsi la distanța u dela reazimul din stânga.

Prin urmare, *punctul de valoare zero f, al liniei de influență a momentelor într'o secțiune a arcului se determină prin proiecția punctului de intersecție f al dreptei BS — care este direcția reacțiunilor — cu dreapta AK, care trece prin centrul secțiunii.*

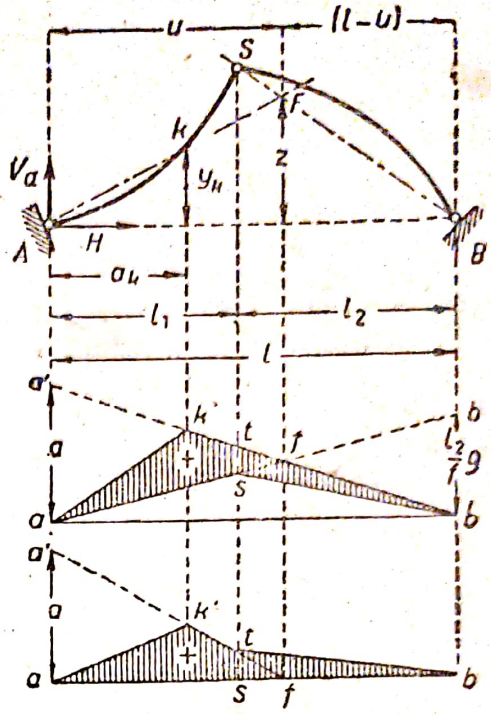


Fig. 256

Raportul V_a / H adică raportul dintre componentele verticale şi orizontale, determină direcția reacțiunii A. Când sarcina este aplicată în dreapta secțiunii, reacțiunea rămâne singura forță în stânga secțiunii şi dacă ea trece prin punctul momentelor, atunci momentul în secțiune va fi egal cu zero. De aceea, direcția AK şi direcția dreptei BS vor determina prin intersecția lor punctul F, iar dacă poziția sarcinii P va coincide cu acest punct, sarcina se va descompune după direcțiile reacțiunilor A şi B producând în secțiune un moment egal cu zero. Acestei poziții trebue să-i corespundă, în linia de influență, o ordonată egală cu zero, ceea ce corespunde întocmai cu demonstrația analitică de mai sus, relativă la poziția punctului zero f, în linia de influență totală.

Cunoscând poziția punctului f ca proiecție a punctului F putem construi direct toată linia de influență a momentului arcului.

In această construcție punctul f trebue să se găsească pe axa absciselor şi va fi un punct caracteristic pentru determinarea direcției liniei din dreapta liniei de influență a momentului M_x^o.

Drept al doilea punct caracteristic pentru determinarea aceleiași drepte, va rămâne punctul a' al vârfului ordonatei în dreptul reazimului A, deoarece valoarea acestei ordonate depinde de poziția secțiunii şi nu de influența împingerii H, astfel încât poziția punctului a' va fi invariabilă.

Prin punctele a' şi f se determină poziția liniei din dreapta a liniei de influență M_x^o, care este una din dreptele ce conturează linia de influență totală. Apoi, trebue să proiectăm pe aceasta punctele ca-

Scanned with OKEN Scanner

racteristice k' și t, care marchează punctele de frângere ale liniei de influență totală în dreptul centrului secțiunii și în dreptul articulației intermediare. Dreapta $a\,k'$ determină poziția liniei din stânga a liniei de influență a momentului M_x^o. Prin punctul t se determină limita de aplicare a liniei din dreapta $k'f$, deoarece în dreapta articulației S linia de influență totală trebue să varieze după dreapta ce unește articulațiile S și B, anulându-se în punctul b care reprezintă proiecția articulației B.

In fig. 256 este reprezentată o construcție similară a liniei de influență a momentului în secțiunea k pentru cazul când punctul F de intersecție a direcțiilor AK și BS se găsește la dreapta articulației intermediare S. In acest caz ordonata liniei de influență totală, în punctul f nu mai este egală cu zero; totuși condițiile relației geometrice (108) nu se vor modifica, de aceea toate construcțiile anterioare vor fi valabile și în acest caz; punctul f va fi determinat tot ca proiecția punctului F indiferent de conturul definitiv al liniei de influență totală.

Dacă punctul F de intersecție al liniilor BS și AK este în partea din dreapta a arcului (fig. 256) descompunerea sarcinii P care coincide cu acest punct, nu va mai fi îndreptată după direcțiile BS și AK, ca în cazul unei sarcini aflate la dreapta articulației S, de aceea ordonata liniei de influență corespunzătoare cu această poziție a sarcinii nu mai poate fi egală cu zero. Atunci punctul f, care este proiecția punctului F, va fi în punctul de valoare zero, imaginar.

Procedeul expus mai sus pentru construirea liniilor de influență totală cu ajutorul punctului de intersecție f al liniilor drepte care fac parte din liniile de influență totală, poate fi utilizat atât pentru construirea liniilor de influență ale momentelor cât și a liniilor de influență ale eforturilor normale, forțelor tăietoare, reacțiunilor etc; este însă necesar ca relația (109) să fie satisfăcută, adică:

$$\frac{V_a}{H} = \frac{f}{l_2}\,\frac{(l-u)}{u} = m \qquad (110)$$

Partea din stânga a acestei egalități: $\frac{V_a}{H} = \frac{f}{l_2}\,\frac{l-u}{u}$ reprezintă raportul componentelor reacțiunii din stânga și nu depinde de poziția secțiunii. *Această expresie trebue să satisfacă însă condiția* m *a părții din dreapta, care rezultă din ecuația care determină linia de influență.*

§ 57. Linia de influență a forței tăietoare

Sub acțiunea încărcării verticale, forța tăietoare din secțiunile unui arc cu trei articulații, se determină din expresia (101)

$$Q_x = Q_x^o \cdot \cos\varphi - H\,(\sin\varphi - \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\varphi).$$

Primul membru al părții din dreapta al acestei expresii $Q_x^o \cos\varphi$ reprezintă forța tăietoare într'o grindă simplu rezemată, multiplicată prin $\cos\varphi$, iar al doilea membru împingerea arcului multiplicată cu $(\sin\varphi - \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\varphi)$. Prin urmare, linia de influență a forței tăie-

Scanned with OKEN Scanner

toare se formează prin însumarea a două linii de influenţă: linia de influenţă a forţei tăietoare Q_x^0 a unei grinzi simplu rezemate şi linia de influenţă a împingerii H a arcului, modificată cu raporturile indicate mai sus.

In fig. 257 sunt reprezentate ambele linii componente ale liniei de influenţă: linia de influenţă Q_x^0 modificată, este alcătuită din două drepte paralele $a\,k_2$ şi $b\,k_1$ iar linia modificată a împingerii H din triunghiul $a\,s\,b$. Suprafaţa haşurată reprezintă rezultatul însumării ordonatelor acestor linii şi determină linia de influenţă totală a forţei tăietoare Q_x în secţiunile arcului.

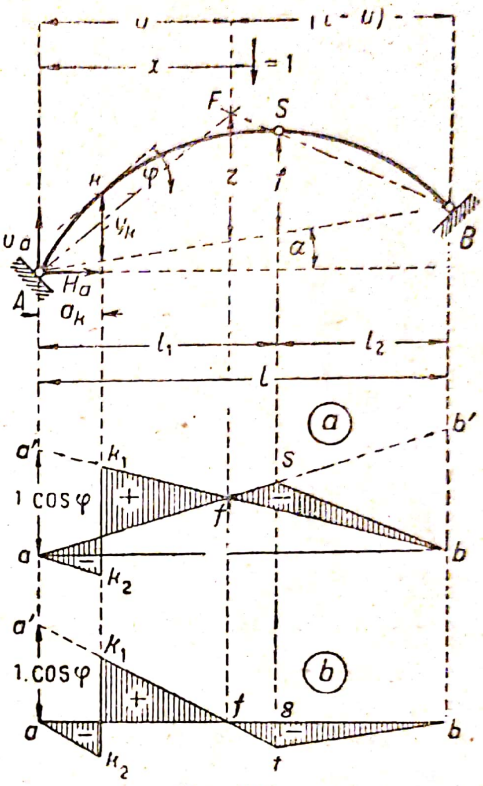


Fig. 257

Semnul liniei de influenţă se stabileşte după semnul liniei de influenţă a forţei tăietoare Q_x^0 al unei grinzi simplu rezemate; acest semn se menţine pe porţiunea liniei de influenţă totală unde ordonatele Q_x^0 sunt preponderente faţă de ordonatele liniei de influenţă ale împingerii H.

Construcţia poate fi simplificată dacă se determină poziţia punctului zero f de intersecţie al liniei din dreapta care aparţine liniei de influenţă Q_x^0 cu linia din stânga, care aparţine liniei de influenţă H.

Când sarcina este aplicată între secţiunea ce am ales k şi articulaţia intermediară S, rămâne în partea din stânga arcului, numai reacţiunea:

$$A = \sqrt{V_a^2 + H^2}.$$

In cazul când în partea din stânga arcului există numai reacţiunea A, este evident că forţa tăietoare Q în secţiunea k poate fi egală cu zero numai atunci când reacţiunea A va avea direcţia perpendiculară pe planul secţiunii, adică va fi îndreptată paralel cu tangenta la axă. In acelaşi timp sarcină aflându-se în partea din stânga arcului, cealaltă reacţiune trebue să aibă direcţia după linia BS. Prin intersecţia dreptei AF, paralelă cu tangenta la axa arcului în punctul k, cu dreapta BS, se determină poziţia punctului F. Fiind aplicată în acest punct, sarcina se descompune după direcţiile BS şi AF ceea ce asigură ca forţa tăietoare Q să fie egală cu zero. Punctul f determină poziţia punctului zero f al liniei de influenţă.

Determinarea punctului zero se poate face de asemenea şi prin folosirea

relației geometrice (110). Când poziția sarcinii unitare este în dreapta secțiunii, ecuația liniei de influență se scrie astfel:

$$Q_x = V_a \cos \varphi - H (\sin \varphi - \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi)$$

Când sarcina unitară se găsește în dreptul punctului zero, forța tăietoare este egală cu zero și de aceea:

$$V_a \cos \varphi = H (\sin \varphi - \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi).$$

Impărțind ambii membri ai ecuației prin cos φ și înlocuind raportul $\frac{V_a}{H}$ cu valoarea lui care rezultă din condiția (110), obținem:

$$\frac{V_a^o}{H} = \frac{f(l-u)}{l_2} = u (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha).$$

Această expresie este satisfăcută prin condițiile de intersecție ale dreptei BS cu dreapta AF, care se duce sub unghiul φ față de orizontală, paralel cu tangenta la axa arcului în secțiunea k. Dreapta BS având ordonatele cuprinse între această linie și linia centrelor articulațiilor dela naștere AB, satisface partea din stânga egalității. Dreapta AF având ordonatele între dreapta AF și linia centrelor articulațiilor dela naștere și fiind înclinată față de ordonate cu unghiul α, satisface partea dreaptă a egalității $u (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha)$.

Poziția liniei din dreapta a liniei de influență totală se determină de punctul f care este proiecția pe axa absciselor a punctului F și de punctul a' care reprezintă vârful ordonatei egale cu $+1 \cdot \cos \varphi$ în dreptul reazimului din stânga (fig. 257).

Poziția liniei din stânga a aceleiași linii de influență se stabilește ducând dreapta ak_2 paralelă cu ramura din dreapta $a'f$, după cum rezultă din proprietățile liniei de influență pentru Q_x^o ale unei grinzi simplu rezemate. Limitele de aplicare ale acestor două ramuri se determină prin proiectarea pe ele a punctelor k_1 și k_2, care sunt proiecțiile punctului k. Prin proiectarea punctului t, care reprezintă proiecția articulației S, pe ramura din dreapta $a'f$, se determină conturul liniei de influență totală pe porțiunea SB, unde linia de influență trebue să varieze liniar între punctele t și b.

§ 58 Linia de influență a efortului axial

In cazul sarcinilor verticale, efortul axial într'o secțiune oarecare a arcului se determină din ecuația (99):

$$N_x = Q_x^o \sin \varphi + H (\cos \varphi + \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \varphi).$$

Primul membru al acestei ecuații este forța tăietoare Q_x^o într'o secțiune a unei grinzi simplu rezemate, multiplicată cu sin φ. Linia de influență a acestei forțe, după cum se cunoaște, se trasează prin două drepte paralele. Prin urmare, urmărind ordinea de formare a liniei de influență N_x, acest membru al ecuației va da (fig. 258) două drepte paralele $k_1 b$ și ak_2 cu ordonatele + sin φ în dreptul reazimului din stânga și $-\sin \varphi$ în dreptul reazimului din dreapta.

Al doilea membru al ecuației: $H (\cos \varphi + \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi)$ ține seama de influența împingerii H, de aceea încadrarea lui în linia de influență N_x se va caracteriza prin introducerea triunghiului asb cu vârful în dreptul articulației intermediare, care are în dreptul reazimului din dreapta ordonata egală cu:

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{l_2}{f}\ (\cos\varphi + \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\varphi).$$

Astfel linia de influență totală a forței axiale se determină din suma ordonatelor acestor linii și se va trasa printr'o linie frântă $a\,k_2\,k_1\,b\,s\,a$ având pe tot parcursul ei semnul negativ, corespunzător cu acțiunea de compresiune a efortului N_x.

In fig. 258-b, aceeași linie de influență N_x este construită din nou, cu raportarea ordonatelor totale la axa absciselor.

Simplificarea procedeului de construire a liniei de influență totală poate fi obținută prin determinarea poziției punctului zero f, care se află la intersecția ramurii din dreapta $a_1\,b$ a liniei de influență Q^0 cu ramura din stânga as a liniei de influență a împingerii H.

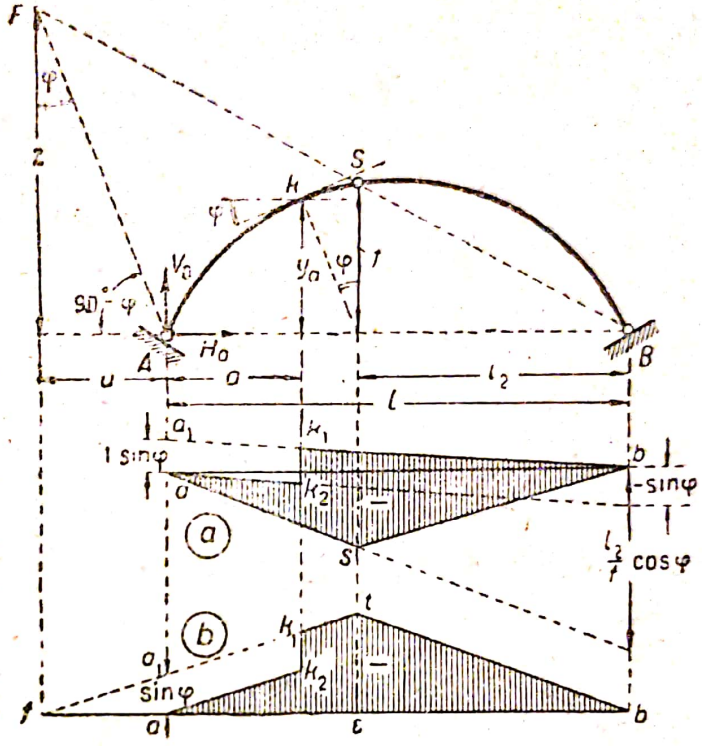


Fig. 258

Când sarcina $P=1$ se găsește între secțiunea k și articulația S, în partea din stânga arcului rămâne numai reacțiunea A. Este evident că în acest caz efortul normal în secțiune va fi egal cu zero, cu condiția ca direcția reacțiunii A să fie paralelă cu secțiunea. Prin intersecția direcției reacțiunii A cu linia BS (fig. 258) se determină punctul F, iar pe verticală coborîtă din acest punct se va găsi și punctul căutat f.

Poziția punctului f trebue să indeplinească de asemenea condiția (110):

$$V_a \sin\varphi + H\ (\cos\varphi + \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\varphi) = 0$$

de unde:

$$\frac{V_a}{H} = \frac{f\ (l-u)}{l_2\ u} = -\ (\operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{tg}\alpha)$$

sau

$$\frac{V_a}{H} = \frac{f}{l_2}\ (l-u) =$$

$$= -\ u \left[\ \operatorname{tg}\ (90^0 - \varphi) + \operatorname{tg}\alpha\ \right].$$

Această ecuație este satisfăcută de ordonata în dreptul punctului

de intersecție F al dreptei BS cu dreapta AF dusă din articulația A sub unghiul $90^0 - \varphi$ față de orizontală, deci paralelă cu perpendiculara la tangenta în secțiunea k a arcului.

Poziția punctului f pe axa absciselor și vârful a_1 al ordonatei egale cu $1 \cdot \sin\varphi$ din dreptul reazimului din stânga determină direcția fa_1 a ramurii din dreapta liniei de influență modificate; ramura din stânga aceleiași linii de influență, după cum se știe, trebue să treacă prin zero în reazimul din stânga și să fie paralelă cu ramura din dreapta (fig. 258-b); aceasta va fi dreapta ak_2.

Proiectând pe ramura din dreapta articulația S, obținem punctul t și ducând dreapta tb, care indică variația liniei de influență N_x pe porțiunea dintre articulațiile S și B, determinăm forma liniei de influență totală modificată a efortului axial N.

Probleme și exerciții

73. Să se demonstreze că împingerea oricărui arc simetric, dată de o încărcare situată numai pe o singură parte a arcului, este egală cu împingerea dată de o încărcare de două ori mai mică, însă distribuită simetric pe ambele jumătăți ale arcului.

Indicație. Răspunsul poate fi dat analizând linia de influență a împingerii.

74. Să se determine pentru care secțiune sunt construite liniile de influență ale momentului și ale forței tăietoare reprezentate în fig. 259 și să se determine scara lor.

Indicație. Răspunsul la prima întrebare poate fi dat de conturul liniei de influență, caracteristic pentru grinzile simplu rezemate, care se menține la sistemele în arc.

75. Să se construiască linia de influență a forțelor tăietoare în secțiunea k a arcului din fig. 260 (linia mn este paralelă cu linia AS).

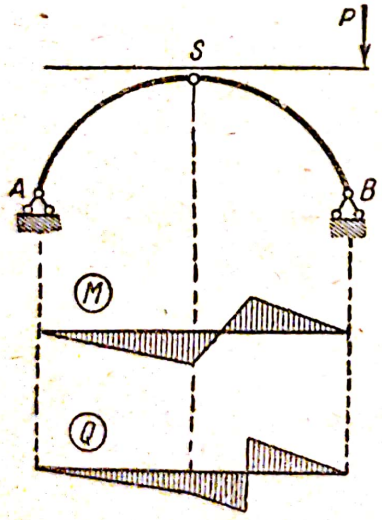


Fig. 259

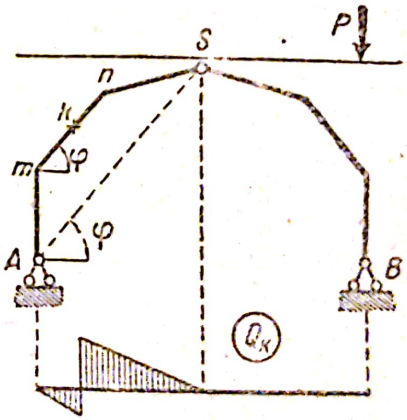


Fig. 260

76. Să se arate dacă linia de influență a efortului normal în secțiunea k a arcului, reprezentat în fig. 261, este corect construită. (Linia BS este înclinată față de verticală cu același unghiu φ ca și tangenta în punctul k față de orizontală).

77. Să se construiască linia de influență a momentului și a forței tăietoare în secțiunea k a unui arc, în cazul transmiterii indirecte a sarcinilor (fig. 262).

Indicație. Trebue să ne reamintim că linia de influență, în cazul sarcinilor indirecte, diferă de linia de influență a încărcării directe prin conturul ei, care este în trepte.

78. Să se construiască linia de influență a momentului în secțiunile k și m ale unui arc cu tirant, care are conturul unei linii frânte (fig. 263).

Scanned with OKEN Scanner

Indicații. Pentru construirea liniei de influență trebue să lămurim cum se va manifesta transferarea tirantului din poziția liniei articulațiilor dela naşteri, în poziția liniei frânte la nivelul A_1B_1.

Când se va face secțiunea prin partea din mijloc a tirantului, direcția efortului în tirant va intersecta componentele verticale ale reacțiunilor în punctele A_1 şi B_1. Prin urmare prin aceste puncte trebue să treacă direcțiile rezultantelor

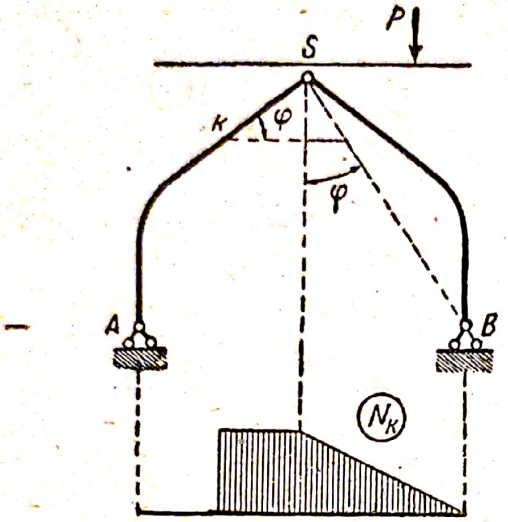


Fig. 261

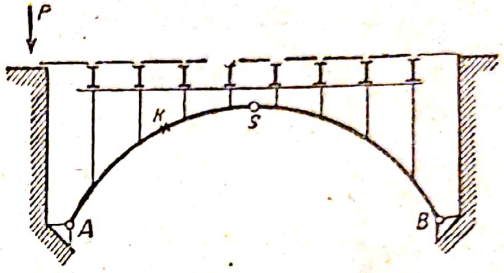


Fig. 262

reacțiunilor, după direcțiile cărora trebue să se descompună sarcina aflată pe arc. Aceste direcții trebue să fie utilizate pentru determinarea poziției punctelor zero ale liniei de influență.

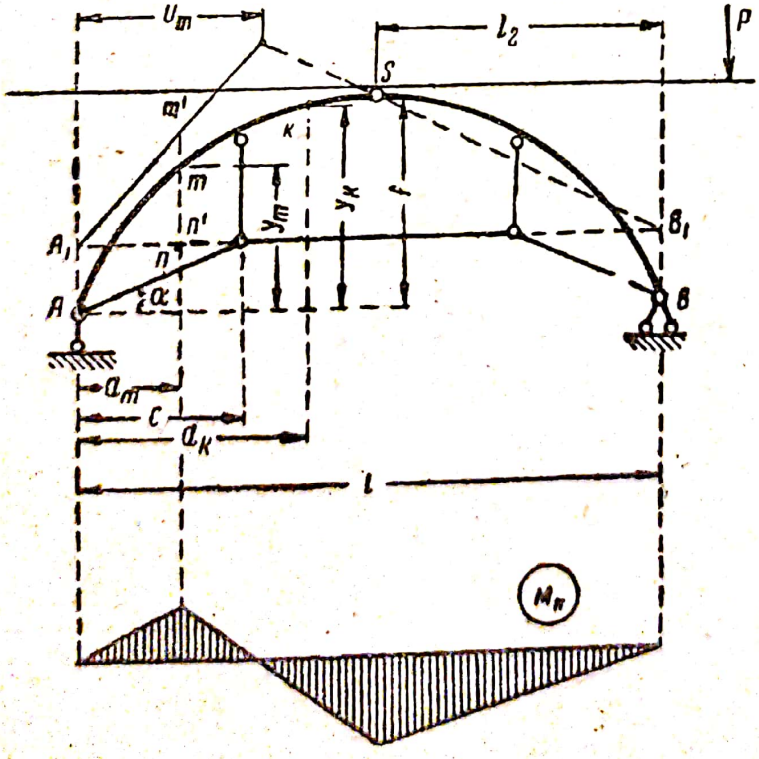


Fig. 263

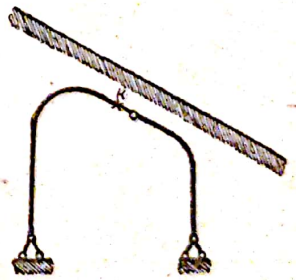


Fig. 264

În special trebue să atragem atenţia asupra determinării poziţiei punctului zero pentru linia de influenţă a momentului în secţiunea m. In acest caz dreapta care, în mod obişnuit, se duce prin articulaţia din stânga şi centrul secţiunii, trebue să fie trasată prin punctul A_1 şi vârful ordonatei egale cu $(y_m - a_m \operatorname{tg} \alpha)$, măsurată dela bara $A_1 B_1$, ceea ce rezultă de-a-dreptul din raportul segmentelor $\frac{l-u_m}{u_m}$, care determină poziţia punctului zero (110).

79. Să se construiască linia de influenţă a efortului axial şi a forţei tăietoare pentru secţiunea arcului din fig. 264.

§ 59. Momentele la limita sâmburelui central

Rezistenţa maximă σ în secţiunile unui arc se determină prin formula:

$$\sigma = \frac{N}{F} \mp \frac{M}{I} e \qquad (111)$$

în care F este suprafaţa secţiunii;
I — momentul de inerţie al secţiunii;
e — distanţa dela centru până la cel mai îndepărtat punct al secţiunii.

Valoarea maximă a rezistenţei va corespunde celei mai defavorabile încărcări pentru efortul axial N_x şi momentul încovoietor M_x.

Din comparaţia liniei de influenţă pentru M_x (§ 55) şi N_x (§ 58), se vede că limitele încărcării cele mai defavorabile sunt diferite, determinarea rezistenţelor maxime trebuind să se facă aşa dar în următoarele ipoteze: fie determinând valoarea maximă pozitivă şi minimă negativă a lui M şi calculând valorile corespunzătoare ale lui N, fie determinând valorile maxime ale lui N şi calculând valorile corespunzătoare ale lui M. Incărcarea triplă a liniei de influenţă poate fi evitată prin folosirea momentelor la limita sâmburelui central.

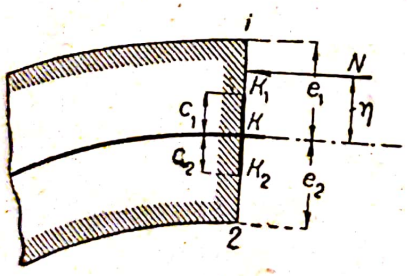


Fig. 265

Expresia efortului normal, alcătuită din doi membri, poate fi adusă la o expresie cu un singur membru, dacă în loc de axa arcului vom considera punctul momentului în punctele extreme ale sâmburelui central K_1 şi K_2 (fig. 265).

Presupunem că distanţele punctelor extreme ale sâmburelui central dela axa arcului sunt c_1 şi c_2 şi că distanţa între punctul de aplicaţie al efortului N şi centrul secţiunii este η. Atunci

$$M = N \cdot \eta,$$

iar expresia rezistenţei normale poate fi scrisă în forma următoare:

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{M}{I} e_1 = \frac{N}{I} (i^2 + \eta e_1);$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{M}{I} e_2 = \frac{N}{I} (i^2 - \eta e_2).$$

Scanned with OKEN Scanner

în care i_2 este pătratul razei de giraţie egal cu $\frac{I}{F}$; valoarea ei după proprietăţile sâmburelui central al secţiunii poate fi exprimată astfel :

$$i^2 = c_2\, e_1 \qquad \text{şi} \qquad i^2 = c_1\, e_2$$

Introducând aceste valori ale razei de giraţie în expresia rezistenţelor obţinem :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N}{I}(c_2 e_1 + \eta e_1) = \frac{N}{I}(c_2 + \eta) e_1 = \frac{M_{k2}}{I} e_1 \\ \sigma_2 &= \frac{N}{I}(c_1 e_2 - \eta e_2) = \frac{N}{I}(c_1 - \eta) e_2 = -\frac{M_{k1}}{I} e_2 . \end{aligned}\right\} \qquad (112)$$

In aceste expresii

$$M_{k1} = N\,(\eta - c_1)$$

şi

$$M_{k2} = N\,(c_2 + \eta)$$

sunt valorile momentelor în secţiunile arcului în raport cu punctele extreme ale sâmburelui central.

Pentru a putea găsi, după aceste formule, rezistenţa maximă la încărcarea cea mai defavorabilă, rămâne să construim linia de influenţă a momentelor pentru punctele superioare şi inferioare ale sâmburelui central.

S'a expus în § 55 procedeul pentru determinarea momentelor forţelor exterioare în raport cu punctul axei arcului, precum şi acela de construire a liniei de influenţă. Acest procedeu rămâne valabil şi la construirea liniilor de influenţă pentru momentele luate în raport cu punctele sâmburelui central al secţiunii, însă coordonatele y_k şi a_k ale punctelor se vor schimba în consecinţă.

De exemplu, expresia momentului în raport cu punctul superior al sâmburelui central al secţiunii (fig. 266) va fi :

$$M_{k1} = V_a \cdot a_1 - H y_1$$

Punctul zero f_1 al liniei de influenţă totală se va determina prin poziţia punctului F_1, care este intersecţia dreptei BS cu dreapta AK_1 care trece prin punctul respectiv K_1 al sâmburelui cen-

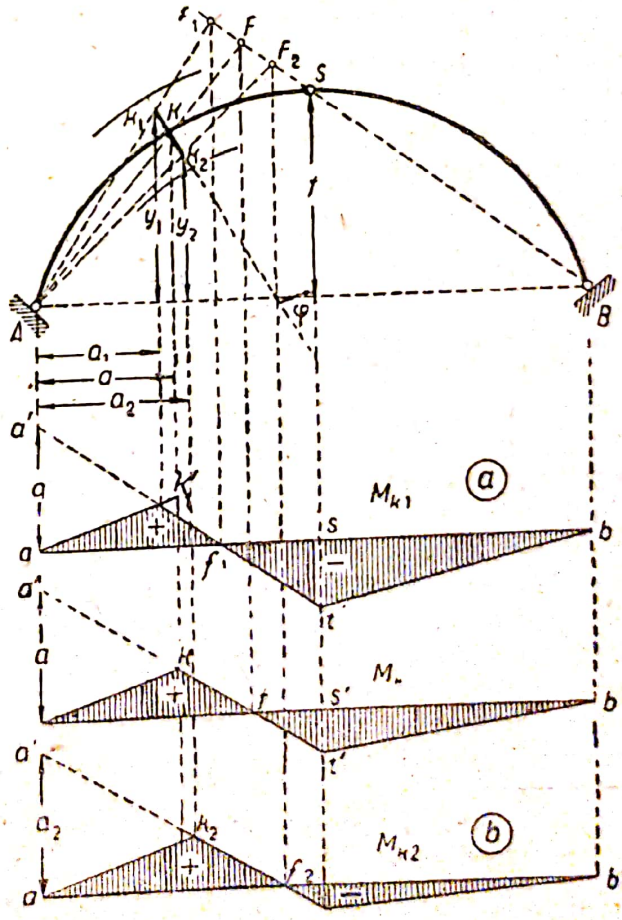


Fig. 266

tral. Linia de influenţă se construeşte prin procedeul cunoscut, punând segmentul $aa' = a_1$ pe ordonata în dreptul reazimului A şi trasând dreapta $a'f'$ prin punctul zero f_1. Proiectăm pe această dreaptă punctele k' şi t', cu ajutorul cărora se determină poziţiile dreptelor ak' şi $t'b$.

Linia de influenţă a momentului pentru punctul inferior k_2 al sâmburelui central din fig. 266-b, se construeşte în mod analog după ecuaţia:

$$M_{k_2} = V_a \cdot a_2 - Hy_2 .$$

Având liniile de influenţă pentru momentele punctelor sâmburelui central, nu este greu să determinăm încărcarea cea mai defavorabilă pentru solicitările în fibrele cele mai îndepărtate ale secţiunii, din care una va corespunde cu solicitarea maximă pozitivă, iar cealaltă cu solicitarea minimă negativă.

Observaţie. In construcţia descrisă mai sus a liniei de influenţă nu s'a ţinut seama de transmiterea sarcinilor la axa arcului. Această transmitere este legată de momentul de trecere al sarcinii dela ramura din dreapta liniei de influenţă pe ramura din stânga, prin punctul k de pe axa arcului. Această trecere dela ramura din dreapta la ramura din stânga se manifestă în linia de influenţă printr'un salt care formează un triunghiu suplimentar (în fig. 266 acest triunghiu nu este haşurat). Totuşi suprafeţele obţinute la construirea triunghiurilor suplimentare sunt aşa de mici faţă de suprafeţele totale ale liniei de influenţă, încât la construcţiile obişnuite ele se ne lijează.

§ 60. Axa optimă a unui arc cu trei articulaţii

Axa optimă*) a unui arc cu trei articulaţii de deschidere şi pleoştire oarecare se numeşte forma curbei în care secţiunile transversale ale arcului impuse de condiţiile de rezistenţă să fie minime. Reducerea dimensiunilor transversale este în funcţie de reducerea rezistenţelor efective care la arce se determină cu formula:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{I} y$$

Este evident că valoarea minimă a rezistenţei efective va rezulta atunci când valoarea momentului încovoietor în secţiune va fi egală cu zero, ceea ce este posibil numai în cazul când rezultanta forţelor interioare trece prin centrul secţiunii. Această condiţie trebue să satisfacă toate secţiunile arcului, ceea ce echivalează ca axa optimă să coincidă cu curba de presiune.

Construirea curbei de presiune este legată de luarea în considerare a influenţei secţiunii transversale propriu zise, ceea ce complică simţitor studiul analitic al acestei probleme. De aceea în mod obişnuit studiul axei optime se efectuează în ipoteza unui arc „subţire", adică fără dimensiuni transversale. Intr'un astfel de arc, curba de presiune coincide cu curba funiculară pentru încărcarea dată. Erorile ce se datoresc ipotezei adoptate sunt destul de mici şi influenţa lor asupra

*) **Nota revizorului editorial**
Axa despre care tratează acest paragraf este aceea corespunzătoare condiţiilor celor mai avantajoase în ce priveşte solicitările din secţiunile arcului şi deci se prezintă cel mai raţional sub raportul utilizării materialului în construcţie.
In textul din limba rusă, această axă este denumită „axa raţională".

formei axei efective a arcului poate fi neglijată.[1])

Forma curbei funiculare depinde de valoarea și poziția sarcinilor. Într'un arc cu trei articulații, poziția acestei curbe se determină prin cele trei puncte ale articulaților, însă variația ei între articulații este în funcție de caracterul articulației și al sarcinilor care solicită arcul. Sub acțiunea sarcinilor mobile, curba funiculară, trecând întotdeauna prin cele trei articulații, își va modifica în continuu poziția față de axă între articulații, poziția ei fiind în funcție de poziția sarcinilor.

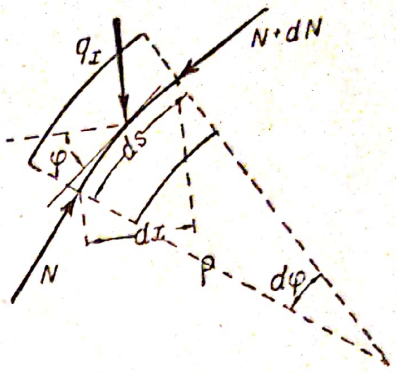


Fig. 267

1. **Acțiunea sarcinilor verticale.** Presupunem că arcul se găsește sub acțiunea unei încărcări oarecare, continue și verticale q_x. Separăm din arc un element de lungime ds (fig. 267) și ținând seama de faptul că atunci când axa arcului se confundă cu curba funiculară, momentul și forța tăietoare din acea secțiune trebue să fie egale cu zero, facem echilibrul acestui element față de cele două forțe normale N și $N+dN$. Deoarece elementul despărțit din arc se găsește în echilibru sub acțiunea forțelor aplicate lui, putem să scriem următoarea relație:

$$N \sin \frac{d\varphi}{2} + (N + dN) \sin \frac{d\varphi}{2} - q_x\, dx \cos \varphi = 0 \qquad (113)$$

Din cauza valorii mici a unghiului $d\varphi$ putem considera că

$$\sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}$$

iar valoarea $dN \frac{d\varphi}{2}$ fiind un infinit mic, de ordinul al doilea, poate fi chiar neglijată

$$dx = ds \cos \varphi$$

Admițând cele de mai sus, ecuația (113) va avea forma următoare:

$$N d\varphi = q_x\, ds \cos^2 \varphi \qquad (114)$$

Deoarece sub acțiunea exclusivă a sarcinilor verticale, proiecțiile verticale ale efortului normal sunt egale cu împingerea arcului

$$N \cos \varphi = H$$

ecuația (114) poate fi transformată astfel:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{q_x \cos^3 \varphi}{H} \qquad (115)$$

---

[1]) **Notă.** Efectul acestor influențe a fost descris în articolul prof. *V. I. Rudnev* „Axa cea mai economică a arcelor" (Culegerea jubiliară a academicianului *E. C. Paton*, Kiev).

După cum se știe, raportul

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}$$

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(1 + y'^2)}}$$

Substituind expresia $\frac{d\varphi}{ds}$ și $\cos\varphi$ în ecuația (115) și făcând reducerile, obținem ecuația diferențială a curbei axei arcului încărcat cu sarcini verticale.

$$y'' = \pm \frac{q_x}{H} \qquad (116)$$

Semnul acestei ecuații trebue să fie ales în raport cu poziția centrului de curbură față de axele de coordonate. Dacă centrul de curbură se găsește în partea ordonatelor pozitive, atunci se ia semnul *plus*, iar dacă este în partea celor negative, se ia *minus*.

Să analizăm două cazuri particulare tipice de încărcare a arcului.

1. *Arcul este încărcat cu sarcini uniform repartizate* (fig. 268).

Fixăm origina sistemului de coordonate în articulația din stânga reazimului. Ecuația diferențială a axei (116) va fi:

$$y'' = -\frac{q}{H} = \text{constant.}$$

Integrând de două ori, obținem expresia ordonatelor axei arcului

$$y' = -\frac{q}{H}x + C_1 ;$$

$$y = -\frac{q}{H}\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 .$$

Constantele care fac parte din această ecuație se determină din condiția:

pentru $x = 0$ $y = 0$ $C_2 = 0$

pentru $x = l_1$ $y' = 0$ $C_1 = \frac{q}{H} l_1$

Față de aceasta, ecuația ordonatelor axei se poate scrie astfel:

$$y = \frac{q}{2H} x (2l_1 - x) \qquad (117)$$

Prin urmare, sub acțiunea sarcinii verticale uniform repartizate, axa optimă a arcului va fi o parabolă.

2. *Arcul este încărcat cu sarcini verticale continue, care variază proporțional cu ordonatele axei arcului* (fig. 269).

In acest caz încărcarea ce revine fiecărui element de arc este exprimată prin valoarea:

$$q_x = q + \gamma y ,$$

Scanned with OKEN Scanner

în care γ este greutatea specifică a încărcării (umpluturii) deasupra axei arcului. Considerând origina coordonatelor în articulația din mijlocul arcului, scriem ecuația diferențială a axei arcului (116):

$$y'' = \frac{q}{H} + \frac{\gamma y}{H}$$

Notând $\frac{\gamma}{H}$ cu k^2, obținem:

$$y'' - k^2 y = \frac{q}{H}$$

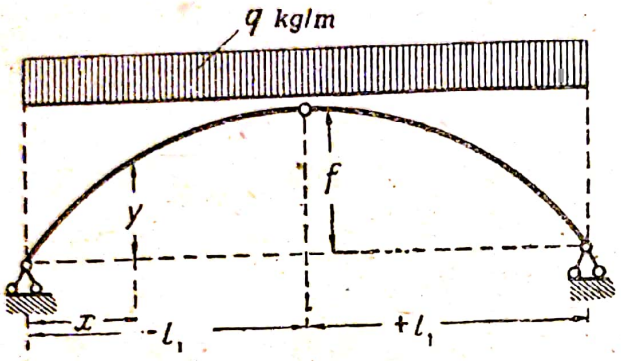


Fig. 268

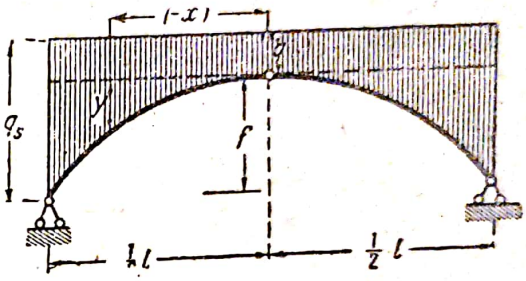


Fig. 269

Deoarece membrul din dreapta acestei ecuații este o mărime constantă, rezolvând această ecuație diferențială, obținem ecuația ordonatelor axei arcului

$$y = A_1 \operatorname{sh} kx + A_2 \operatorname{ch} kx - \frac{q}{Hk^2}$$

$$y' = kA_1 \operatorname{ch} kx + kA_2 \operatorname{sh} kx .$$

Constantele A_1 și A_2 din această ecuație se determină din condiția:

când $x = 0$ $y = 0$ $A_2 = \frac{q}{Hk^2}$

când $x = 0$ $y' = 0$ $A_1 = 0$

Astfel ecuația axei optime a arcului încărcat cu sarcinile de mai sus (fig. 269) va fi:

$$y = \frac{q}{Hk^2}(\operatorname{ch} kx - 1) =$$

$$= \frac{q}{\gamma}\left(\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\gamma}{H}}\, x - 1\right) \qquad (118)$$

Această curbă poartă denumirea de *catenoida lui Legay*. Pentru determinarea valorii împingerii care intră în această ecuație, trebue să folosim poziția articulațiilor dela nașteri, deci când $x = \pm 0{,}5\, l$, $y = f$;

$$f = \frac{q}{\gamma}\left(\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\gamma}{H}\frac{l}{2}} - 1\right)$$

Pentru calcularea mai ușoară a ordonatelor, *Strassner* a transfor-

mat ecuaţia lui Legay. El a notat încărcarea la naştere cu q_s şi încărcarea la cheie cu q

$$\frac{q_s}{q} = m = \frac{q + \gamma f}{q}$$

de unde rezultă:

$$\frac{q}{\gamma} = \frac{f}{m-1}$$

şi

$$k^2 = \frac{\gamma}{H} = \frac{(m-1)\,q}{fH}.$$

Notând raportul $\frac{x}{0{,}5\,l}$ prin ξ, obţinem ecuaţia catenoidei după Strassner (118):

$$y = \frac{f}{m-1}(\operatorname{ch} k_1 \xi - 1) \qquad (119)$$

în care

$$k_1^2 = k\frac{l}{4} = \frac{m-1}{fH}\,q\,\frac{l^2}{4}.$$

Pentru uşurarea calculelor ordonatelor după această formulă se folosesc tabele speciale [1]).

2. Acţiunea încărcării uniform distribuite, normală pe axa arcului

Acest caz de încărcare (fig. 270) se produce la baraje în arc supuse la presiunea apei. Luând, ca şi în primul caz, un element al arcului de lungime ds şi considerându-l sub acţiunea încărcării q şi a două eforturi normale N şi $N + dN$, admiţând că $M = Q = 0$, obţinem din condiţiile de echilibru ecuaţia:

$$N\frac{d\varphi}{2} + (N + dN)\frac{d\varphi}{2} - q\,ds = 0$$

sau

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}} = \frac{q}{N}.$$

Din condiţia de echilibru faţă de centrul de curbură, urmează că

$$N\,\rho = (N + dN)\,\rho = 0$$

sau

$$\rho\,dN = 0,$$

Deoarece ρ nu poate fi egal cu zero, rezultă că dN trebue să fie egal cu zero, ceea ce arată că sub o astfel de încărcare, valoarea forţei axiale în toate secţiunile rămâne constantă:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{q}{N} = \text{constant} \qquad (120)$$

---

[1]) **Notă.** *Kamenţev şi Ducinscki*, „Poduri cu arce încastrate" — ediţia 1928 — tabela V pag. 60.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare în cazul încărcării unui arc cu sarcini uniform disiribuite, îndreptate radial, axa optimă a arcului este un cerc.

Curbele teoretice indicate mai sus au la bază o variaţie regulată a încărcării, ceea ce rareori se întâmplă în realitate; de aceea aceste curbe dau numai o primă aproximaţie la determinarea axei arcului.

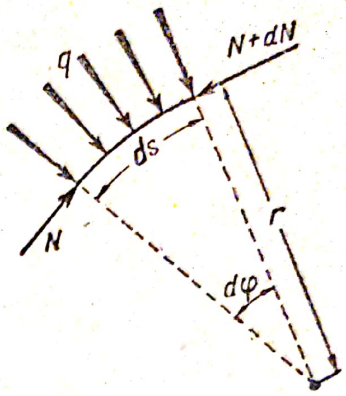


Fig. 270

Construind o astfel de axă, trebue să o calculăm pentru încărcarea reală şi să construim pentru ea curba funiculară care trece prin cele trei articulaţii. Această curbă va reprezenta curba axei arcului pe care o căutăm.

Dacă vor rezulta diferenţe prea mari între curba obţinută şi curba iniţială luată drept axă a arcului, atunci considerând curba funiculară drept o nouă axă a arcului, trebue să refacem calculul valorilor sarcinilor, construind cu ele o altă curbă funiculară, care va da poziţia destul de precisă a axei arcului cu trei articulaţii.

Alegerea axei arcului în cazul unei încărcări mobile constitue o problemă mai dificilă, întru cât deplasarea sarcinilor de-a-lungul arcului modifică simţitor forma curbei de presiune. Când arcul este încărcat cu sarcini mobile, trebue să căutăm ca devierea curbelor de presiune dela axa arcului să nu provoace solicitări în secţiunile arcului, care ar depăşi solicitările admisibile pentru materialul din care se va construi arcul (de exemplu pentru bolţile de zidărie, curba de presiune trebue să treacă prin sâmburele central al secţiunii).

In aceste cazuri, alegerea axei arcului se face pe baza următoarelor considerente. Alegând axa arcului după curba funiculară corespunzătoare încărcării permanente, se construeşte curba de presiune pentru încărcarea permanentă, acţionând pe toată lungimea arcului şi pentru încărcarea mobilă care acţionează numai pe o singură jumătate a arcului (fig. 271).

Când jumătatea arcului este încărcată cu sarcini mobile, curba funiculară va avea cea mai mare abatere faţă de axă, ridicându-se deasupra ei în jumătatea încărcată şi coborînd mai jos de axă în cealaltă jumătate. Dacă se încarcă cealaltă jumătate a arcului, conturul curbei funiculare va fi antisimetric faţă de primul contur. Este evident că pentru a obţine deviaţia minimă a curbelor funiculare faţă de axa arcului, axa trebue să treacă

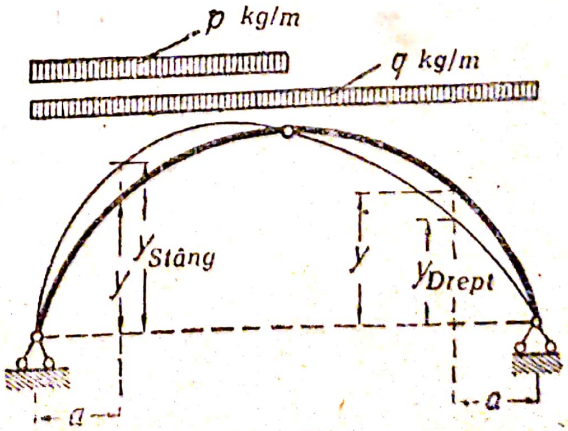


Fig. 271

la jumătatea distanţelor între curbe. Aceasta se obţine calculând ca ordonate pentru aceasta curbă, mediile aritmetice ale ordonatelor curbelor funiculare, obţinute prin încărcarea separată a jumătăţii din dreapta şi din stânga arcului; prin urmare ordonata axei se va exprima prin:

$$y = \frac{1}{2} (y_{st} + y_{dr})$$

CAPITOLUL 12

ARCE CU ZĂBRELE

§ 61. Arce cu zăbrele cu trei articulaţii

Arcele cu zăbrele au aceleaşi proprietăţi ca şi grinzile cu zăbrele, însă se deosebesc de acestea prin aceea că mai au în plus *împingeri* orizontale.

Necesitatea de a supraînălţa arcele cu zăbrele implică forma curbă sau după o linie frântă a tălpilor inferioare.

Pleoştirea arcelor variază în raport cu condiţiile locale, în limite destul de largi, dela $^1/_4$ până la $^1/_{15}$ din deschidere. Talpa superioară primeşte diferite conture, în raport cu scopul construcţiei sau din consideraţiuni estetice.

Formele tipice ale arcelor cu zăbrele sunt:

1. *Arce cu talpa superioară dreaptă.* Asemenea arce (fig. 272 a) se construesc exclusiv pentru poduri care au calea la partea superioară.

Înălţimea acestor arce variază in mod accentuat dela mijlocul deschiderii către reazime (naşteri), ceea ce influenţează defavorabil distribuţia eforturilor în tălpile arcelor (§ 68).

2. *Arce cu tălpi paralele.* La aceste arce ambele tălpi sunt trasate după curbe concentrice (fig. 272 b). Aceste arce pot fi cu calea sus, susţinută prin montanţi sau cu calea jos, suspendată cu tiranţi. Din consideraţiuni estetice aceste arce se fac mai des cu calea sus.

3. *Arce curbe,* cu înălţimea variabilă, la care talpa inferioară şi talpa superioară sunt curbe, având însă centre de curbură diferite. Talpa superioară poate avea curbura mai mică (fig. 272 c), în care caz înălţimea arcului creşte către reazime (naşteri) iar extremităţile arcului devin mai groase. Asemenea arce cu zăbrele se întrebuinţează curent pentru podurile cu calea jos. Uneori talpa superioară se trasează după o curbură mai mare decât talpa inferioară (fig. 272 d), astfel încât înălţimea arcului descreşte în spre reazime, arcul luând forma unei seceri. Această formă se pretează însă mai bine la arce cu două articulaţii.

4. *Ferme* care servesc la construcţii de acoperişuri, din care cauză talpa lor superioară are forme impuse de conturul construcţiei din care fac parte.

Arcele cu zăbrele, având conturul tălpii superioare după o linie frântă, sunt apropiate de cadrele cu zăbrele, care diferă de arce printr'o pleoştire mai mare (fig. 273).

Scanned with OKEN Scanner

Zăbrelele la arce ca şi grinzile cu zăbrele se fac ori în sistem dreptunghiular, ori în sistem triunghiular, însă în ambele cazuri se aplică sistemul simplu, întru cât faţă de înălţimea obişnuită a arcului $^1/_{20}$ şi $^1/_{40}$ din deschidere, lungimea panourilor care rezultă este relativ mică.

La arcele cu zăbrele, articulaţiile pot fi introduse atât în axa uneia din tălpi cât şi în axa arcului, adică la jumătatea înălţimii dintre tălpi.

In raport cu poziţia articulaţiilor se modifică şi modul cum lucrează arcul propriu zis.

După cum ştie, într'un arc poziţia articulaţiilor determină poziţia curbei presiunilor (§ 54). Când articulaţiile sunt aşezate în axa uneia dintre tălpi, curba de presiune se va apropia de această talpă, rezultatul fiind că această talpă se va încărca mai mult (vezi § 64) putând chiar să preia toată compresiunea, transformându-se astfel într'un arc cu secţiune plină.

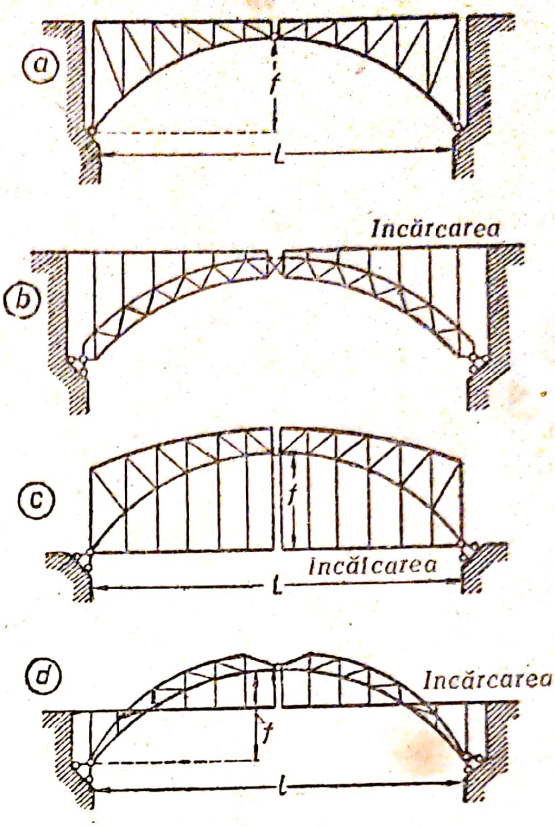


Fig. 272

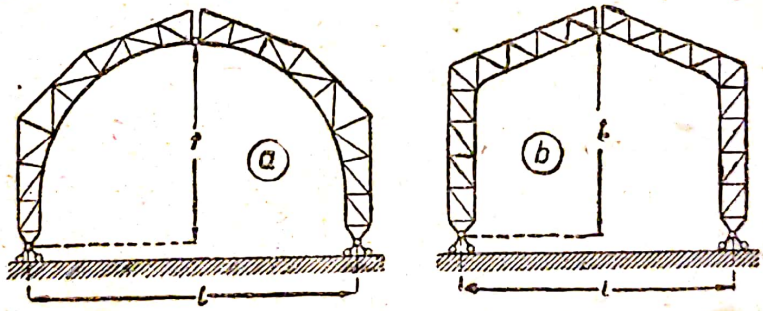


Fig. 273

Scoaterea curbei de presiune din axa acestei tălpi se poate face prin mutarea articulaţiilor, plasându-le fie în axele tălpilor, fie chiar în axa arcului propriu zis.

§ 62. Determinarea eforturilor din condiţiile echilibrului static

Deoarece înlocuirea unui arc cu secţiune plină printr'un arc cu zăbrele nu schimbă comportarea în genere a arcului considerat ca un singur tot, procedeele pentru determinarea mărimii reacţiunilor şi construcţia liniilor de influenţă pentru ele rămân aceleaşi ca şi la arcele cu secţiune plină.

După ce se vor determina valorile componentelor orizontale şi verticale ale reacţiunilor, calculul eforturilor interioare ale arcelor cu

Scanned with OKEN Scanner

zăbrele se poate face atât pe cale analitică, aplicând metodele staticii şi cinematicii, cât şi pe cale grafică, întrebuinţând epura (diagrama) lui Cremona.

Nu ne vom opri asupra procedeelor de construcţie a epurei lui Cremona, aplicate la arcele cu zăbrele, deoarece ele rămân aceleaşi ca şi la grinzile cu zăbrele şi trecem la expunerea procedeelor analitice pentru determinarea eforturilor şi construirea liniilor de influenţă după aceste procedee.

Metoda punctelor momentelor

După cum se ştie, pentru determinarea efortului prin metoda punctelor momentelor trebue să ducem o secţiune prin bara considerată în aşa fel, încât celelalte bare secţionate să se intersecteze într'un singur punct, care se consideră punctul momentelor. Faţă de acest punct, se formează o ecuaţie de echilibru, din care se determină efortul căutat.

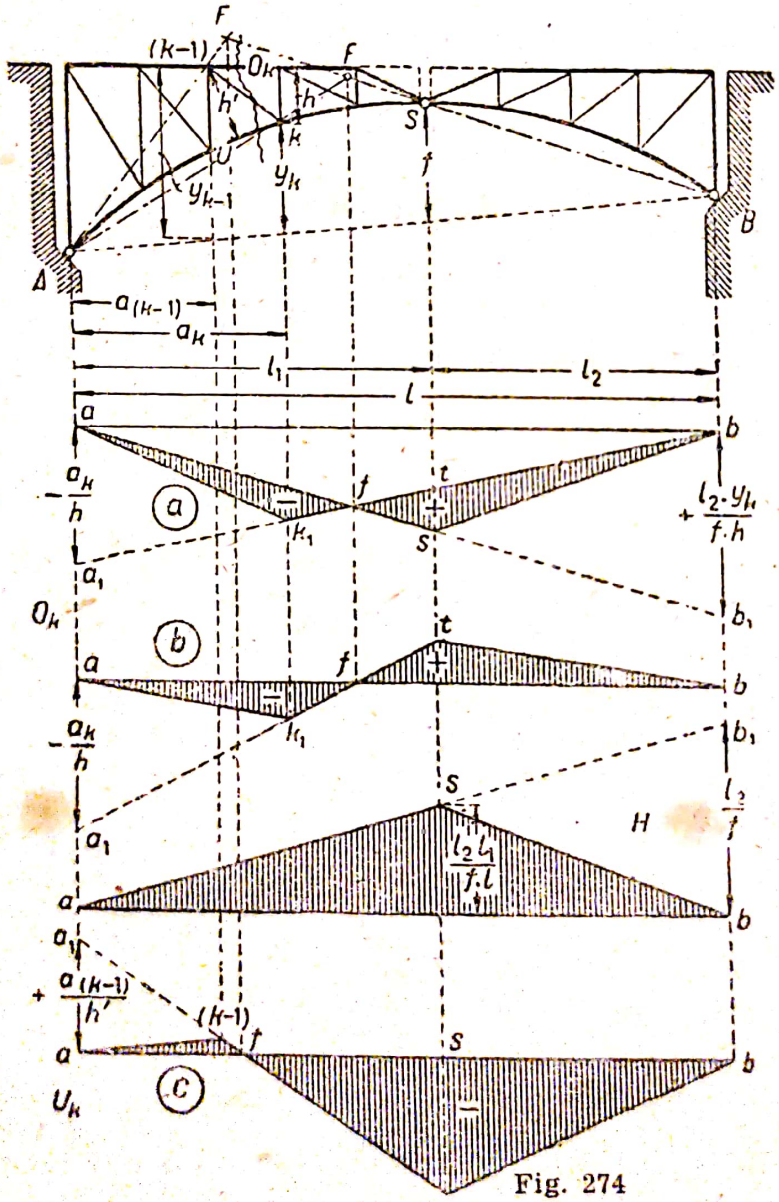


Fig. 274

Pentru oricare element din talpă, de exemplu al tălpii superioare, această ecuaţie de echilibru se va scrie astfel (fig. 274) :

$$O_k h + M_k^0 - H y_k = 0$$

în care M_k^0 este momentul față de punctul K al tuturor forțelor exterioare, ce se găsesc în stânga secțiunii, inclusiv componenta verticală a reacțiunii, însă exclusiv împingerea;

h — brațul de pârghie al efortului din bară față de același punct;

y_k — brațul de pârghie al împingerii H în raport cu același punct, această distanță în cazul nașterilor (reazimelor) denivelate, fiind determinată prin distanța pe verticală dela punctul momentelor până la linia articulațiilor dela nașteri.

Rezolvând această ecuație în raport cu efortul ce căutăm, vom obține:

$$O_k = -\left(\frac{M_k^0}{h} - H\frac{y_k}{h}\right) = O_k^0 + H\frac{y}{h} \qquad (121)$$

După cum se vede, efortul căutat se compune din efortul O_k^0, care se obține pentru aceeași bară considerând arcul cu zăbrele ca o grindă cu zăbrele de aceeași deschidere și din efortul aceleiași bare, dat de împingere.

Față de aceasta, linia de influență pentru efortul elementului din talpă (fig. 274 a), pentru poziția sarcinii unitare în dreapta secțiunii, se determină prin ecuația:

$$O_k = -\frac{1}{h}(V_a a_k - H y_k)$$

și se construește cu diferența ordonatelor liniei de influență $ak_1 b$ a elementului din talpa unei grinzi cu zăbrele și a liniei de influență a împingerii asb, modificate în raportul $\frac{y_k}{h}$

O simplificare în construcția liniei de influență se obține prin determinarea punctului zero f.

Pentru poziția sarcinii unitare în dreptul punctului zero

$$O_k = -\frac{1}{h}(V_a a_k - H y_k) = 0$$

și

$$V_a a_k - H y_k = 0$$

Această relație permite să se utilizeze, pentru a găsi poziția punctului zero f, aceleași procedee care s'au aplicat pentru determinarea punctului zero al liniei de influență pentru momentul M_k în secțiunea unui arc cu secțiune plină (§ 56). Pentru a găsi punctul F, a cărui proiecție este punctul f, se duc dreptele BS și AF; aceasta din urmă se trasează prin punctul k în raport cu care se compune ecuația momentelor în vederea determinării efortului căutat (fig. 274 b).

Deoarece ordonata $\frac{a_k}{h}$ din dreptul reazimului din stânga liniei de influență totală nu depinde de valoarea împingerii, la transformarea liniei de influență, această ordonată rămâne invariabilă. Prin vârful acestei ordonate a_1 și prin punctul f se determină direcția ramurii din dreapta liniei de influență transformată, pe care se proiectează punc-

tele extreme ale dreptei k_1 și t. Conturul definitiv al liniei de influență se trasează prin linia frântă $ak_1\ tb$.

In fig. 274 c, este reprezentată linia de influență construită prin același procedeu pentru bara U_k.

Din aceste construcții rezultă că *liniile de influență ale elementelor din talpă ale arcului sunt poligoane și pot avea unul sau două semne în funcție de poziția punctului zero f.*

Semnul se stabilește de ecuația (121) a efortului. In partea unde ordonatele efortului din grinda simplă cu zăbrele sunt mai mari decât cele ale liniei de influență provenite din efectul împingerii, se păstrează semnul efortului din grinda simplă.

Procedeul de calcul expus mai sus și construirea liniei de influență rămân valabile pentru orice bară a arcului cu zăbrele, care permite alcătuirea ecuației de echilibru a momentelor.

De exemplu, determinarea efortului în diagonala D a arcului cu zăbrele reprezentat în fig. 275 poate fi făcută cu ajutorul ecuației momentelor luate în raport cu punctul momentelor K, stabilit prin intersecția tălpilor. In general ecuația de echilibru se va scrie :

$$-Dr + M_k^0 - Hy_k = 0,$$

astfel încât efortul din diagonală va fi :

$$D = \frac{1}{r}\left(M_k^0 - Hy_k\right) = D^0 - H\frac{y_k}{r} \qquad (122)$$

După cum era și de așteptat, acest efort se compune din efortul D^0 al unei grinzi simple cu zăbrele și din efortul provenit din acțiunea împingerii.

Când sarcina unitară se găsește în dreapta secțiunii, efortul din diagonală se determină prin expresia :

$$D = \frac{1}{r}\left(V_a.\, a_k - Hy_k\right)$$

Folosind pentru construirea liniei de influență totale punctul zero f care satisface relația

$$\left(V_a.\, a_k - Hy_k\right) = 0$$

determinăm acest punct ca fiind proiecția punctului de intersecție F al dreptelor BS și AK.

Poziția ramurii din dreapta liniei de influență totală se determină prin punctul zero f și vârful ordonatei $\frac{a_k}{r}$ care se așază în dreptul reazimului din stânga. Ramura din stânga se determină prin punctul zero din dreptul reazimului din stânga și prin punctul k_1 care reprezintă intersecția ramurii din dreapta cu verticala coborîtă din punctul momentelor.

Intre noduri, linia de influență va varia după dreapta $c_{n-1}\ c_n$ și în sfârșit la limitele arcului dintre articulațiile B și S ea se va modifica după dreapta $t\ b$.

Față de semnul ecuației (122) al cărei prim membru este pozitiv, linia de influență totală în porțiunea cf va avea semnul plus, iar în

Scanned with OKEN Scanner

celelalte porţiuni semnele se fixează în raport cu poziţia porţiunii respective faţă de axa absciselor.

Din cele expuse rezultă că, conturul liniilor de influenţă ale zăbrelelor arcului depinde de poziţia punctului de momente K faţă de articulaţia S. In raport cu poziţia acestor două puncte se schimbă şi poziţia punctului zero al liniei de influenţă precum şi conturul liniei de influenţă, unele porţiuni putând să-şi schimbe semnul, transformându-se chiar în zero, după cum s'a demonstrat în exemplele de calculul arcelor (vezi § 64).

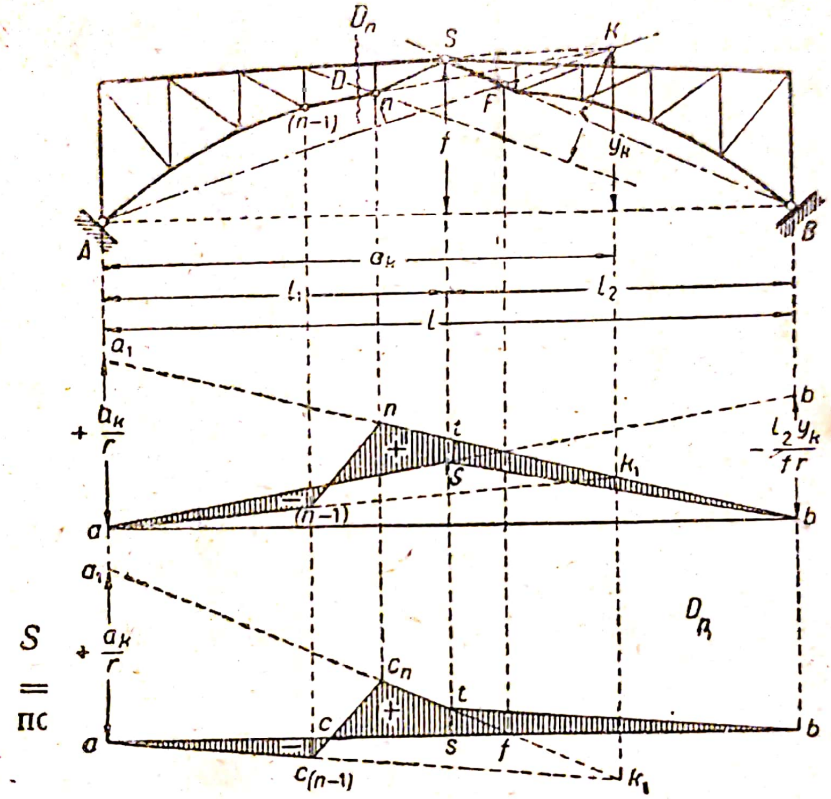


Fig. 275

Metoda proiecţiilor

Pentru determinarea eforturilor din zăbrelele arcelor cu tălpi paralele (fig. 276) se pot folosi condiţiile proiecţiilor pe axa normală pe direcţia tălpilor secţionate.

Admiţând unghiul de înclinare al tălpilor faţă de orizontală egal cu β, înclinarea diagonalei faţă de direcţia tălpii egală cu φ şi încărcarea după verticală, putem scrie ecuaţia de echilibru în forma următoare (fig. 276):

$$-D \sin \varphi + (V_a + H \operatorname{tg} \alpha) \cos \beta - \sum_0^x P \cos \beta - H \sin \beta = 0$$

având în vedere că

$$\left(V_a - \sum_0^x P\right) \cos \beta = Q_x^0 \cos \beta$$

obținem :

$$D = \frac{\cos \beta}{\sin \varphi} \left[Q^0 - H (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) \right].$$

Să trecem la construirea liniei de influență a efortului din această diagonală. In cazul când sarcina unitară se găsește în dreapta secțiunii, ecuația liniei de influență se va scrie astfel :

$$D = \frac{\cos \beta}{\sin \varphi} \left[V_a^0 - H (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) \right]$$

Din această ecuație rezultă că ordonatele liniei de influență totală se determină prin diferența ordonatelor liniei de influență V_a^0 și linia de influență a împingerii

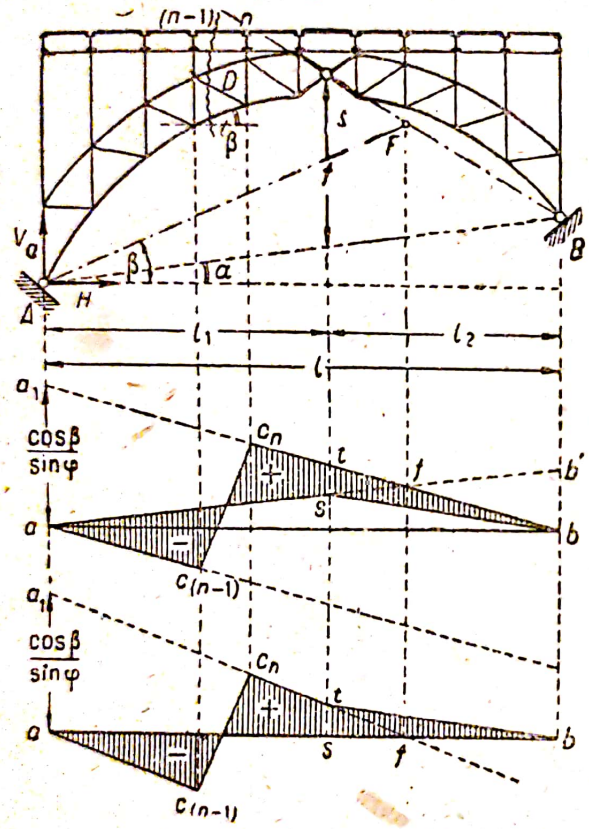


Fig. 276

$$H (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)$$

transformate în raportul

$$\cos \beta : \sin \varphi$$

Deoarece ecuația liniei de influență pentru efortul din această diagonală diferă de ecuația liniei de influență a forței tăietoare Q_k în arc (§ 57) numai prin factorul constant $\frac{1}{\sin \varphi}$, se pot aplica pentru construirea liniei de influență a efortului din diagonală, aceleași procedee care s'au întrebuințat (§ 57) pentru linia de influență totală a forței tăietoare din secțiunea arcului.

Pe baza acestor procedee, poziția punctului zero f al liniei de influență se determină prin proiecția punctului F ce se găsește la intersecția dreptei BS cu dreapta AF, dusă paralel cu direcția tălpilor sub un unghiu de înclinare β față de orizontală.

Ramura din dreapta $a_1 f$ a liniei de influență totală se determină prin poziția punctului zero f și prin vârful ordonatei egale cu $\frac{\cos \beta}{\sin \varphi}$, ce se găsește în dreptul reazimului din stânga.

Ramura din stânga acestei linii de influență este paralelă cu aceea din dreapta și trece prin punctul a din dreptul reazimului din stânga. In partea din dreapta arcului, între articulațiile S și B, linia de influență variază după dreapta tb.

Probleme și exerciții

80. Să se determine valorile eforturilor în barele U_{31} și D'_{33} ale arcului cu

zăbrele (fig. 277) care se găsește sub acțiunea unei sarcini orizontale uniforme T kg/m repartizată pe jumătatea din deschiderea arcului.

81. Să se compare valoarea efortului din diagonala D_3 cu aceea din diagonala simetrică D'_3 a arcului reprezentat în fig. 278, încărcat cu o sarcină uniform distribuită q kg/m pe jumătatea din stânga arcului.

82. Să se demonstreze dacă liniile de influență ale barelor D_1, D_2, D_3 și D_5 ale arcului cu zăbrele, din fig. 278, sunt corect construite.

Indicație. Construcția liniilor de influență urmează să se facă folosind punctele zero. Trebue să ne amintim că prin punctele zero trece ramura din dreapta liniei de influență a efortului grinzii cu zăbrele simplă.

83. In fig. 279 este reprezentată construcția liniei de influență a efortului din elementele tălpii unui arc parabolic. Să se determine pentru care din barele arcului este construită această linie de influență și să se afle scara ei.

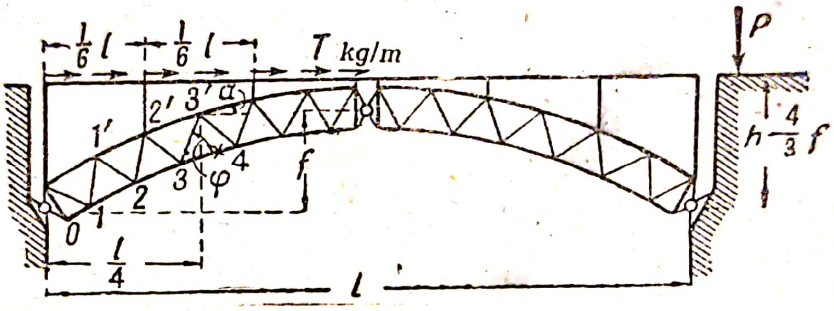


Fig. 277

Indicație. Răspunsul poate fi dat examinând conturul liniilor de influență caracteristice pentru eforturile din tălpi.

Ecuația curbei parabolice a tălpii inferioare față de linia articulațiilor dela nașteri este :

$$y = \frac{4}{l^2} fx\,(l-x)$$

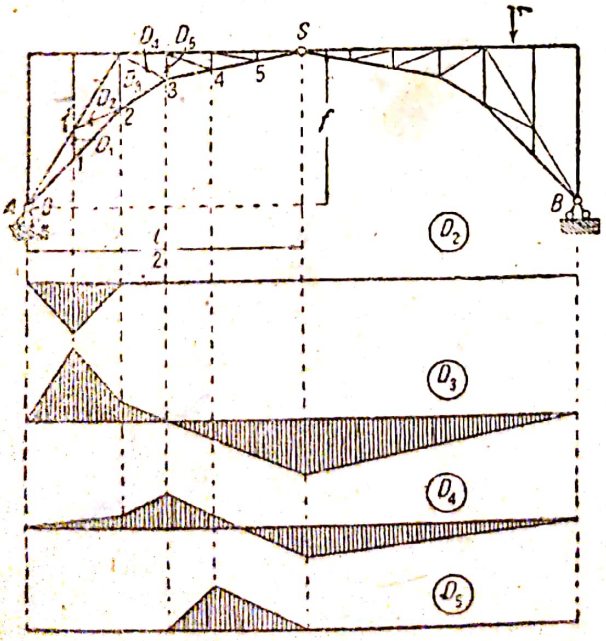


Fig. 278

Intrebare. Dacă linia de influență se referă la efortul unuia din elementele tălpii superioare, se poate stabili din datele problemei suma suprafețelor liniei de influență ?

Intrebare. Să se determine analitic poziția punctului zero al liniei de influență.

84. Să se construiască linia de influență a efortului din barele,

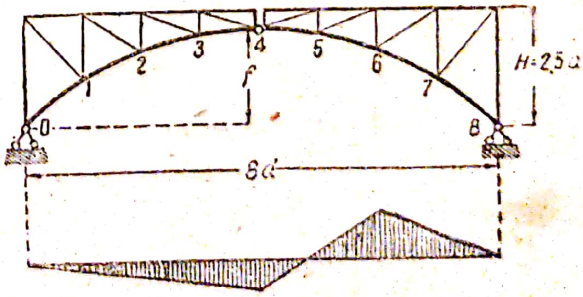


Fig. 279

care sunt notate, ale arcului cu zăbrele cu trei articulații (fig. 280).

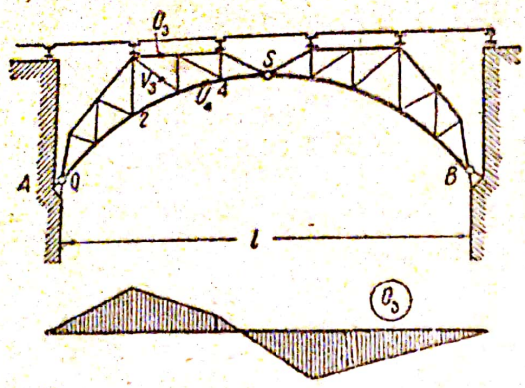


Fig. 280

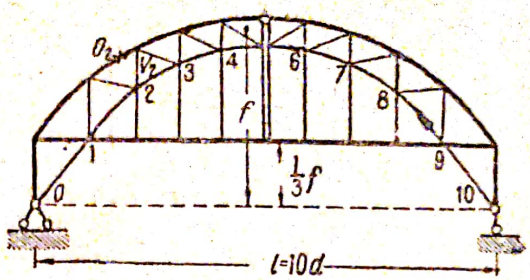


Fig. 281

Indicaţie. Particularitatea acestui sistem este transmiterea eforturilor numai la anumite noduri, ceea ce, în consecinţă, impune rectificarea conturului liniei de influenţă.

85. Să se arate cum influenţează asupra valorii efortului din barele arcului cu zăbrele (fig. 281) mutarea tirantului de pe linia 0-10 la nivelul 1-9.

Indicaţii. Comparaţia trebue să se facă după contururile liniilor de influenţă, construindu-le în ipoteza că tirantul este în poziţia 1-9 şi la nivelul articulaţiilor de reazim. Poziţia tirantului la nivelul articulaţiilor de reazim este indicată prin linia punctată.

Liniile de influenţă trebuesc construite după punctele lor zero în ambele cazuri, ţinând seama de bara dela care trebue să pornim pentru determinarea poziţiei punctelor zero ale liniilor de influenţă.

Se recomandă să se facă comparaţia indicată pentru barele O_2 şi V_2.

Intrebare. Există în compunerea arcului cu zăbrele elemente din talpă care lucrează la fel cu elementele din talpă ale unei grinzi cu zăbrele de aceeaşi deschidere ?

86. Să se construiască linia de influenţă a diagonalei din panoul dela mijlocul arcului cu zăbrele (fig. 281), presupunând că tălpile arcului în acest punct sunt paralele şi orizontale.

§ 63. Determinarea eforturilor după metodele cinematicii

La arcele cu zăbrele simple, liniile de influenţă se pot construi uşor şi explicit cu ajutorul centrelor instantanee de rotaţie.

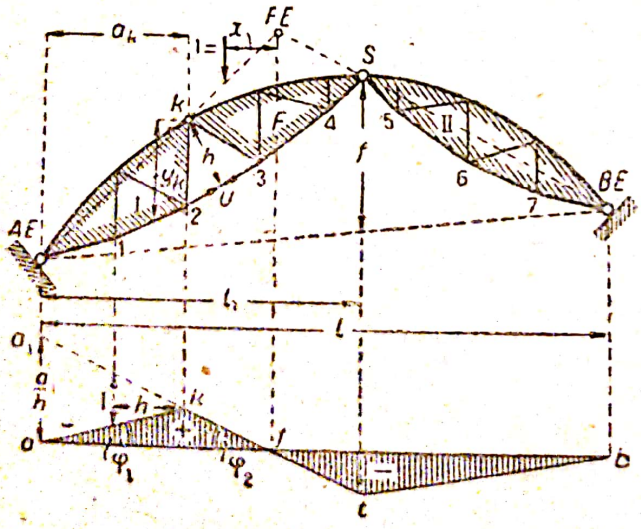


Fig. 282

Arcul propriu zis cu trei articulaţii determină, prin articulaţiile lui, poziţia centrelor instantanee de rotaţie în raport cu deplasările virtuale ale părţilor lui. Separând din compunerea arcului una din bare, îl transformăm într'un mecanism mobil, iar centrele instantanee de rotaţie ale poziţiilor arcului se determină destul de uşor din condiţiile deplasărilor virtuale ale întregului sistem considerat drept un mecanism.

Dacă se cunosc poziţiile centrelor instantanee, atunci liniile de influenţă pot fi construite uşor, ca o epură a deplasărilor virtuale.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a explica cele expuse mai sus, să analizăm următoarele exemple :

Eliminând unul din elementele tălpii arcului (fig. 282), îl vom transforma intr'un mecanism alcătuit din trei elemente I, F și II, legate între ele prin articulațiile-centre de rotație K și S și legate de pământ prin centrele articulate AE și BE.

Centrul instantaneu al deplasării virtuale a elementului F față de pământul E se va găsi la intersecția dreptelor care trec prin centrele A, E și K și prin centrele B, E și S, deci în punctul FE.

Considerând pământul ca fiind axa absciselor în epura deplasărilor virtuale, proiectăm pe ea centrele instantanee AE, BE și FE și obținem astfel punctele a, b și f, prin care trebue să treacă dreptele care caracterizează epura deplasărilor virtuale. Pentru construirea epurei deplasărilor virtuale, ducem prin punctul f o dreaptă oarecare $a_1 f$ care trebue să caracterizeze variația epurei pentru elementul F. Proiectând pe ea articulațiile K și S, obținem punctele k și t prin care trebue să treacă dreptele care determină epura de deplasare pentru elementele I și II. Poziția acestor două drepte este fixată prin punctele a și k, precum și prin punctele și t și b. Epura completă se va trasa prin poligonul $aktb$.

Pentru ca să trecem dela epura deplasărilor virtuale la linia de influență, trebue să stabilim scara și semnul care se determină din ecuația lucrului virtual, care în cazul aplicării sarcinii unitare în elementul F, la distanța x dela verticala punctului FE va fi (§ 35)

$$-U\delta + Py = 0$$

Exprimând deplasarea δ în funcție de unghiurile φ_1 și φ_2 ale deplasării virtuale a elementelor I și F obținem

$$U = P\frac{y}{h\ (\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2)}$$

Dreapta determinată de această ecuație trece prin punctul f. Scara ordonatelor (§ 35) liniei ei de influență este segmentul între dreptele ak și $a_1 f$ (fig. 282) pe verticala dusă la distanța h dela punctul k. Semnul liniei de influență se determină prin semnul ecuației efortului, care trebue să fie raportat la ordonata din dreptul sarcinii P. In cazul de față semnul ordonatei y este pozitiv, deci în partea din stânga liniei de influență, ordonatele care se găsesc deasupra liniei a-b sunt pozitive.

In fig. 283 este reprezentată construcția liniei de influență a diagonalei, pentru cazul când tălpile arcului cu zăbrele sunt paralele.

Suprimând bara diagonalei și înlocuind-o cu un efort, transformăm sietemul într'un mecanism mobil. In acest caz centrul instantaneu al deplasării virtuale a elementului I față de elementul F se găsește la infinit, deoarece barele III și IV sunt paralele. De aceea, centrul instantaneu necunoscut al deplasării virtuale a elementului F față de pământ E, se va găsi pe linia IE-FE care trece prin centrul IE, fiind paralelă cu liniile III și IV. De asemenea acest centru trebue să se găsească și pe linia BS ce trece prin centrele instantanee II E și F II, deci poziția lui va fi în punctul FE format prin intersecția acestor drepte.

Scanned with OKEN Scanner

Proiectând pe axa absciselor centrele I E, II E și FE obținem punctele $e1$, $e2$ și fe, prin care trebue să treacă dreptele respective care delimitează epura deplasărilor virtuale. Deoarece centrul instantaneu al deplasărilor virtuale ale elementelor I și F se găsește în infinit, dreapta $a2$, care determină epura deplasărilor virtuale pentru elementul I, trebue să fie paralelă cu dreapta a_1-fe. Prin urmare epura deplasărilor virtuale se va trasa prin poligonul $a2\ 3f_2b$.

Pentru ca să trecem dela epură la linia de influență, determinăm scara liniei de influență și semnele elementelor ei, în care scop alcătuim expresia lucrului virtual al elementului din stânga, în ipoteza că sarcina unitară se găsește în elementul I.

Intru cât pentru direcția dată a efortului din diagonala D, elementul I va căuta să coboare în jos, ecuația lucrului virtual se va scrie astfel:

$$-D \cdot \delta + Py = 0$$

de unde

$$D = P\,\frac{y}{\delta}$$

Din cauza paralelismului barelor III și IV, elementul I trebue să se deplaseze paralel cu elementul F. Dacă deplasarea verticală a elementului I față de F este egală cu unitatea, atunci valoarea deformației δ a diagonalei (fig. 283 a) se determină prin expresia:

$$\delta = 1 \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\beta}$$

Factorul

$$\frac{\cos\beta}{\sin\varphi} = \frac{1}{\delta}$$

determină scara liniei de influență.

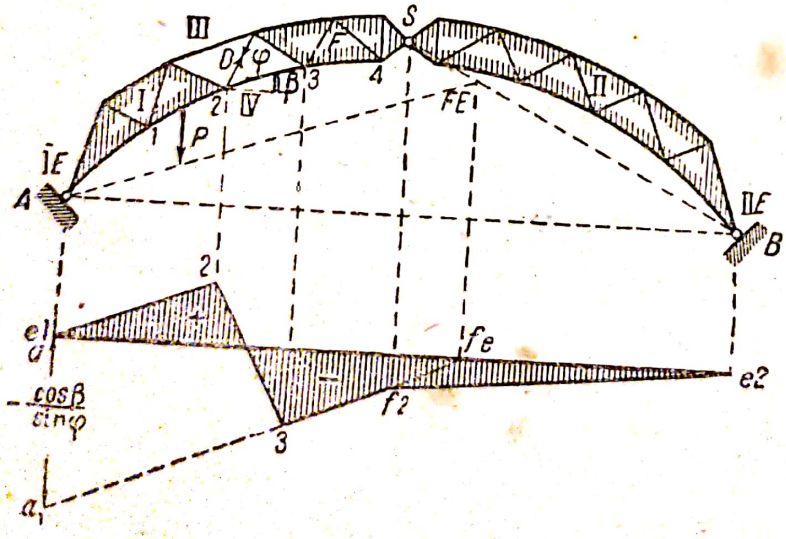


Fig. 283

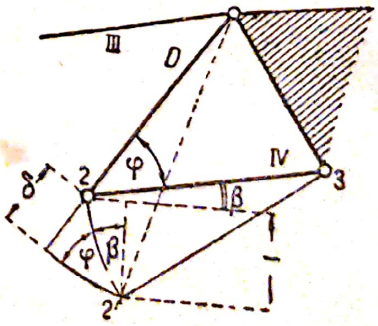


Fig. 283a

Semnul liniei de influență în dreptul elementului I, în conformitate cu ecuația lucrului mecanic, trebue să fie pozitiv.

Procedeul de construire a liniilor de influență ale zăbrelelor unui

Scanned with OKEN Scanner

arc cu ajutorul centrelor instantanee, expus mai sus, lămurește pe deplin rolul punctelor zero f ale liniilor de influență totale.

§ 64. Influența conturului arcelor cu zăbrele asupra valorii și semnului efortului

In paragrafele precedente s'a atras atenția asupra faptului că conturul liniilor de influență și semnele lor se schimbă în raport cu poziția reciprocă a punctului de moment și articulației intermediare, astfel că la aceeași pleoștire și deschidere a arcelor cu zăbrele, eforturile și liniile de influență ale barelor acestor arce pot să difere ca semn și mult ca valoare.

Pentru a caracteriza această influență, să comparăm eforturile și liniile lor de influență pentru următoarele contururi tipice: arc cu talpa inferioară parabolică și arc cu talpa superioară dreaptă, considerând articulațiile în axa acestor tălpi.

a) Arc cu talpa parabolică

In fig. 284 este reprezentat un asemenea arc cu talpa inferioară după o parabolă, a cărei ecuație este:

$$y = \frac{4f}{l^2} = x\ (l - x)$$

Linia de influență pentru toate elementele din talpa acestui arc cu zăbrele se vor construi după ecuația generală, în care:

$$\text{efortul din talpă} = \pm \frac{1}{h}(V_a\ a_k - Hy_k)$$

h — fiind brațul de pârghie al efortului față de punctul momentelor, a_k și y_k — brațele de pârghie ale componentelor reacțiunii față de același punct.

In fig. 284, cu ajutorul acestei ecuații și folosind punctele zero f, sunt construite liniile de influență ale barei O_3 și U_2 cos α.

Același tip de ecuație a fost utilizat și pentru construirea liniilor de influență ale zăbrelelor.

De exemplu linia de influență a diagonalei D_4 se determină prin ecuația

$$D_4 = \frac{l}{r}(V_a\ a_k - Hh_o)$$

Linia de influență a montantului V_3 se determină prin ecuația:

$$V_3 = -\frac{\sin\varphi}{r}(V_a\ a_k - Hh_o) = D_4 \sin\varphi$$

Ambele linii de influență sunt reprezentate în fig. 284.

Scanned with OKEN Scanner

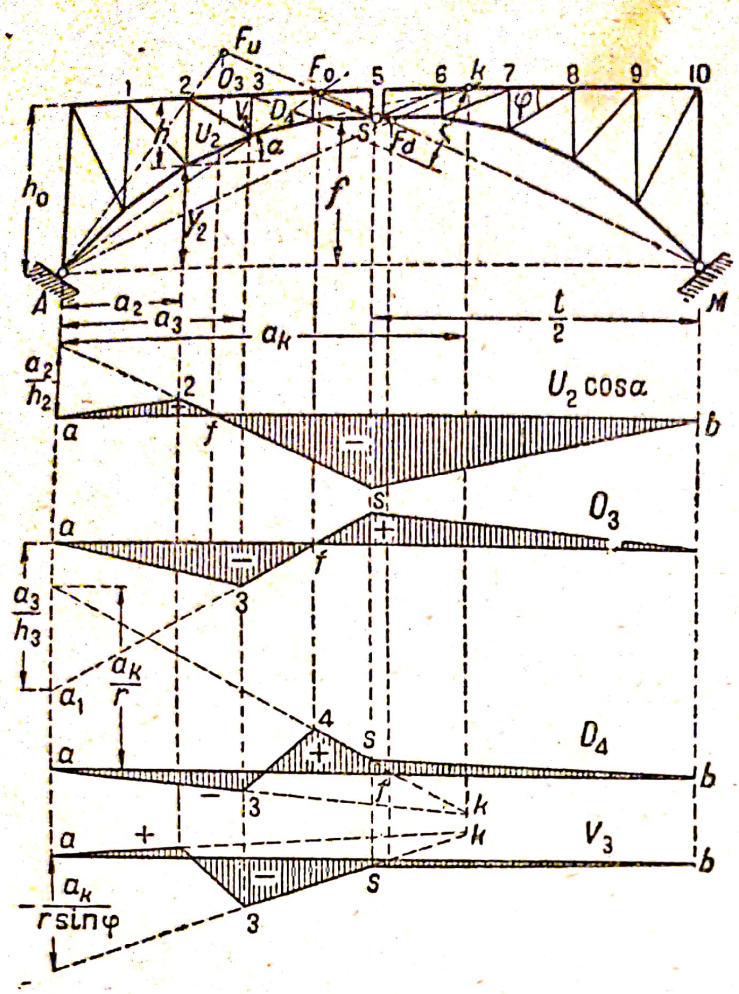


Fig. 284

Examinând aceste linii de influenţă se vede că eforturile tuturor barelor au două semne. Dar întru cât după conturul tălpilor acestui arc cu zăbrele, punctul F de intersecţie a dreptelor BS şi AK, care fac parte din liniile de influenţă ale tălpilor, se va găsi întotdeauna între articulaţiile A şi S, aceste linii de influenţă vor fi compuse din două triunghiuri. Liniile de influenţă ale zăbrelelor fiind însă în funcţie de poziţia punctului momentelor K, vor fi alcătuite din două sau trei părţi.

Pentru ca să determinăm raportul între valorile negative şi pozitive ale eforturilor, posibile în fiecare bară, presupunem că acest arc se găseşte sub acţiunea unei *încărcări uniform distribuite* (q kg/m).

Când arcul întreg este încărcat cu această sarcină, componentele reacţiunii vor fi:

pe verticală

$$V_a = 0{,}5\ ql;$$

iar pe orizontală

$$H = \frac{M_s}{f} = \frac{ql^2}{8f}$$

Să demonstrăm că pentru încărcarea uniformă a arcului întreg, cu o sarcină uniform distribuită, tălpile superioare nu lucrează.

Intr'adevăr efortul într'un element oarecare al tălpii superioare se determină prin ecuaţia:

$$O_k = -\frac{1}{h_k}\left(\frac{1}{2}\,qla_k - \frac{1}{2}\,qa_k^2 - \frac{ql^2}{8f}\,y_k\right);$$

însă, deoarece conturul tălpii inferioare satisface relaţia

$$y_k = \frac{4\ f}{l^2}\ a_k\ (l - a_k)$$

după înlocuire vom obține:

$$O_k = -\frac{1}{h_k}\left[\frac{1}{2}\ qa_k\ (l-a_k) - \frac{1}{8}\frac{ql^2\ 4f}{f\ l^2}\cdot a_k\ (l-a_k)\right] = 0$$

De asemenea din condiția de echilibru al unui nod oarecare din talpa superioară în raport cu axa perpendiculară pe montant, rezultă că

$$-D_k \cos\varphi - O_k + O_{(k-1)} = 0.$$

Deoarece eforturile O_k și $O_{(k-1)}$ sunt egale cu zero, efortul diagonalei $D_k = 0$.

Faptul că efortul din talpa superioară este nul se explică prin aceea că curba de presiune din încărcarea uniform distribuită este o parabolă și pentru poziția articulațiilor în axa tălpii arcului — aceasta fiind trasată tot după o parabolă — curba se confundă cu această axă, din care cauză momentele forțelor exterioare față de nodurile acestei tălpi sunt egale cu zero.

Această particularitate rămâne valabilă pentru forma parabolică atât a tălpii superioare cât și a tălpii inferioare, însă nu se mai menține atunci când articulațiile nu se găsesc în axa tălpii trasate după parabolă.

De aci rezultă că *încărcarea uniform distribuită care solicită un arc cu zăbrele având o talpă parabolică și cu articulațiile dela naşteri și dela cheie introduse chiar în această talpă, nu provoacă niciun efort în elementele celeilalte tălpi. Aceeași încărcare nu va provoca de asemenea niciun efort în zăbrelele aceluiași arc, dacă acestea sunt alcătuite din diagonale și montanți.*

Deoarece eforturile din încărcarea uniform distribuită se determină prin produsul între încărcarea pe unitatea de lungime și suprafata liniei de influență, în arcele cu zăbrele cu talpa parabolică, suprafețele negative și pozitive ale liniilor de influență ale celeilalte tălpi și ale diagonalei sunt egale, ceea ce rezultă direct din condiția că eforturile în aceste elemente pentru o încărcare uniform distribuită sunt egale cu zero:

$$O_k = (\omega_1 - \omega_2)\ q = 0$$
$$D_k = q\ (\omega_1 - \omega_2) = 0$$

Montanții arcelor cu zăbrele având o talpă parabolică suportă solicitări numai în cazul când încărcarea uniform repartizată se transmite asupra tălpii care nu are o formă parabolică.

Aceasta rezultă direct din separarea nodului tălpii care nu are forma parabolică și alcătuirea ecuației de echilibru în raport cu axa montantului care ne dă:

$$V = qd,$$

adică efortul este egal cu valoarea încărcării asupra unui nod.

In ce privește efortul din barele tălpii parabolice a arcului, care se găsește sub acțiunea unei încărcări continue pe toată

lungimea ei, atât din condiția de echilibru a nodului care a fost separat din această talpă în raport cu axa orizontală cât și din expresia analitică a efortului și anume:

$$U \cos \alpha = \frac{1}{h}\left[M_k^0 - H\,(y_k + h)\right] = -H$$

rezultă de-a-dreptul că sub acțiunea unei încărcări uniform distribuite, proiecțiile eforturilor acestei tălpi pe axa orizontală sunt egale între ele și egale cu împingerea, iar eforturile din această talpă nu depind de conturul celeilalte tălpi, fiind în funcție numai de deschiderea și săgeata arcului.

b) Arc cu zăbrele cu talpa inferioară dreaptă

Un astfel de arc este reprezentat în fig. 285. Particularitatea conturului acestui arc constă în aceea că pentru toate barele, în afară de acelea ale tălpii inferioare, punctele momentelor se găsesc pe direcția tălpii inferioare, care trece prin articulația de reazim și aceea dela mijloc. De aceea pentru toate barele, punctul de intersecție al dreptei *BS* cu direcția liniei *AK*, care trece prin punctul momentelor, *se va găsi întotdeauna în articulația dela mijloc.*

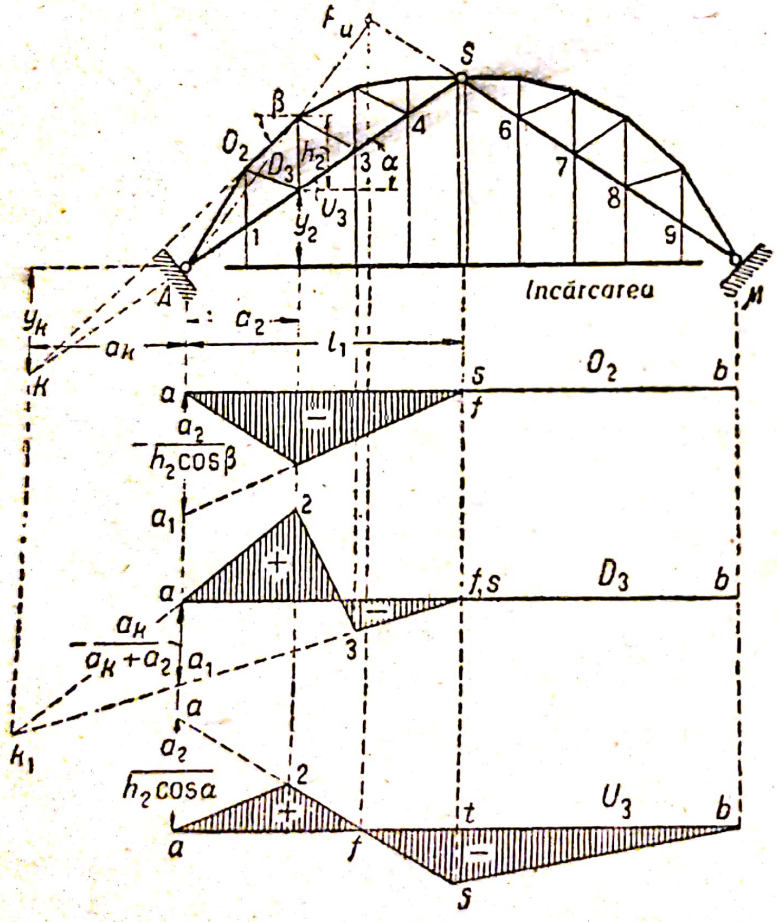


Fig. 285

Astfel la liniile de influență poziția punctului zero va coincide cu proiecția articulației dela mijloc, ceea ce implică egalarea cu zero a tuturor ordonatelor liniei de influență în jumătatea din dreapta arcului.

In fig. 285 sunt construite liniile tip de influență pentru elementul O_2 al tălpii superioare și al diagonalei D_3.

Linia de influență a barei O_2 se determină din ecuația:

$$O_2 \cos \beta = -\frac{1}{h_2}\,(V_a\, a_2 - H y_2)$$

Această linie de influență este extinsă până la articulația inter-

mediară și are forma *liniei de influență a efortului din talpa unei grinzi cu zăbrele* de deschidere l_1.

Linia de influență a diagonalei D_3 (a treia bară a sistemului cu zăbrele) se determină din ecuația momentelor față de punctul K (fig. 285).

$$D_3 = \frac{-1}{a_k + a_2} (V_a a_k - H y_k)$$

și este la fel ca și linia de influență a efortului din diagonala unei grinzi cu zăbrele având deschiderea l_1.

Pentru eforturile din elementele tălpii inferioare, liniile de influență se determină prin ecuația:

$$U_3 \cos \alpha = -\frac{1}{h_2} \left[V_a a_2 - H (y_2 + h_2) \right]$$

și se extind asupra ambelor jumătăți ale arcului cu zăbrele (fig. 285).

Dacă talpa superioară a arcului de acest tip este trasată după o curbă parabolică, efortul din talpa inferioară dat de acțiunea sarcinilor uniform distribuite este egal cu zero.

Concluzii

In general, contururile la arcele cu zăbrele sunt de obiceiu cu talpa superioară după o dreaptă (fig. 284) și cu talpa inferioară după o curbă parabolică, ceea ce corespunde la o repartizare mai uniformă a eforturilor între tălpi. Când talpa superioară este trasată după o dreaptă orizontală, ea va lucra aproape în mod exclusiv la sarcini temporare.

Fig. 286

Influența esențială asupra distribuirii eforturilor între tălpile arcului o are poziția articulației intermediare. Poziția acestei articulații precum și poziția articulațiilor dela naștere în axa uneia din tălpi (fig. 284) concentrează aproape toate eforturile în această talpă. Deoarece curba de presiune în acest caz va fi situată în apropierea acestei tălpi, este mult mai rațional să plasăm articulațiile în axa arcului, dând tălpilor o astfel de formă, încât să se îndepărteze uniform dela pozițiile extreme posibile ale curbei de presiune obținute prin încărcarea parțială a arcului (fig. 271).

Totuși un astfel de contur (fig. 286) produce o impresie desagreabilă din punct de vedere al aspectului exterior și de aceea se evită.

Zăbrelele arcelor suportă eforturi relativ mici, de aceea ele se fac în sistem simplu, iar forma arcului se stabilește după considerente constructive.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 13

ARCE STATIC DETERMINATE CU CONSOLE

§ 65. Componentele reacțiunilor de pe reazime

Dacă un arc obișnuit cu trei articulații va fi prelungit în consolă dincolo de articulațiile de reazim, un asemenea arc fiind similar cu grinzile în console cu sau fără zăbrele, descrise mai sus, va fi denumit *arc static determinat cu console* (fig. 287).

In ce privește modul cum deschiderea AB și consolele BC și AD lucrează în comun, aceste arce vor avea toate proprietățile și calitățile grinzilor cu console. La aceste arce, încărcarea din deschidere nu provoacă nici momente și nici eforturi în console, însă încărcarea consolelor provoacă momente și eforturi în deschidere.

Totodată acest sistem având în compunerea sa un arc își menține și proprietatea principală a sistemelor cu arce și anume împingerea, care după cum se va arăta mai jos, se produce atât pentru încărcarea deschiderii, cât și pentru încărcarea consolelor.

Componentele verticale ale reacțiunilor din reazimele arcelor cu console se determină în același mod ca și componentele sistemelor de grinzi cu console:

$$V_a = \frac{l - x}{l} \; ; \; V_b = \frac{x}{l} \; ;$$

și își păstrează această expresie în cazul aplicării sarcinii unitare atât pe deschidere cât și pe console.

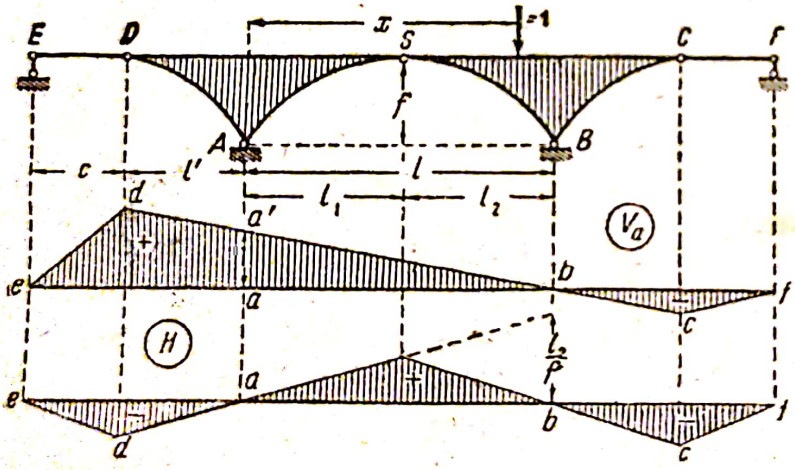


Fig. 287

In fig. 287 este reprezentată construcția liniei de influență a reacțiunii V_a, care este dreapta $a\ b$ cu ordonata egală cu unitatea în dreptul acestui reazim; dreapta $a'\ b$, ca și la grinzile cu console, este prelungită până la extremitatea consolei. Dacă extremitățile consolei sunt legate cu grinzi independente simple sau cu zăbrele, atunci pe lungimea lor linia de influență trebue să fie trasată după o dreaptă, având ordonata zero în dreptul reazimului opus al grinzii independente.

Componenta orizontală a reacțiunilor (împingerea) se determină, ca și pentru un arc oarecare, din ecuația momentelor în raport cu articulația intermediară S

$$H = \frac{1}{f} M_s^o$$

și deoarece împingerea este funcție de momentul M_s^o din secțiunea de

pe deschidere, corespunzătoare cu poziția articulației, această împingere se produce atât la încărcarea deschiderii cât și la încărcarea consolelor.

Linia de influență a împingerii va fi la fel ca și linia de influență a momentului într'o grindă cu console, în secțiunea corespunzătoare cu poziția articulației (fig. 287).

Această linie de influență se compune pe deschidere din triunghiul asb cu ordonata maximă $\frac{l_2}{f} \cdot \frac{l_1}{l}$ în dreptul articulației S, iar în limitele consolelor este formată din triunghiuri, ale căror laturi sunt prelungirile laturilor triunghiului din deschidere, iar vârfurile se găsesc în dreptul consolelor.

După această linie de influență, rezultă că încărcarea consolelor reduce valoarea împingerii dată de deschiderea arcului.

In acest fel, variind lungimea consolelor, se poate echilibra împingerea arcului sub acțiunea sarcinii permanente. Această proprietate a sistemului se aplică cu bune rezultate la construcții, pentru ca să se reducă acțiunea împingerii ce se produce la reazimele sistemelor cu arce.

§ 66. Momente și forțe tăietoare

In porțiunea din deschiderea arcelor cu console, valoarea momentelor și a eforturilor se determină prin expresii de același fel ca și cele ale arcelor simple (102)

$$M_x = M_x^0 - Hy_k \;;$$
$$N_x = Q_x^0 \sin \varphi + H \cos \varphi$$
$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi - H \sin \varphi$$

în care y_k este ordonata axei arcului, φ unghiul de înclinare al tangentei la axa arcului față de orizontală.

Trebue să se aibă în vedere că valoarea lui M_x^0 și Q_x^0, care intră în aceste expresii, se calculează ca și în cazul grinzilor cu console.

Linia de influență a momentului M_x se compune din două linii de influență (fig. 288-a), M_x^0 și H, trasate prin drepte, care prin însumare trebue să dea tot o dreaptă, deci linia de influență totală va fi și ea tot o dreaptă (fig. 288-b).

Poziția acestor drepte este determinată prin punctele zero din dreptul reazimelor și prin punctele k și t aparținând dreptei $a_1\ k\ t$, a cărei poziție se determină, ca în orice sistem cu arce, prin vârful ordonatei din dreapta reazimului egală cu a_x și prin punctul f_1 obținut prin proiectarea punctului F_1, care este intersecția liniilor BS și AK.

Pentru ca să construim linia de influență a forței tăietoare Q_x, luăm în dreptul reazimului din stânga ordonata egală cu $\cos \varphi$ și unim extremitatea acestei ordonate cu punctul zero f_2 prin dreapta $a_1\ f_2$, care determină punctul t ce se găsește pe verticala coborîtă din articulația S. Trasăm apoi dreapta $t\ b\ d$ care delimitează linia de influență pentru partea din dreapta arcului, precum și pentru consola din dreapta.

Scanned with OKEN Scanner

Dreapta $c\ a\ k_2$ (fig. 288-c), care delimitează linia de influență în partea din stânga arcului, trebue să treacă prin punctul a, fiind pa-

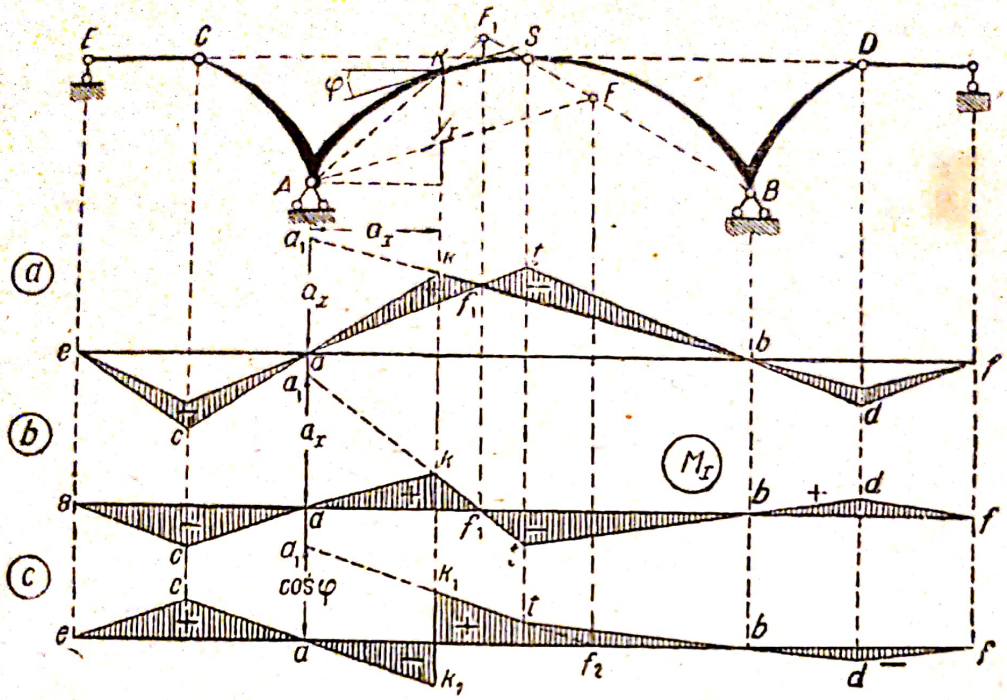


Fig. 288

ralelă cu dreapta $a_1\ k_1\ f_2$, ca la toate liniile de influență pentru forța tăietoare.

In limitele consolelor acestor sisteme cu arce, eforturile și momentele se determină în același fel ca și la grinzile simple, deoarece condiția echilibrului poate fi raportată la partea secționată a consolei asupra căreia nu influențează împingerea, momentele și eforturile depinzând astfel numai de încărcarea ce se găsește pe partea tăiată a consolei și pe grinda independentă.

§ 67. Eforturile în arcele în zăbrele cu console

Dacă sistemul de arce cu console este în zăbrele, calculul și construirea liniilor de influență pentru eforturile din bare vor fi analoage cu acelea ale arcelor simple cu zăbrele, însă trebue să se țină seama de influența consolelor, după cum s'a arătat pentru arcele cu console având secțiunea plină.

Valorile componentelor verticale ale reacțiunilor și ale împingerii se determină în același fel ca și în cazul arcelor cu console cu secțiunea plină.

Efortul într'un element oarecare din talpă, de exemplu elementul tălpii superioare O_k, se determină după o ecuație de forma:

$$O_k = -\frac{1}{h}(M_k^o - Hy_k) = O_k^o + H\frac{y_k}{h}$$

în care h este brațul de pârghie al efortului în raport cu punctul momentelor.

Ecuația liniei de influență a acestei bare, când sarcina unitară se găsește în dreapta secțiunii, va fi:

$$O_k = -\frac{1}{h}(V_a a_k - H y_k)$$

și se va compune din ordonatele liniei de influență ce_1kq_1d (fig. 289-c) a efortului din această bară, considerată ca bara unei grinzi cu zăbrele cu console și din linia de influență a împingerii ce_2sq_2d (fig. 289-c) modificată în raportul y_k/h.

Construcția liniei de influență totale se face la fel ca și pentru un arc simplu cu zăbrele cu trei articulații: în dreapta reazimului din stânga se ia ordonata $-a_k/h$; prin vârful ei și prin punctul zero f ducem dreapta $a_1 f$, pe care se găsesc punctele k și t. Prin aceste puncte k și t și prin punctele zero a și b din dreptul reazimelor se determină direcțiile dreptelor e_1k și tq_2, care delimitează conturul liniei de influență pentru ambele părți ale arcului, precum și pentru console.

Efortul din bara V_3 (fig. 290-a) se determină din expresia proiecției pe o axă perpendiculară pe tălpile arcului

$$V_3 = -\frac{1}{\cos\varphi}(Q^0 \cos\alpha - H \sin\alpha) = -\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}(Q^0 - H \operatorname{tg}\alpha)$$

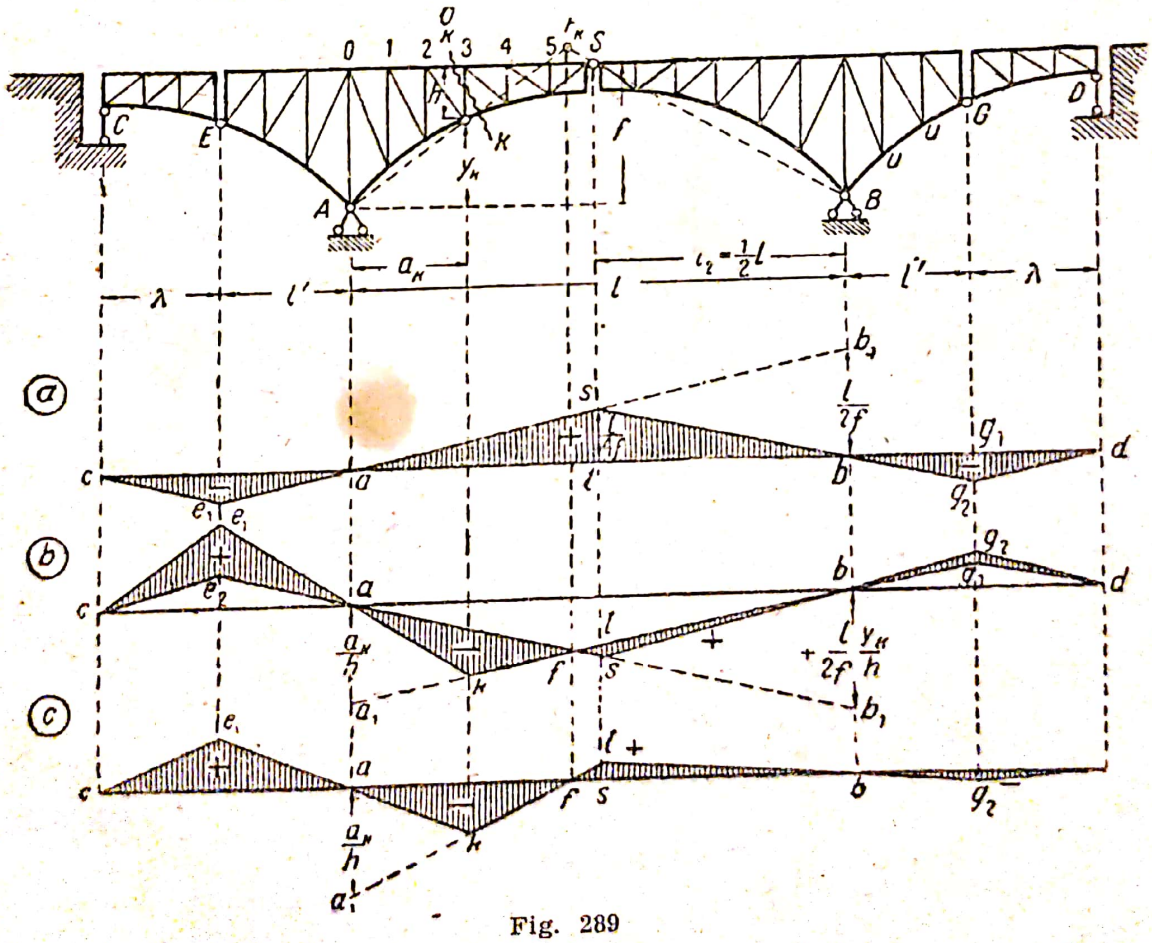


Fig. 289

în care φ este unghiul de înclinare al barei V_3 față de axa perpendiculară pe talpă.

Scanned with OKEN Scanner

Linia de influenţă a efortului se va compune din două linii de influenţă. Pentru construirea ei luăm în dreptul reazimului din stânga ordonata egală cu $-\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}$ şi prin vârful acestei ordonate şi punctul zero f, care reprezintă proiecţia punctului F, ducem ramura din dreapta $a_1 f$; ramura din stânga $a\ 3$ va fi paralelă cu ramura din dreapta, ca la toate liniile de influenţă proporţionale cu forţa tăietoare. In

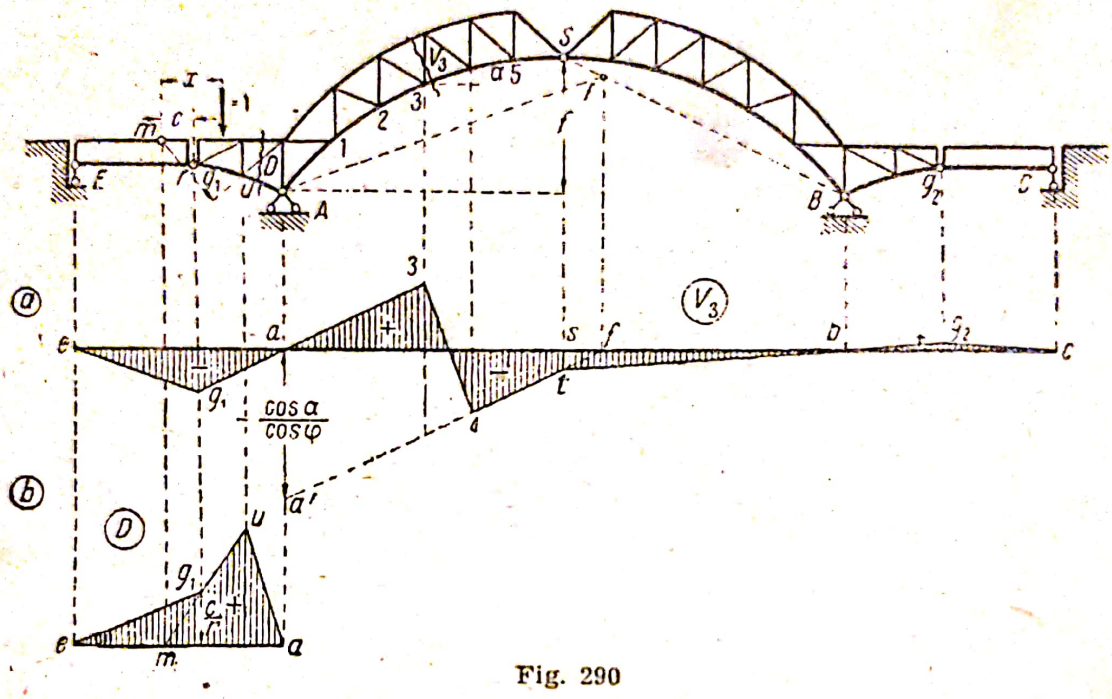


Fig. 290

limitele părţilor în consolă, linia de influenţă se va trasa prelungind dreptele $3\ a$ şi $t\ b$ până la extremitatea consolelor; astfel toată linia de influenţă va fi reprezentată prin poligonul $e\ q_1\ 3\ 4\ t\ q_2\ c$.

Probleme şi exerciţii

87. — Să se construiască curba momentelor pentru sistemul de arce cu console reprezentat în fig. 291 şi încărcat cu o sarcină uniform distribuită.

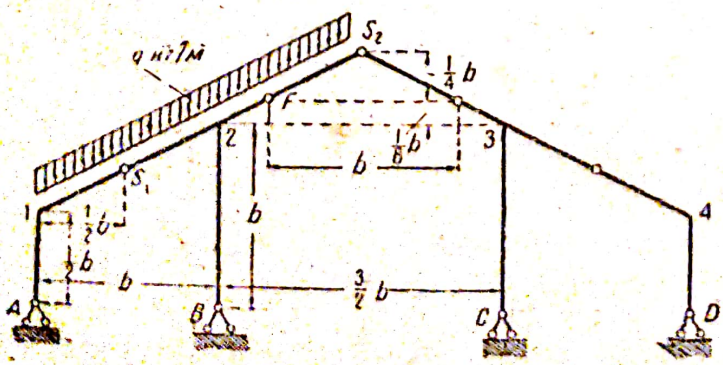


Fig. 291

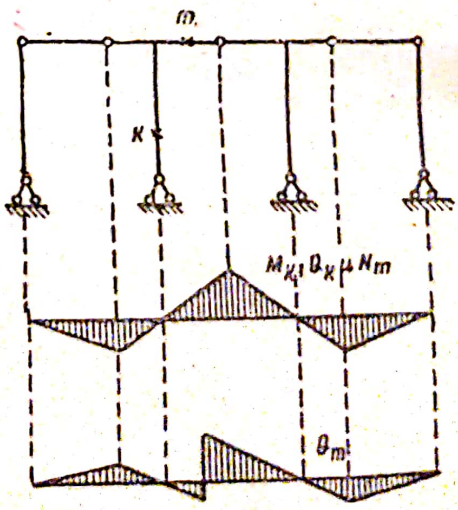


Fig. 292

Indicaţii. Construcţia curbei se verifică anulând suma momentelor din noduri, în special în nodul 2.

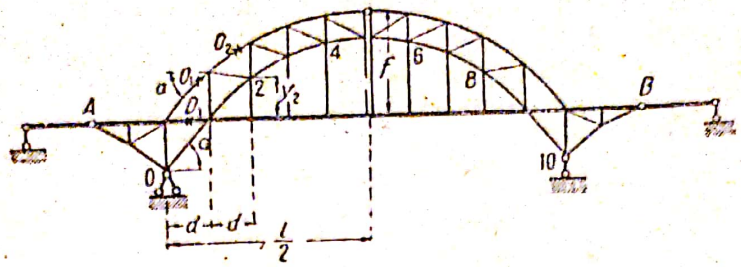


Fig. 293

88 — Să se construiască linia de influenţă a eforturilor Q, N şi a momentului M în secţiunile k şi m ale arcului în zăbrele cu console (fig. 292) când sarcina se deplasează pe partea superioară.

Indicaţii. In primul rând trebue să se stabilească partea de bază a sistemului, pe urmă partea suplimentară şi să se stabilească rolul montanţilor extremi în calculul sistemului.

89 — Să se construiască linia de influenţă pentru barele O_1, O_2, D_1 a sistemului de arce cu zăbrele şi console, încărcate pe linia articulaţiilor A B (fig. 293)

90 — Să se demonstreze dacă este bine construită linia de influenţă a momentului din secţiunea k a sistemului reprezentat în fig. 294.

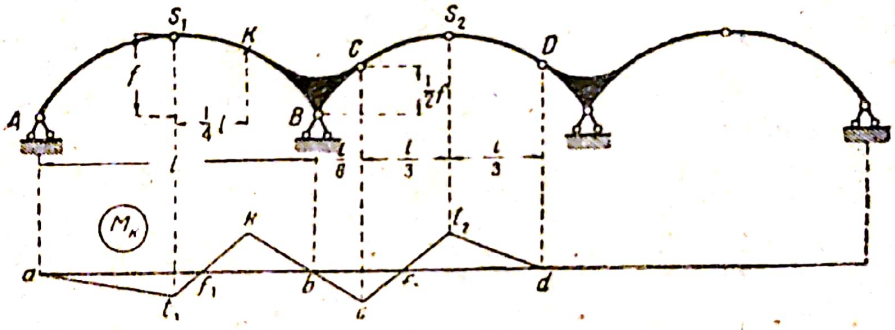


Fig. 294

Indicaţii. Particularitatea acestei probleme constă în aceea că arcele se reazimă pe console. Pentru construirea liniei de influenţă a arcului A B trebue să stabilim în ce condiţiuni sarcina, care se găseşte pe arcul C S_2 D, poate să anuleze eforturile şi momentul în secţiunile arcului A B.

CAPITOLUL 14

SISTEME MIXTE

§ 68. Noţiuni generale

Sub denumirea de sisteme mixte (complexe) se înţeleg două sisteme îmbinate astfel, încât lucrează ca o singură piesă. Din punctul de vedere al calculului, fiecare din aceste două sisteme poate rezista şi singur în anumite condiţiuni de încărcare, însă din cauza rigidităţii insuficiente, aceste sisteme se îmbină pentru a putea prelua în acest fel şi unele combinaţii de încărcări mai grele şi mai complicate.

Asemenea sisteme se întâlnesc mai des sub formă de îmbinare între un cablu cu o grindă simplă sau cu zăbrele, a unui arc cu rigi-

ditate redusă cu o grindă simplă ori cu zăbrele, a unui cablu cu un arc etc.

Aplicarea acestor sisteme se întâlneşte la consolidarea construcţiilor vechi de grinzi pentru a le face capabile să reziste la sarcini mai grele, la construcţiile cu deschideri mari, mai ales la poduri suspendate etc.

O astfel de îmbinare între sistemele de arce şi sistemele de grinzi, este câte odată raţională în vederea anulării acţiunii împingerii care se preia de grinda care serveşte în acest caz ca tirant.

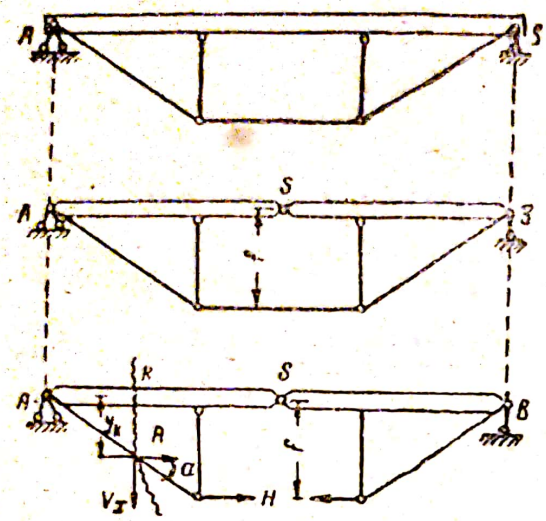


Fig. 295

La îmbinarea de sisteme simple într'un singur tot, acestea formează sisteme static nedeterminate şi aducerea lor în stare static determinată implică modificarea legăturilor de reazim precum şi introducerea de articulaţii suplimentare.

De exemplu, sistemul mixt arătat în fig. 295 reprezintă îmbinarea unei grinzi cu un cablu (macaz) şi este static nedeterminat întru cât conţine în alcătuirea sa, o legătură în plus.

Introducerea în acest sistem a unei articulaţii intermediare S, permite ca, făcând o secţiune prin această articulaţie, să scriem expresia momentelor în raport cu aceasta:

$$M_s^0 - Hf = 0$$

din care se determină valoarea împingerii H provenită din alcătuirea interioară a sistemului. Mai departe, calculul acestor sisteme cu articulaţii intermediare, se bazează pe folosirea valorii acestor împingeri.

§ 69. Metode de calcul

Sistemele de arce şi cabluri care intră în compunerea sistemelor mixte se consideră în calcule ca bare îmbinate cu articulaţii la noduri. Cu toate că, de obiceiu — la execuţie — nodurile arcelor nu se fac articulate, se poate însă admite ipoteza că aceste noduri sunt articulate, ţinând seama de rigiditatea redusă a părţii în arc, în comparaţie cu grinda care intră în acest sistem.

Valoarea eforturilor axiale N, în barele părţii în arc sau în porţiunea cablului, se determină considerând împingerea H ca fiind proiecţia acestor eforturi pe o axă orizontală (fig. 296):

$$N_1 \cos \alpha_1 = N_2 \cos \alpha_2 = \ . \ . \ . = H$$

în care α este unghiul de înclinare a barei faţă de orizontală. Valorile efortului T în tiranţii sau montanţii care leagă porţiunea în arc cu porţiunea de grindă a sistemului, se determină din echilibrul separării nodurilor proiectând pe axa montanţilor sau a tiranţilor.

$$T_n = N_n \sin \alpha_n - N_{n-1} \sin \alpha_{n-1} = H \ (\text{tg}\ \alpha_n - \text{tg}\ \alpha_{n-1})$$

După ce s'a găsit împingerea H, determinarea eforturilor interioare

în porțiunea de grindă devine posibilă cu ajutorul condițiilor de echilibru a secțiunilor duse transversal prin baza considerată. De exemplu, momentul în secțiunea grinzii, reprezentată în fig. 295, se determină din expresia

$$M_k = M_k^0 - Hy_k \tag{123}$$

Efortul în bara din talpa O_k a grinzii cu zăbrele (fig. 296) se determină din expresia

$$O_k = -\frac{1}{h}\left[M_k^0 - H\,(y_k + h)\right] \tag{124}$$

In ambele expresii M_k^0 este valoarea momentului provenit din încărcare, determinat ca moment într'un sistem simplu.

Valoarea momentului dat de împingerea H se determină însă ca momentul componentei orizontale a efortului din bara arcului sau porțiunea cu cablu raportat ca direcție la verticala care trece prin punctul momentelor K. Raportând astfel eforturile din bară, momentul componentei verticale în raport cu punctul momentelor, este egal cu zero.

Aceeași descompunere a efortului din bara porțiunii de arc sau de cablu în componenta orizontală și verticală se aplică la alcătuirea expresiei proiecției eforturilor interioare, pe una din axele secțiunii, duse în vederea alcătuirii ecuației.

Valoarea componentei verticale V_n se exprimă prin valoarea împingerii (fig. 296).

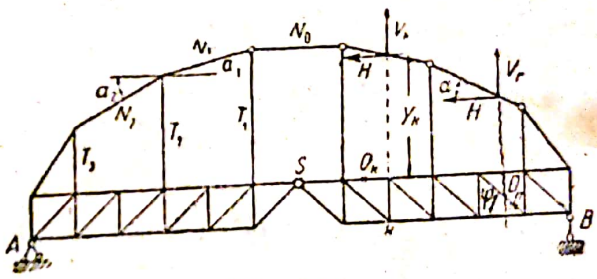


Fig. 296

$$V_n = N_n \sin\alpha = H \operatorname{tg}\alpha$$

în care α este unghiul de înclinare al barei, în raport cu orizontala.

Față de cele de mai sus, valoarea forței tăietoare în porțiunea de grindă a sistemului reprezentat în fig. 295 se determină prin expresia

$$Q = Q^0 - H \operatorname{tg}\alpha \tag{125}$$

iar efortul în zăbrelele grinzii sistemului din fig. 296 se stabilește prin expresia :

$$D_n = \frac{1}{\sin\varphi}\left(Q_n^0 - H \operatorname{tg}\alpha_n\right) \tag{126}$$

In ambele expresii Q_0 este valoarea forței tăietoare provenită din acțiunea sarcinilor.

Toate expresiile momentelor și eforturilor arătate mai sus (123) — (126) sunt analoage cu expresiile momentelor și forțelor tăietoare ale arcelor cu secțiune plină și cu zăbrele (§ 55 și 62). Această analogie permite ca, la construcția liniilor de influență pentru secțiunile și barele sistemelor mixte, să folosim aceleași procedee care s'au întrebuin-

Scanned with OKEN Scanner

ţat la construcţia de linii de influenţă la arcele simple, efectuând construcţia lor tot prin folosirea punctului zero al liniei de influenţă dat de relaţia (110). La utilizarea acestei relaţii, pentru construirea liniilor de influenţă a sistemelor mixte, trebue să avem în vedere că articulaţia intermediară în acest sistem nu se referă la axa arcului sau a cablului, ci la partea de grindă a sistemului.

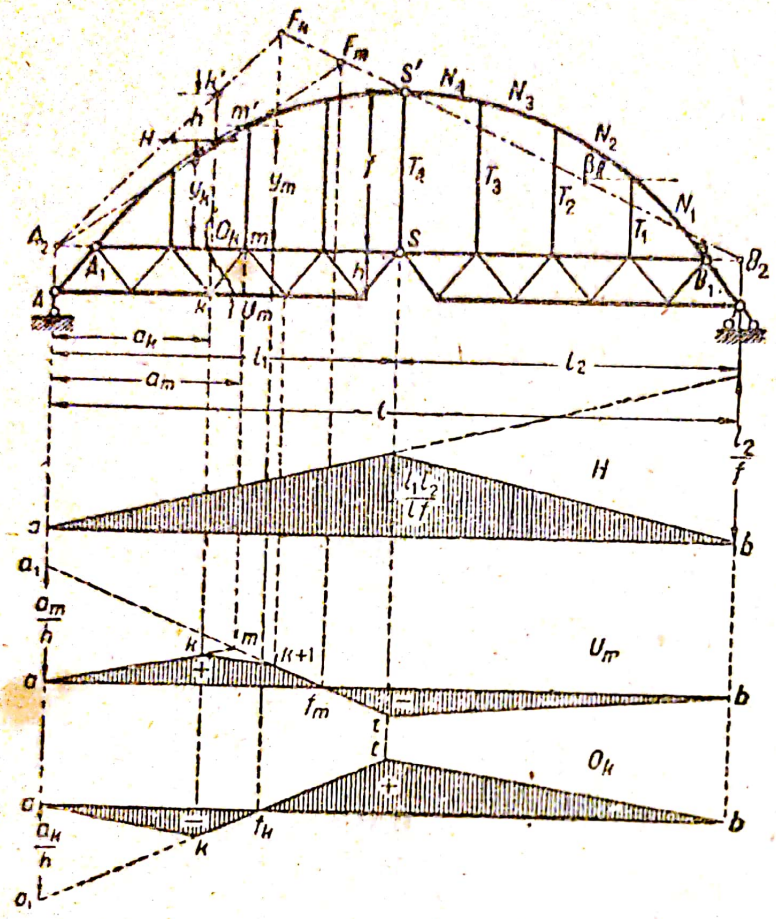


Fig. 297

Faţă de aceasta, la determinarea geometrică a poziţiei punctului zero, construcţia nu poate fi adeseori executată pe linia punctelor de reazim ale sistemului, ci pe o linie dusă prin articulaţia intermediară, paralelă cu linia care uneşte punctele de reazim. Dela această dreaptă se măsoară ordonatele f, y etc. care fac parte din relaţia (110).

Ca exemplu, să analizăm construcţia liniei de influenţă a efortului din elementele tălpii grinzii de zăbrele reprezentată în fig. 297.

Efortul într'o bară oarecare a tălpii se determină din ecuaţiile : pentru talpa inferioară

$$U_m = \frac{1}{h}\,(M_m^o - Hy_m)$$

iar pentru talpa superioară

$$O_k = -\frac{1}{h}\left[\,(M_k^o - H\,(y_k + h)\right]$$

Poziţia punctului zero al liniei de influenţă a acestor eforturi, se determină prin condiţia că, aplicând sarcina unitară în dreapta secţiunii, aceste ecuaţii se anulează. Aceste condiţii se determină cu următoarele relaţii :

Pentru talpa inferioară U_m :

$$M_m^o - Hy_m = V_a\, a_m - Hy_m = 0$$

şi faţă de aceasta, ecuaţia care determină poziţia punctului zero se va scrie astfel (110) :

$$\frac{f\ (l\ -\ U_m)}{l_2\ U_m} = \frac{Y_m}{a_m} \qquad (127)$$

Pentru talpa superioară O_k :

$$M_k^o\ -\ H\ (\ y_k + h\ ) = V_a\ a_k\ -\ H\ (\ y_k + h\ ) = 0$$

iar ecuaţia punctului zero :

$$\frac{f\ (1\ -\ U_m)}{l_2\ U_k} = \frac{y_k + h}{a_k} \qquad (128)$$

Intru cât în cazul de faţă ordonatele f, y etc se măsoară dela axa orizontală ce trece prin articulaţia intermediară S, toate construcţiile pentru determinarea punctului zero, se fac considerând această dreaptă drept bază, pe care se proiectează punctele de reazim obţinând astfel punctele A_2 şi B_2 (fig. 297). Pe baza celor expuse, dreapta care satisface părţile din stânga ecuaţiilor (128) se duce prin punctul B_2 şi punctul S' care se găseşte pe axa arcului şi pe verticala dusă prin articulaţia S, fiind astfel depărtată de această articulaţie cu distanţa f.

Dreptele care satisfac părţile din dreapta ale ecuaţiilor (128) vor trece prin punctul A_2 şi vârfurile ordonatelor $(y_k + h)$ şi y_m, măsurate dela nivelul articulaţiei S. Dintre acestea, ordonata y_m este pe desen, iar ordonata $(y_k + h)$ trebue să fie aşezată până la punctul k'. Dreptele $A_2\ k'$ şi $A_2 m'$ vor determina pe dreapta $B_2\ S'$ punctele F_k şi F_m, ale căror ordonate satisfac egalităţile (127 şi 128). Proiecţiile punctelor F_k şi F_m vor determina poziţiile punctelor zero ale liniilor de influenţă considerate. Pentru restul construcţiei nu se vor întâmpina dificultăţi şi construcţia se face prin procedeele obişnuite ca şi în cazul arcelor.

In fig. 298 se vede un sistem combinat compus dintr'un arc flexibil şi o grindă rigidă deasupra arcului.

Particularitatea acestui sistem constă în existenţa a patru puncte de reazim. Determinarea lui statică se poate asigura introducând trei reazime mobile A, A' şi B' şi articulaţia intermediară S. Direcţiile reacţiunilor A' şi B' se determină din direcţia primelor bare ale arcului 0—1 şi 5—6 care sunt articulate la extremităţi.

In aceste condiţiuni sistemul poate fi calculat ca un arc cu trei articulaţii $A'\ S\ B'$ cu deschiderea egală cu distanţa măsurată pe orizontală între punctele A'' şi B'', care reprezintă articulaţiile fictive, create de direcţiile componentelor verticale ale reacţiunilor A şi B şi de direcţiile reacţiunilor A' şi B'.

Existenţa a patru reazime implică anumite particularităţi la determinarea reacţiunilor unui asemenea sistem.

Ecuaţia momentelor tuturor forţelor exterioare, faţă de articulaţia fictivă B'', permite să scriem următoarea egalitate :

$$V'_a + V''_a = \frac{1}{l}\ M_b = V_a \qquad (129)$$

din care rezultă că *suma componentelor verticale în punctele A şi A'' este egală cu reacţiunea unei grinzi simplu rezemată.*

Din ecuația momentelor în raport cu articulația intermediară, obținem :

$$H = -\frac{M_s^o}{f}$$

Această expresie ne dă posibilitatea să construim linia de influență a împingerii care va avea forma triunghiulară cu ordonata maximă egală cu $\frac{l_1 l_2}{l f}$ în dreptul articulației S.

Cunoscând valoarea împingerii H, care este componenta orizontală

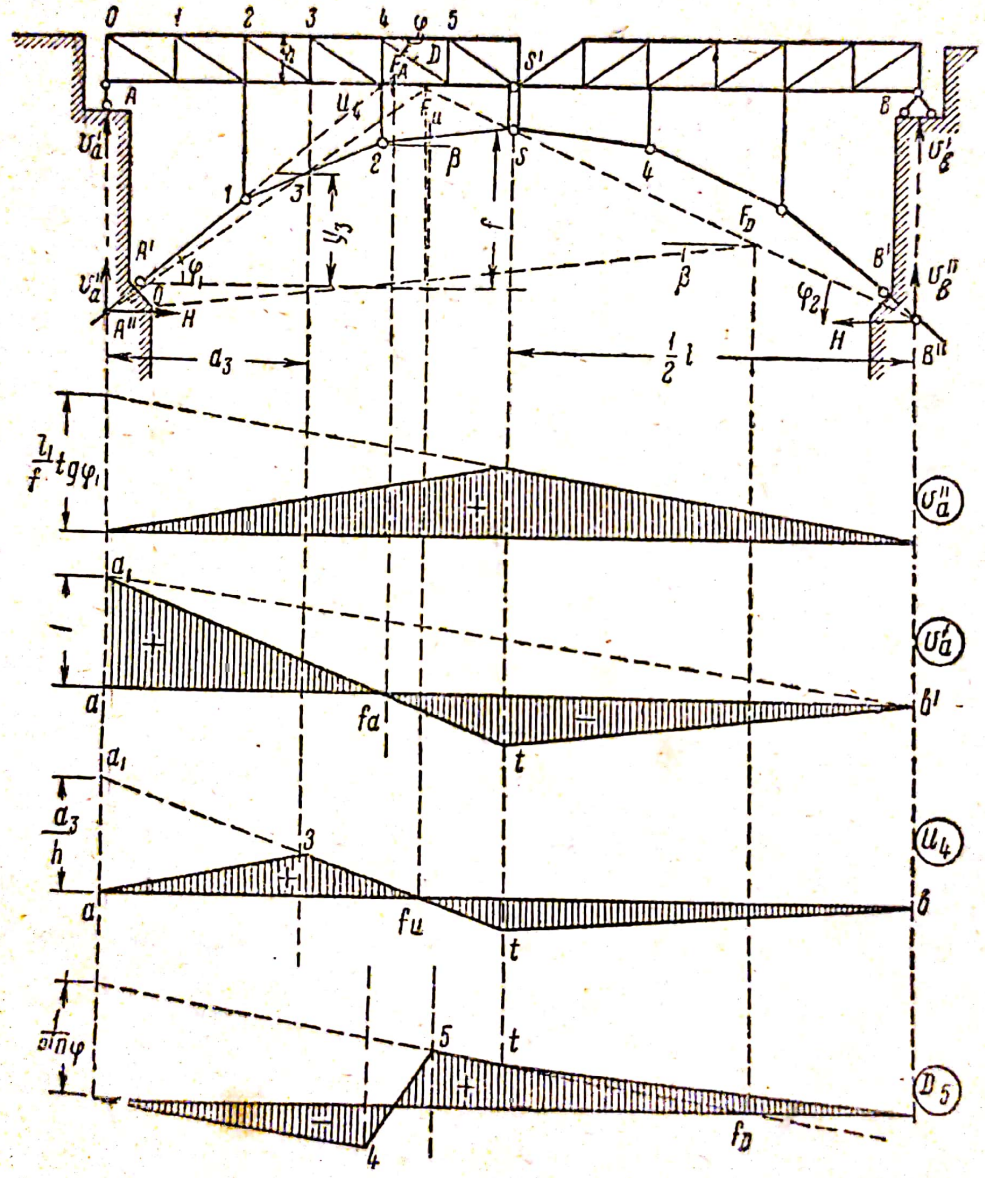


Fig. 298

a reacțiunilor din punctele A'' și B'', valoarea componentei verticale V''_a a aceleiași reacțiuni poate fi exprimată în funcție de împingere și anume :

$$V''_a = H \operatorname{tg} \varphi_1 \text{ și } V''_b = H \operatorname{tg} \varphi_2$$

Scanned with OKEN Scanner

Din această expresie rezultă că linia de influenţă a reacţiunii V''_a va fi similară cu linia de influenţă a împingerii H, adică va avea forma unui triunghiu cu ordonata maximă în dreptul articulaţiei intermediare, având însă toate ordonatele modificate prin înmulţire cu tg φ.

Substituind această expresie a valorii V''_a în expresia (129) şi rezolvând-o în raport cu reacţiunea V'_a, obţinem:

$$V'_a = V_a - H \operatorname{tg} \varphi_1 \qquad (130)$$

Această expresie ne arată că reacţiunea V'_a se compune din reacţiunea unei grinzi simple rezemate V_a şi din influenţa respectivă a împingerii H tg φ_1.

Prin urmare, linia de influenţă a acestei reacţiuni se va compune din linia de influenţă a reacţiunii V^0_a, care după cum se ştie, are forma triunghiulară (în fig. 298 triunghiul $a\ a_1\ b_1$) cu ordonata egală cu unitatea în dreptul reazimului din stânga şi din linia de influenţă a împingerii H modificată prin înmulţire cu tg. φ_1.

Pentru construirea liniei de influenţă totală V'_a putem folosi punctul zero f_a care se găseşte prin întretăierea celor două linii de influenţă care se însumează. Acest punct f_a se determină prin proiecţia punctului de intersecţie al dreptei $E''S$ cu dreapta $A''A$ şi în acest caz

$$V''_a = H \operatorname{tg} \varphi = 0 \text{ sau } \frac{V''_a}{H} = \operatorname{tg} \varphi$$

Cunoscând punctul f_a şi ordonata liniei de influenţă V_a din dreptul reazimului din stânga, care rămâne invariabilă şi egală cu unitatea $a\ a_1 = 1$, este uşor să construim linia de influenţă totală, care se va trasa după poligonul $a\ a_1\ t\ b'$.

In ce priveşte eforturile din barele inferioare ale sistemului, considerat ca un sistem cu zăbrele, valoarea lor se va determina ca şi în cazul unui arc cu trei articulaţii, deoarece componentele verticale ale reacţiunilor V'_a şi V''_a dau prin însumare valoarea reacţiunii V_a, care este reacţiunea unei grinzi simplu rezemată.

De exemplu, pentru bara U_4 vom avea un efort ce se determină cu ecuaţia

$$U_4 = \frac{1}{h_3}(M^0_3 - Hy_3)$$

Când sarcina unitară se găseşte în dreapta secţiunii, ecuaţia liniei de influenţă se va scrie astfel:

$$U_4 = \frac{1}{h_3}\left[(V'_a + V''_a)\ a_3 - Hy_3\right] = \frac{1}{h}(V_a\ a_3 - Hy_3)$$

iar linia de influenţă însăşi se va trasa ca o linie de influenţă totală, fiind compusă din linia de influenţă a unei grinzi simplu rezemate

$$U_4{}^0 = \frac{V_a\ a_3}{h_3}$$

şi din linia de influenţă a împingerii, modificată prin înmulţirea cu raportul $y_3\ h_3$.

Scanned with OKEN Scanner

Construirea liniei de influenţă se poate face cu ajutorul punctului zero f_n care se determină ca fiind proiecţia punctului de intersecţie F_n al dreptei BS cu $A''3$ şi care satisfac ecuaţia (110).

In mod analog se pot determina eforturile dintr'o bară oarecare a sistemului şi trasa liniile de influenţă respective.

De exemplu, efortul din diagonala D_5 (fig. 298) când sarcina unitară $P = 1$ este în dreapta diagonalei, se determină prin ecuaţia:

$$D_5 = \frac{1}{\sin \varphi} (V_n - H \operatorname{tg} \beta)$$

care reprezintă proiecţia tuturor forţelor din secţiune pe axa perpendiculară pe axa tălpilor.

Linia de influenţă construită cu această ecuaţie este reprezentată în fig. 298, ea fiind construită cu ajutorul punctului zero f_d.

Particularităţile care se întâlnesc în calculele sistemelor mixte şi la construcţia liniei de influenţă, se pot urmări mai bine în exemplele de mai jos, în cadrul exerciţiilor.

Probleme şi exerciţii

91. Să se construiască liniile de influenţă pentru barele sistemului mixt, din fig. 299, reprezentând îmbinarea unui arc cu o grindă cu zăbrele, sarcina fiind aplicată pe linia AB.

Indicaţii. Eforturile din barele acestui sistem se determină prin expresiile arătate în § 69. Ca exemplu sunt construite în fig. 299 liniile de influenţă pentru eforturile din barele O_m, U_m şi V_m.

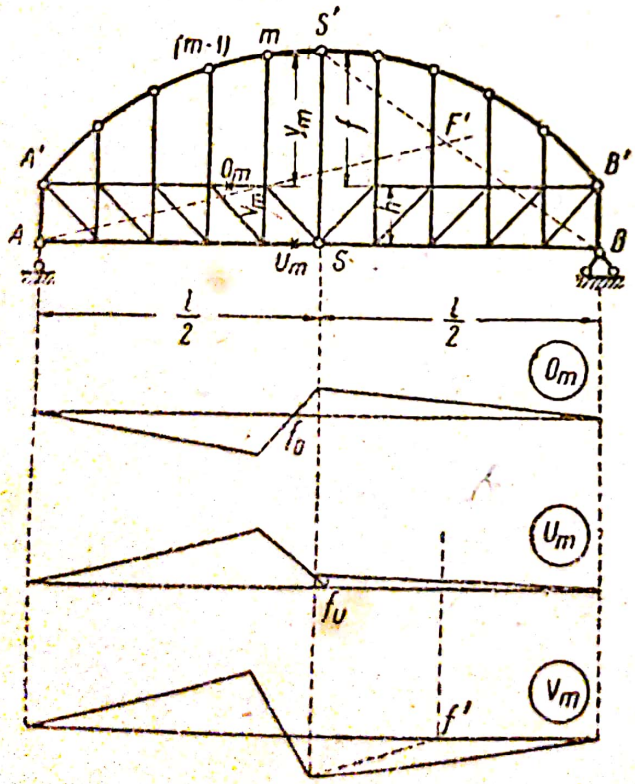


Fig. 299

Deoarece articulaţia intermediară se găseşte pe linia articulaţiilor de la naşteri, ca bază pentru determinarea geometrică a poziţiei punctelor zero trebue să servească linia ASB dela care se măsoară ordonatele f, y_m şi $(y_m + h)$, necesare pentru trasarea dreptelor care fixează poziţia punctelor zero (110).

In raport cu aceeaşi dreaptă ASB se duce dreapta AF' paralelă cu bara $m\ (m-1)$ care satisface condiţia (110) relativă la poziţia punctului zero f al liniei de influenţă pentru momentul V_m.

92. Să se construiască linia de influenţă pentru eforturile din barele sistemului arătat în fig. 300, care reprezintă o îmbinare a unui arc cu grinzi de rigiditate, cu zăbrele.

Indicaţii. In acest sistem expresiile eforturilor din diagonale se alcătuesc cu ajutorul punctelor de momente. In figură se dă schema construcţiei pentru determinarea efortului din diagonala D şi elementului din talpa O_n. In liniile de influenţă a acestor bare poziţia punctelor zero se determină prin relaţia (110).

Astfel pentru elementul de talpă O_n vom avea:

Scanned with OKEN Scanner

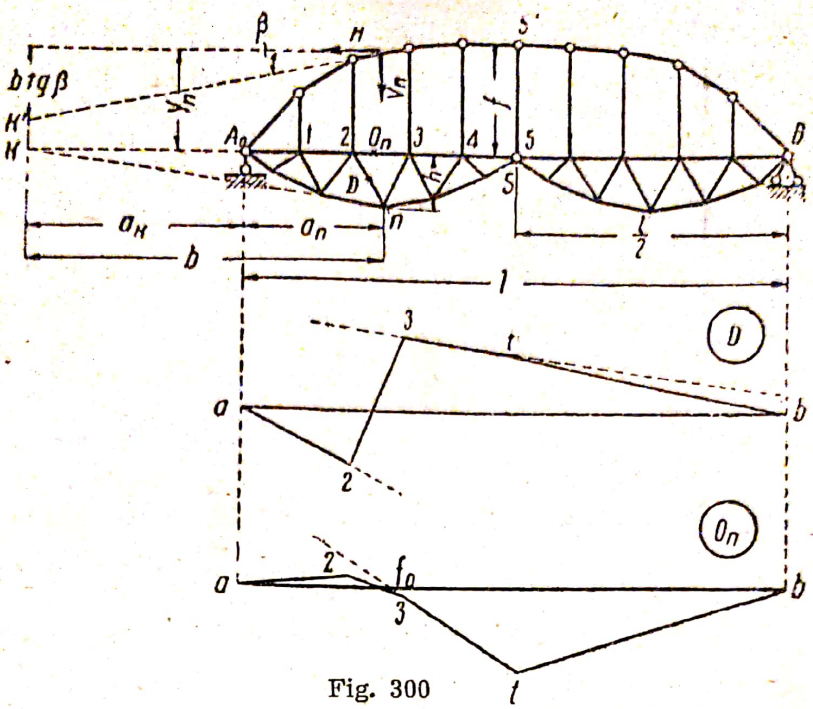


Fig. 300

$$\frac{V_a}{H} = \frac{f}{l_2}\,\frac{(l-u)}{u} = \frac{y_n + h}{a_n}$$

iar pentru diagonala D

$$\frac{V_a}{H} = \frac{f\,(l-u)}{l_2\,u} = \frac{y_n - b\ \mathrm{tg}\ \beta}{a_k}$$

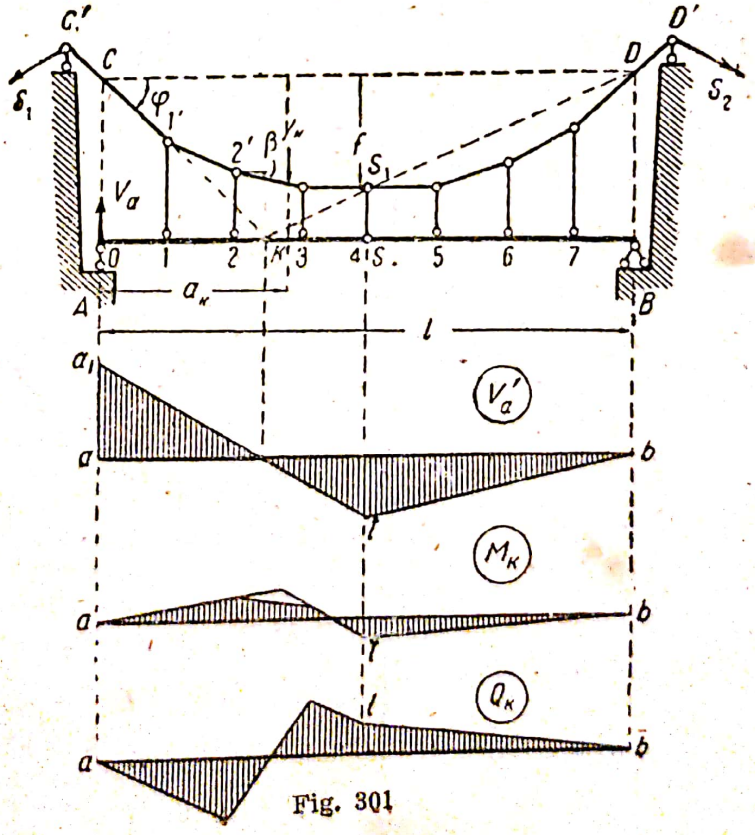


Fig. 301

Se recomandă să se construiască liniile de influenţă ale diagonalelor din panoul al patrulea.

93. Să se construiască linia de influenţă a reacţiunilor, momentului şi a forţelor tăietoare în secţiunile grinzii din fig. 301, care este o grindă combinată cu un lanţ.

Indicaţii. Pentru determinarea valorii reacţiunilor trebue să folosim indicaţiile din fig. 298.

La alcătuirea expresiunii momentelor în raport cu secţiunile duse transversal pe sistem, trebue să ţinem seama de componentele orizontale, atât prin elementul final, cât şi din cel secţionat al lanţului.

In construcţia grafică pentru determinarea poziţiei punctelor zero ale liniei de influenţă, construcţia trebue să se facă considerând dreapta CD ca bază, dela care să se măsoare ordonatele f care determină valoarea împingerii.

CAPITOLUL 15

SISTEME SUSPENDATE

§ 70. Proprietăţile sistemelor suspendate

Sisteme suspendate sunt acele sisteme ale căror bare la orice poziţie a sarcinilor în sistem au numai eforturi de tensiune. Această proprietate a sistemelor suspendate prezintă următoarele avantaje:

a) în solicitările pieselor acestor sisteme nu intervine flambajul;
b) prezenţa exclusivă a solicitărilor la tensiune permite proiectarea elementelor sistemului din cabluri de oţel cu limita de curgere foarte ridicată, deci şi cu rezistenţe admisibile superioare;
c) lipsa îmbinărilor nituite în bare şi la noduri permite utilizarea integrală a secţiunii cablului pentru transmiterea eforturilor;
d) lipsa guseelor şi îmbinărilor nituite apropie modul de lucru real al sistemului de ipotezele de calcul.

Toate aceste avantaje aduc economii considerabile de material, din care motiv aceste sisteme trebue să-şi găsească un vast câmp de aplicaţie la lucrările de artă pentru căile de comunicaţie şi la instalaţii industriale.

§ 71. Bazele pentru alcătuirea sistemelor suspendate

In fig. 302 este reprezentată schema unei grinzi suspendate propusă de prof. I. M. Rabinovici, care poate fi considerată ca un exemplu tipic pentru acest gen de grinzi. Baza alcătuirii ei geometrice o formează poligoanele funiculare pentru sisteme de forţe verticale. Nodurile poligoanelor funiculare, care se găsesc pe aceeaşi verticală cu nodurile panourilor, sunt legate de cele din urmă prin montanţi articulaţi, formând astfel un singur sistem. In fiecare jumătate a sistemului, toate poligoanele funiculare ce se găsesc în acea jumătate sunt legate de două articulaţii: în jumătatea din dreapta de articulaţiile A şi S, iar în cea din stânga de articulaţiile S şi B; jumătatea din dreapta este legată de articulaţia A şi tirantul $A\ S$, iar cea din stânga de articulaţia B şi tirantul $B\ S$.

Sistemul astfel alcătuit se descompune în două sisteme: $A\ S\ B$, reprezentat în fig. 302 cu linii pline, care lucrează la încărcarea jumătăţii din stânga şi $B\ S\ A$, înfăţişat în aceeaşi figură cu linii punctate, care lucrează la încărcarea jumătăţii din dreapta deschiderii.

Scanned with OKEN Scanner

Numărul poligoanelor funiculare, ce se introduc într'un asemenea sistem, se stabilesc din condiţiile de determinare statică şi de indeformabilitate a sistemului.

Dacă notăm cu m numărul tălpilor fiecărei grinzi suspendate, exclusiv talpa orizontală, cu n numărul panourilor grinzii, atunci numărul montanţilor între tălpi va fi $(m - 1)$, numărul elementelor de talpă intermediară $(n - 1)$, iar numărul total al barelor din grindă k şi putem scrie relaţia:

$$k = m \cdot n + (n - 1)(m - 1) = 2\, m \cdot n - m - n + 1$$

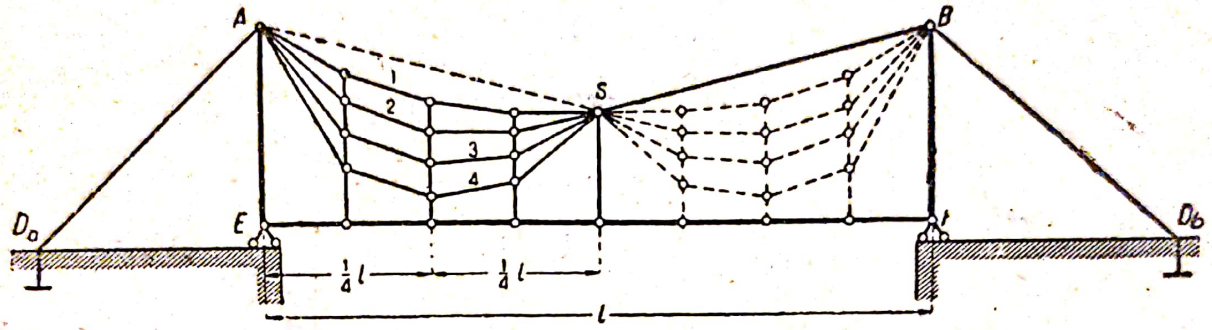


Fig. 302

Numărul total s al nodurilor în fiecare jumătate a sistemului va fi:

$$s = (n - 1)\, m + 2,$$

în care 2 reprezintă nodurile din articulaţiile A şi S.

Din condiţiile de indeformabilitate ale sistemelor static determinate trebue să avem relaţia:

$$k = 2\, s - 3$$

Introducând în această egalitate valorile lui n şi s, obţinem:

$$2\, m\, n - m - n + 1 = 2\, (n - 1)\, m + 4 - 3$$

Această egalitate este satisfăcută de condiţia:

$$m = n \qquad (218)$$

Astfel condiţia de indeformabilitate geometrică a sistemelor suspendate, formate din poligoane funiculare independente, este ca numărul poligoanelor funiculare să fie egal cu numărul laturilor fiecăruia dintre ele sau cu numărul panourilor grinzii.

Admiţând principiul compunerii laturilor poligoanelor funiculare, se poate obţine un şir de diferite sisteme suspendate, static determinate şi indeformabile.

În fig. 303 este arătat sistemul lui Gisclard, în care prima talpă a unei jumătăţi a sistemului se confundă cu tirantul dela reazimul celeilalte jumătăţi, iar celelalte tălpi se confundă parţial între ele.

In această schemă, sistemul general de poligoane funiculare este adus, prin suprapunerea reciprocă a unor elemente, la forma unei grinzi cu zăbrele, alcătuită din triunghiuri aparent suspendate unul de altul.

Desvoltând mai departe metoda suprapunerii, se poate alcătui un

Scanned with OKEN Scanner

sistem de poligoane funiculare în așa fel, încât suprapunându-se în parte laturile poligonului, ele să formeze o grindă cu zăbrele cu două tălpi legate între ele cu un sistem de zăbrele. In fig. 304 este reprezentată o astfel de grindă suspendată, formată din patru poligoane funiculare, din care poligonul 2 și 3 se suprapun parțial peste al patrulea poligon.

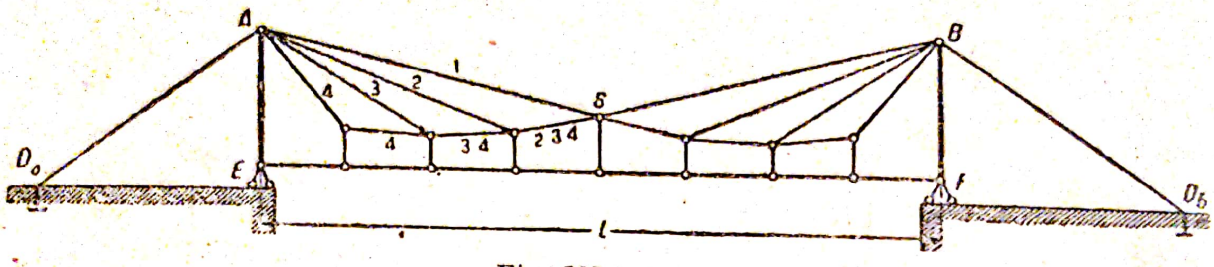


Fig. 303

Indiferent de forma și modalitatea de alcătuire a grinzii suspendate, aceasta trebue să îndeplinească în primul rând condiția principală, ca toate elementele ei să lucreze numai la tensiune. Dacă linia de influență a efortului din diferite bare are două semne, iar suprafețele ei se determină cu valorile $+\omega_1$ și $-\omega_2$, condiția de mai sus poate fi realizată numai dacă efortul pozitiv provenit din încărcarea permanentă q, determinat prin valoarea $\omega_1 q$, va depăși efortul negativ dat de încărcarea mobilă p și încărcarea permanentă q:

$$q\,\omega_1 - (q + p)\,\omega_2 > 0$$

sau

$$\frac{q}{p+q} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2} - 1 > 0 \qquad \text{(a)}$$

de unde

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} > 1 + \frac{p}{q} \qquad (131)$$

Inegalitatea obținută arată că la alegerea conturului unei grinzi suspendate este necesar să ținem seamă de raportul p/q dintre încărcarea mobilă și cea permanentă.

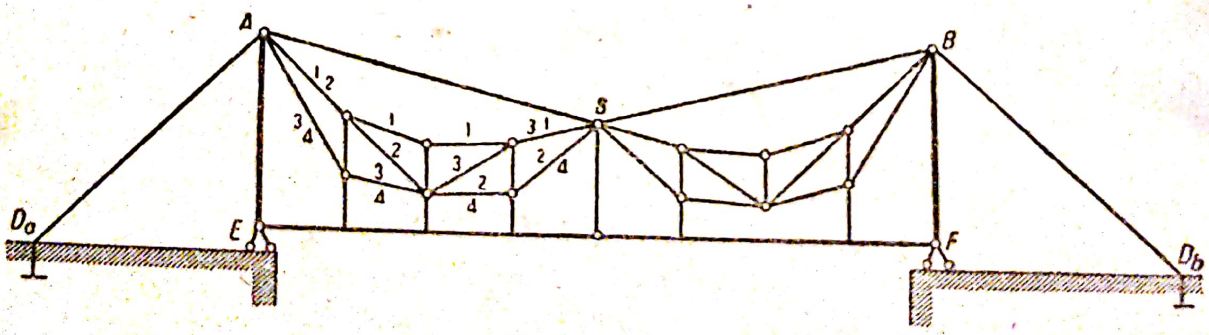


Fig. 304

Din acest punct de vedere, tipul grinzii suspendate reprezentat în fig. 304 nu poate fi considerat ca rațional, deoarece în grinzile de acest tip suprafețele pozitive și negative ale liniilor de influență ale zăbrelelor sunt apropiate ca valoare, ceea ce împiedecă satisfacerea condiției

Scanned with OKEN Scanner

(131). Această condiție este satisfăcută cu prisosință de grinzile suspendate, la care poligoanele funiculare au unghiuri de valoare mai mică (cu frânturi accentuate) cum sunt, de exemplu, sistemele reprezentate în fig. 303 și 305, precum și sistemele cu mai multe tălpi *) (fig. 302).

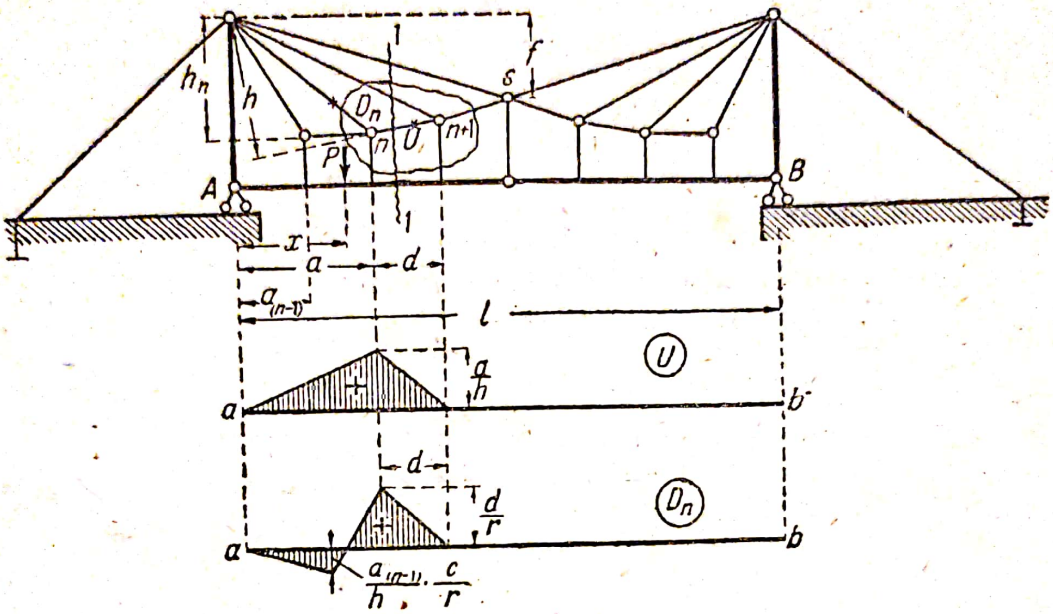


Fig. 305

§ 72. Sistemul Gisclard

Grinda suspendată propusă de către Gisclard poate fi considerată pentru calcul ca un sistem suspendat de arce, de aceea calculul ei nu prezintă nicio dificultate. Considerând alcătuirea acestei grinzi ca rezultatul suprapunerii unor poligoane funiculare (fig. 306), se poate observa că fiecare poligon are frânturi accentuate în fiecare nod, reali-

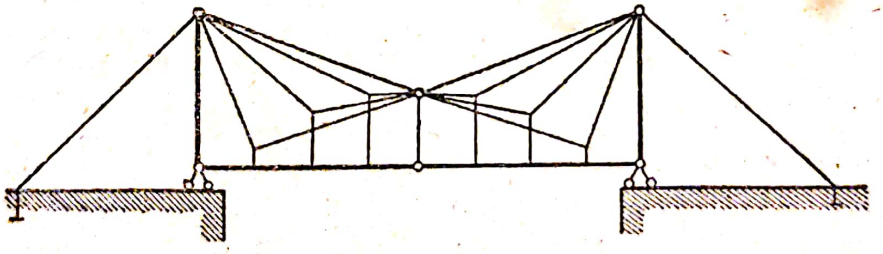


Fig. 306

zându-se astfel un raport mare între suprafața pozitivă și negativă a liniei de influență, iar concentrarea în nodul de reazim a tuturor triunghiurilor care formează această grindă asigură că în toate elementele tălpii inferioare vor fi numai eforturi de tensiune.

*) **Notă.** Grinzile suspendate cu mai multe tălpi sunt tipul cel mai general de grinzi suspendate. Aceste grinzi au fost propuse de prof *I. M. Rabinovici*, care a elaborat și metodele respective de calcul. A se vedea culegerea 30 a „Institutului de cercetări tehnice" NKPS fasc. 112.

Linia de influență pentru oricare din barele tălpii inferioare se determină din expresia

$$U_n = \frac{P_x}{h}$$

și are forma arătată în fig. 306. Toate sunt cu același semn.

Eforturile din tiranții înclinați, care pornesc din nodurile de reazim, se determină — în general — prin secționarea panoului final adiacent la tirantul în cauză (fig. 307)

$$D_n = \frac{1}{r}(1\ d - U_n\ c)$$

Aplicând sarcina unitară în nodul n și în dreapta lui, efortul U_n, după cum s'a arătat mai sus, este egal cu zero. Prin urmare pentru poziția sarcinii unitare în nodul n, efortul în tirant se determină prin expresia :

$$D_n = \frac{d}{r}$$

Dacă sarcina este aplicată în nodul $(n+1)$ și în dreapta acestui nod, efortul în tirantul $D_n = 0$. Când sarcina se găsește la stânga nodului n, efortul în tirant va fi

$$D = - U_n \frac{c}{r} = - \frac{x}{h} \cdot \frac{c}{r}$$

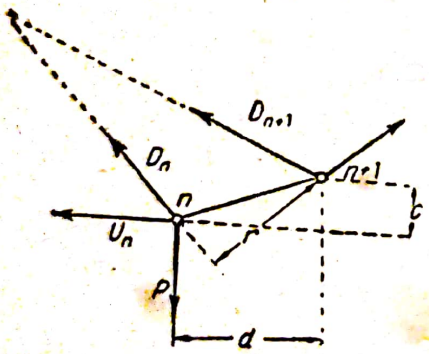


Fig. 307

Ordonatele obținute determină conturul liniei de influență (fig. 305).

Valoarea suprafețelor negative ale acestor linii de influență este de obiceiu de câteva ori mai mică decât cea pozitivă, asigurându-se astfel respectarea condiției (131).

In mod analog se determină eforturile din toate barele grinzii și se construesc liniile de influență respective. Calculul acestor grinzi se poate face cu epura lui Cremona sau prin metoda cinematică.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 16

TEOREMELE FUNDAMENTALE

§ 73 Introducere

Sub acţiunea unei sarcini, orice construcţie îşi schimbă forma iniţială, deci *se deformează*. Deformarea construcţiei poate să se producă de asemenea şi sub influenţa variaţiei de temperatură a aerului, a schimbării legăturilor de reazim etc.

Deformaţia exterioară a unui sistem este însoţită de deformaţii liniare ale diferitelor puncte ale lui, de deplasări unghiulare ale barelor lui, precum şi ale poziţiei relative a secţiunilor transversale.

Studiul teoretic al deformaţiilor are importanţă atât pentru calcule, cât şi pentru realizarea practică a construcţiilor. Pe baza expresiilor deplasărilor se alcătuesc ecuaţiile suplimentare, necesare pentru calculul sistemului static nedeterminat.

In practică, calculul deplasărilor se foloseşte pentru a compara valorile teoretice rezultate din calcul cu deplasările măsurate chiar la construcţia propriu zisă, ceea ce este deseori necesar, pentru a aprecia modul cum lucrează şi starea construcţiei.

Fenomenul de deformare constă în aceea că sub acţiunea unor cauze exterioare oarecare, construcţia îşi schimbă forma iniţială, luând o formă corespunzătoare echilibrului elastic, la care acţiunea forţelor exterioare se echilibrează prin reacţiunea eforturilor interioare.

In studiul deformării sistemelor, ne vom baza pe ipotezele stabilite mai înainte şi anume:

1. materialul sistemului posedă o omogenitate şi elasticitate perfectă;
2. toate îmbinările articulate, atât în interiorul construcţiei, cât şi pe reazime, nu au frecări;
3. sistemul se consideră în limita deformaţiilor elastice, când există o relaţie liniară între creşterea încărcării şi a deformaţiilor (sisteme deformabile liniar).

Metoda cea mai generală de studiu al echilibrului corpurilor este bazată pe aplicarea principiului deplasărilor virtuale, deci şi în studiul deformaţiilor trebue să utilizăm acelaşi principiu.

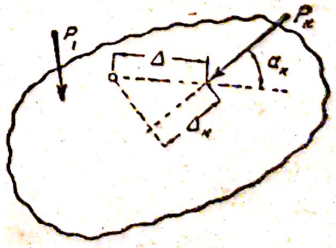


Fig. 308

Principiul lui Lagrange se formulează astfel: *dacă un sistem material oarecare se găseşte în echilibru sub acţiunea unor forţe care îl solicită, lucrul mecanic al acestor forţe, produs prin deplasările virtuale infinit mici compatibile cu legăturile sistemului, este egal cu zero.*

Dacă presupunem că asupra unui sistem oarecare indeformabil acţionează forţele P_1, P_2, P_3, ... care se echilibrează reciproc şi că

întregul sistem capătă o deplasare infinit mică Δ, atunci pe baza principiului deplasărilor virtuale avem :

$$\sum P_k \cos \alpha^k \Delta = 0$$

sau

$$\sum P_k \Delta_k = 0$$

în care $\Delta_k = \Delta \cos \alpha_k$ este deplasarea pe direcția forței P_k, produsă de deplasarea dată întregului sistem de către noul factor (fig. 308).

Principiul lui Lagrange este dedus pentru un corp care se găsește sub acțiunea unor forțe, fără a se ține seama de proprietățile elastice ale acestui corp. In cazul unui corp real, acest principiu trebue să fie modificat, introducând atât lucrul mecanic produs de forțele exterioare care acționează asupra corpului, cât și lucrul mecanic ce se desvoltă în interiorul corpului.

Dacă luăm drept un corp elastic o grindă simplu rezemată (fig. 309) deformată din cauza unei încărcări caracterizate prin forțele P_1 și P_2 constante în timpul deformării grinzii, atunci în momentul când grinda va intra în starea de echilibru elastic, forțele aplicate asupra grinzii vor efectua lucrul mecanic T, determinat de suma :

$$T = \sum P_k \Delta_k \qquad (132)$$

In general această sumă poate să cuprindă și lucrul mecanic efectuat de forțele provenite din greutatea proprie a grinzii. Deoarece toate forțele P și deplasările Δ sunt îndreptate în aceeași parte, lucrul mecanic efectuat nu poate fi egal cu zero ; între timp grinda, după cum s'a arătat mai sus, a intrat în stare de echilibru elastic, deci lucrul mecanic al forțelor exterioare trebue să fie echilibrat de un alt lucru mecanic.

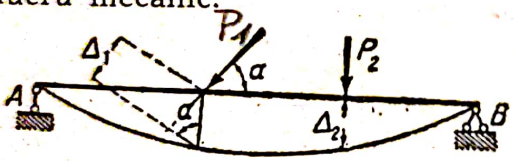


Fig. 309

In lipsa deplasărilor punctelor de reazim, a frecărilor la articulații, precum și a variațiilor de temperatură, existența lucrului mecanic de echilibrare poate fi explicat prin lucrul mecanic al forțelor interioare. Dacă notăm lucrul mecanic al forțelor interioare cu U, starea de echilibru elastic trebue să satisfacă condiția

$$T + U = 0 \quad \text{sau} \quad T = -U \qquad (133)$$

Deformațiile elastice ale construcțiilor au valoare finită și nu pot fi arbitrare, deoarece sunt legate între ele prin condițiile deplasărilor virtuale ale sistemului. Sub noțiunea de deplasări virtuale ale unui sistem se înțeleg acele deplasări care sunt compatibile cu condițiile legăturilor de reazim și de indeformabilitate. De exemplu într'o grindă cu zăbrele încărcată, deplasările virtuale se manifestă prin deplasarea nodurilor și deformarea unghiurilor dintre barele ce o alcătuesc, ceea ce este rezultatul deformării barelor propriu zise, care se datorește eforturilor ce se desvoltă în ele.

Deoarece toate construcțiile — cu rare excepții — sunt calculate în ipoteza că lucrează în limitele deformațiilor elastice, valoarea finală a deplasărilor virtuale ale acestor construcții este foarte mică în comparație cu dimensiunile principale ale construcției. De exemplu săgeata grinzilor simplu rezemate, a arcelor, precum și a grinzilor cu zăbrele se exprimă în fracții de ordinul miimilor în raport cu deschiderea lor etc.

Scanned with OKEN Scanner

§ 74. Expresia generalizată a lucrului mecanic al forţelor exterioare

Expresia lucrului mecanic al forţelor exterioare (132) adoptate ca bază, îşi păstrează aspectul pentru orice fel de încărcare şi deplasare, ceea ce se poate dovedi uşor prin analizarea unor cazuri particulare.

De exemplu dacă asupra unui sistem sau unei grinzi acţionează un moment, atunci acest moment poate să efectueze un lucru mecanic numai în cazul când secţiunea sau elementul la care se aplică va avea o rotire ce se datoreşte unei cauze oarecare (fig. 310).

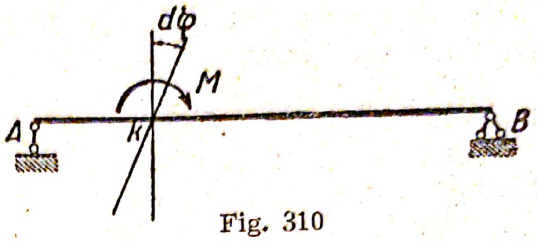


Fig. 310

Expresia lucrului mecanic se va scrie astfel :

$$T = M\, d\, \varphi = M\, \Delta .$$

în care $d\,\varphi$ este unghiul de rotire compatibil pentru sistemul dat. Acelaşi lucru se întâmplă şi în cazul când asupra sistemului acţionează un cuplu de forţe (fig. 311). In acest caz :

$$T = P\,(r'\,\Delta\,\varphi + r''\,\Delta\,\varphi) = P\,r\,\Delta\,\varphi = M\,\Delta .$$

Dacă sistemul este încărcat cu o sarcină uniform distribuită q kg/ml şi dacă punctul de aplicaţie al acestei încărcări va avea unele deplasări caracterizate prin dreapta ABC (fig. 312), atunci considerând întreaga încărcare împărţită în forţe concentrate de valoare $q\,d\,x$, putem exprima întregul lucru mecanic efectuat de aceste forţe, astfel :

$$T = \sum_a^b q\,d\,x\,y = q \sum_a^b y\,d\,x$$

Notând suprafaţa limitată de curba ABC pe lungimea încărcată prin Δ, aducem expresia lucrului mecanic la o formă comună cu expresia (132) :

$$T = q \sum_a^b y\,d\,x = q\,\Delta$$

Pentru ageneraliza toate concluziile ce urmează, convenim să notăm de aci înainte orice sarcină, inclusiv reacţiunile, cu litera S, atribuindu-i indicele respectiv, care arată punctul de aplicaţie sau grupul de forţe din care face parte, de exemplu :

S_a este sarcina în punctul a

$\sum S_k$ este suma forţelor din grupa k.

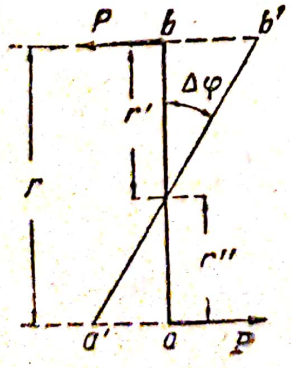


Fig. 311

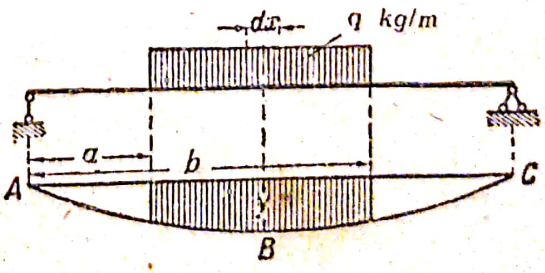


Fig. 312

Intru cât sub notaţia S vom înţelege orice fel de încărcare, aceasta poate fi exprimată în diferite unităţi : kg, kg.cm, kg/m etc.

Convenim de asemenea să notăm deplasările corespunzătoare acestor sarcini cu litera Δ, înțelegând prin aceasta deplasarea unghiulară sau liniară. Deoarece în raport cu desfășurarea calculelor, trebue să considerăm deplasările în diferite puncte și secțiuni ale sistemului, precum și deplasările provenite în urma diferitelor cauze, litera Δ va fi însoțită de doi indici, dintre care *primul va indica locul deplasării, iar al doilea cauza care a provocat-o;* de exemplu expresia Δ_{mn} va arăta că deplasarea este considerată din punctul m și este provocată de o cauză oarecare aplicată în punctul n.

Uneori vom fi obligați să variem această notare în sensul că primul indice va determina atât punctul de aplicație, cât și direcția după care se determină deplasarea sau deformația, iar al doilea va arăta cauza acestora. De exemplu notația Δ_{HV} va arăta că se consideră deplasarea punctului de aplicație al forței H pe direcția ei, provocată de acțiunea forței V; Δ_{Ht} va arăta că se consideră deplasarea punctului de aplicație al forței H în direcția ei, provocată de temperatura t.

Sensul oricărei combinații a indicilor va fi de altfel lămurit și prin explicațiile din text.

Prin introducerea unor astfel de notații generale ca S și Δ, putem să indicăm prin S nu numai forțe separate, ci și combinații de forțe, trebuind, astfel, ca în cazul din urmă, prin litera Δ să înțelegem deplasarea corespunzătoare acestei combinații. Această generalizare permite să se simplifice expresia lucrului mecanic al fortelor exterioare, care poate fi prezentată întotdeauna sub forma următorului produs:

$$T = \sum S_k \Delta_{kn}$$

§ 75. Expresia lucrului mecanic al forțelor interioare

După cum se știe, forțele interioare care apar într'un sistem plan oarecare se caracterizează prin efortul normal N, forța tăietoare sau tangențiala Q, momentul încovoietor M și momentul de torsiune M'.

Separând din corp sau din construcția dată un element infinit mic, de lungimea ds, putem să-l considerăm că se află sub acțiunea unor forțe interioare (fig. 313), care față de acest element pot fi considerate ca forțe exterioare.

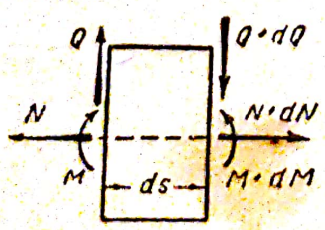


Fig. 313

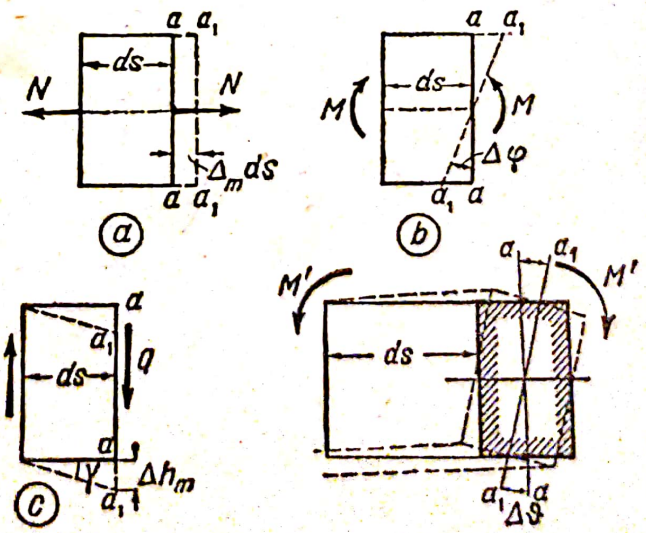


Fig. 314

Intru cât lungimea ds a elementului pe care l-am separat se consi-

deră infinit mică, creşterile respective dM, dN şi dQ de asemenea vor fi infinit mici, deci se poate admite că fiecare din elementele separate se va găsi sub acţiunea unor forţe egale şi opuse M, N şi Q. In ce priveşte forţele exterioare, dacă ele sunt concentrate, putem presupune întotdeauna că pe lungimea infinit mică a elementului, punctul de aplicaţie al forţei va cădea în dreptul uneia din secţiuni şi atunci această forţă nu va mai intra în ecuaţia de echilibru a elementului astfel separat ; în caz când aceste forţe sunt distribuite, atunci rezultanta lor faţă lungimea infinit mică a elementului va fi şi ea infinit mică şi se poate neglija.

Astfel elementul ds separat poate fi considerat ca un corp solid, aflat sub acţiunea forţelor N şi Q şi a momentelor M şi M', care faţă de element sunt forţe exterioare.

Pentru alcătuirea expresiei lucrului mecanic al acestor forţe şi momente, trebue să cunoaştem deplasările unghiulare şi liniare ale punctelor de aplicaţie ale acestor forţe şi momente.

Deformaţiile geometrice compatibile ale elementului ds pot fi provocate de efectul forţelor N_k, Q_k şi al momentelor M_k şi M'_k precum şi de efectul altor cauze (altă încărcare, temperatura). De aceea pentru a generaliza şi mai mult cazul, vom nota aceste forţe şi momente cu alt indice de exemplu m.

Sub acţiunea forţei axiale N, care provoacă o variaţie uniformă a lungimii tuturor fibrelor, alungirea fiecărei fibre va fi (fig. 314, a) :

$$\Delta\, ds_m = \frac{\sigma}{E}\, ds = \frac{N_m}{EF}\, ds$$

Sub acţiunea momentului încovoietor M, care provoacă rotirea uniformă a întregii secţiuni, valoarea acestei rotiri va fi (fig. 314 b) :

$$\Delta\varphi_m = \frac{M_m}{EI_m}\, ds$$

Sub acţiunea forţei tăietoare Q, solicitările tangenţiale se distribue uniform în secţiune şi depind de forma secţiunii. De aceea valoarea deformaţiei la alunecarea provenită din acţiunea forţei tăietoare, se consideră ca o medie şi se determină cu valoarea (fig. 314, c) * :

---

*) **Notă.** Din cauza distribuirii neuniforme a rezistenţelor tangenţiale şi a deplasării fibrelor din secţiune, lucrul mecanic al forţelor tăietoare se determină prin integrala :

$$\int_F \tau_m\, dF \cdot \frac{\tau_k}{G}\, ds$$

care se referă la toată secţiunea elementului. In distribuirea uniformă a reistenţelor tangenţiale în secţiune, ele se determină cu valorile :

$$\tau_m = \frac{Q_m\, S_z}{I\, b} \quad \text{şi} \quad \tau_k = \frac{Q_k\, S_z}{I\, b}$$

în care S_z este momentul static al părţii din secţiune până la fibra considerată, iar b este lăţimea secţiunii în dreptul acestei fibre.

Substituind aceste valori ale solicitărilor tangenţiale în integrală, obţinem următoarea expresie :

$$\int_\omega \frac{\tau_m\, \tau_k}{G}\, dF \cdot ds = \frac{Q_k \cdot Q_m}{GF}\, ds \int_\omega \frac{S_z^2\, F}{I^2\, b^2}\, dF = kQ_k \cdot \frac{Q_m}{GF} \cdot ds$$

$$\Delta h_m = k \frac{Q_m}{GF} \cdot ds$$

în care G este modulul transversal de elasticitate ; k un coeficient numeric care depinde de forma secţiunii ; pentru secţiunea dreptunghiulară $k = \frac{6}{5}$, pentru secţiunea triunghiulară $k = \frac{32}{27}$

Sub acţiunea momentului de torsiune, unghiul de rotire al secţiunii depinde de forma ei şi se determină prin valoarea (fig. 314, d)

$$\Delta \vartheta_m = k' \frac{M'_m}{GI} ds$$

Aceste deformaţii liniare şi unghiulare pot să producă unele deformaţii complexe, însă lucrul mecanic efectuat de forţele şi momentele arătate mai sus se determină întotdeauna prin produsul dintre ele şi deformaţia respectivă :

$$N_k \Delta_m ds ; Q_k \Delta h_m ; M_k \Delta \varphi_m ; M'_k \Delta \vartheta_m \qquad (135)$$

Forţele N_k, Q_k şi momentele M_k şi M'_k se consideră exterioare faţă de elementul de care ne ocupăm, de aceea dacă lucrul lor mecanic, după sensul deformaţiilor, se determină prin valori pozitive, atunci *rezultanta forţelor interioare ale elementului însuşi, care are întotdeauna o direcţie opusă direcţiei forţei exterioare sau momentului, efectuează un lucru mecanic negativ.*

Valoarea totală a lucrului mecanic interior se determină prin suma lucrurilor mecanice elementare, arătate mai sus.

In cele ce urmează ne vom ocupa de două categorii de lucru me-

---

In această expresie a lucrului mecanic, adusă la forma comună cu expresia lucrului mecanic al forţei N şi al momentului M, valorile Q_m, Q_k, G şi ds fiind constante sunt scoase înaintea semnului integralei şi se introduce coeficientul numeric :

$$K = \int_\omega \frac{S_z^2 F}{I^2 b^2} dF,$$

care depinde de forma secţiunii.

De exemplu pentru o grindă de secţiune dreptunghiulară, cu lăţimea b şi înălţimea h, în care

$$I = \frac{b h^3}{12}$$

$$F = b h,$$

$$d F = b d z,$$

z fiind distanţa fibrei dela axa secţiunii şi

$$Sz = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

obţinem

$$K = \int_\omega \frac{S^2 F}{I^2 b^2} dF = 2 \frac{bh \cdot b^2 \cdot b}{4b^2 \left(\frac{bh^3}{12} \right)^2} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}h} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)^2 dz = \frac{6}{5}$$

canic și anume: lucrul mecanic posibil sau virtual și lucrul mecanic efectiv.

§ 76. Expresia lucrului mecanic virtual în grinzile cu axa rectilinie

Prin această denumire vom presupune lucrul mecanic care apare în sistemele deja solicitate sub acțiunea unor încărcări noi, uneori fictive (forțe, temperatură, tasări etc.)

Pornim dela ipoteza că sistemul se găsește în stare de echilibru elastic sub acțiunea unor sarcini oarecare S_k, care au provocat în elementele sistemului unele eforturi și momente N_k, Q_k, M_k, valorile lor rămânând invariabile în funcție de timp.

Dacă acum acest sistem va fi acționat de o cauză oarecare, care va provoca deplasarea Δ_{km} a punctelor de aplicație ale sarcinilor S_k și deformarea elementelor Δa S_m, Δh_m, $\Delta\varphi_m$, atunci sarcinile exterioare S_k vor efectua un lucru mecanic pe deplasările virtuale compatibile Δ_{km} (fig. 315) care se exprimă prin suma:

$$T = \sum S_k \Delta_{km} \tag{136}$$

iar lucrul mecanic virtual respectiv al forțelor interioare ale sistemului se va scrie în felul următor:

$$-U = \sum \int N_k \Delta d s_m + \sum \int M_k \Delta \varphi_m + \sum k \int Q_k \Delta h_m \tag{137}$$

Deoarece expresia (136) a lucrului mecanic al forțelor exterioare și expresia (137) a lucrului mecanic al forțelor interioare se referă la același sistem aflat în stare de echilibru elastic, pe baza ecuației (133) putem scrie:

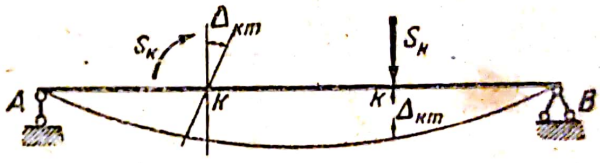


Fig. 315

$$\sum S_k \Delta_{km} = \sum \int N_k \frac{N_m ds}{E F} + \sum \int M_k \frac{M_m \cdot ds}{E \cdot I} + \sum k \int Q \frac{Q_m \cdot ds}{G \cdot F} \tag{138}$$

In barele sistemului în care forțele interioare se caracterizează numai prin eforturi axiale constante pe toată lungimea barelor și la care de obiceiu și secțiunea F a barei este constantă, expresia (138) se reduce la forma:

$$\sum S_k \Delta_{km} = \sum \frac{N_k N_m ds}{E F} \tag{139}$$

§ 77. Expresia lucrului mecanic efectiv în barele cu axa rectilinie

Acumularea lucrului mecanic al forțelor interioare poate fi rezultatul creșterii sarcinilor exterioare. In acest caz vom avea încărcări reale și deformații corespunzătoare acestor încărcări, de aceea lucrul mecanic produs de aceste sarcini se va numi *efectiv*, spre deosebire de

lucrul mecanic virtual (posibil) care rezultă în urma acțiunii unei încărcări imaginare.

Să considerăm un sistem elastic fără sarcină și presupunem că asupra acestui sistem începe să acționeze o sarcină oarecare S_k, crescând dela zero la valoarea S_k.

Această sarcină va provoca simultan deplasarea Δ pe direcția ei și apariția eforturilor interioare N_k, Q_k și a momentelor M_k cu deformațiile respective $\Delta_k\, ds$, $\Delta\ \varphi_m$ și $\Delta\ h_k$.

Pentru a deduce expresia generală a lucrului mecanic și a forțelor exterioare, presupunem că într'un moment oarecare, încărcarea care acționează asupra sistemului primește o creștere dS_k, ceea ce va provoca simultan o creștere a deformației $d\ \Delta_k$, în direcția acțiunii sarcinii. In urma acestei creșteri se va produce o acumulare de lucru mecanic dT, determinat astfel:

$$dT = (S_k + dS_k)\ d\ \Delta_k$$

Neglijând valoarea infinit mică de ordinul al doilea, dS_k putem admite:

$$dT = S_k\, d\ \Delta_k .$$

Lucrul mecanic total al forțelor exterioare se va determina prin integrala:

$$T = \int S_k\, d\ \Delta_k .$$

Rezolvarea acestei integrale este posibilă în cazul când se cunoaște relația dintre creșterea sarcinii și a deformației.

Când sarcina crește începând dela zero, deformația corpului în limitele de elasticitate se va mări proporțional cu creșterea sarcinii.

$$S_k = \alpha\ \Delta_k .$$

în care α este un coeficient în funcție de felul deformației.

În aceste condiții, expresia completă a lucrului mecanic se prezintă astfel:

$$T = \int_0^k S_k\, d\ \Delta = \frac{\alpha}{2}\Delta_k^2 = \frac{1}{2} S_k\, \Delta_k . \qquad (140)$$

Astfel, dacă admitem că *încărcarea crește dela zero până la valoarea ei totală, atunci în limitele deformațiilor elastice ale corpului, valoarea lucrului acumulat se determină prin jumătatea produsului dintre întreaga valoare a încărcării și valoarea deformației provocată de această încărcare.* Se poate admite că nerespectarea proporționalității liniare dintre deformațiile sistemului și creșterea încărcării, are loc numai în cazuri excepționale (la deformarea firelor, la comprimarea bilelor și a cilindrilor, la acțiunea simultană a incovoierii și compresiunii). De aceea expresia lucrului mecanic (140) are un vast câmp de aplicație în problemele de statica construcțiilor și stă la baza calculelor statice ale construcțiilor.

Paralel cu creșterea acțiunii forțelor exterioare asupra sistemului, vor crește treptat și eforturile interioare și momentele, precum și deformațiile corespunzătoare. Dacă această creștere are loc în limitele de

elasticitate ale materialului, lucrul mecanic al forţelor interioare se determină prin expresia:

$$-U=\frac{1}{2}\left[\sum\int N_k\,\Delta\,ds+\sum\int M_k\,\Delta\,\varphi_k+\sum_k\int Q_k\,\Delta\,h_k\right] \quad (141)$$

Intru cât ambele expresii (140 şi 141). se referă la acelaşi sistem aflat în stare de echilibru elastic, atunci din condiţia (144), suma acestor expresii este egală cu zero şi rezultă deci că:

$$\frac{1}{2}\sum S_k\,\Delta_{kk}=\frac{1}{2}\sum\int\frac{N_k^2}{EF}\,ds+\frac{1}{2}\sum\int\frac{M_k^2}{EI}\,ds+\frac{1}{2}\sum\int\frac{Q_k^2}{GF}\,ds \quad (142)$$

In sistemele cu bare, expresia (142) a lucrului mecanic efectiv al eforturilor interioare se reduce la forma:

$$\frac{1}{2}\sum S_k\,\Delta_{kk}=\frac{1}{2}\sum_0^1\frac{N_{ik}^2}{EF_i}\,s_i \quad (143)$$

în care: N_{ik}, S_i şi F_i sunt efortul, respectiv lungimea şi secţiunea unei bare oarecare a sistemului.

In ipoteza creşterii încărcărilor şi deformaţiilor începând dela zero, tot lucrul mecanic al forţelor interioare care se desvoltă odată cu această creştere, în limitele de elasticitate, are în orice moment o valoare tocmai suficientă pentru a echilibra lucrul mecanic al forţelor exterioare, iar la suprimarea acestora din urmă, tot lucrul mecanic se consumă pentru refacerea formei iniţiale a construcţiei descărcate. Din cele arătate rezultă că expresiile (141) şi (142) reprezintă valorile energiei potenţiale a sistemului.

§ 78. Proprietăţile energiei potenţiale

Menţionăm unele particularităţi ale expresiunii energiei potenţiale

1. Energia potenţială este o funcţie omogenă de gradul al doilea a forţelor exterioare şi a deformaţiilor produse de aceste forţe.

Orice deformaţie poate fi considerată ca suma deformaţiilor provocate de acţiunea fiecărei forţe S, iar fiecare din aceste deformaţii este proporţională cu forţa respectivă ds. Astfel se pot scrie următoarele relaţii:

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1&=a_{11}S_1+a_{12}S_2+\ldots+a_{1n}S_n\\ \Delta_2&=a_{21}S_1+a_{22}S_2+\ldots+a_{2n}S_n\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Delta_n&=a_n S_1+a_n S_2+\ldots+a_{nn}S_n\end{aligned}\right\} \quad (144)$$

Pe baza aceloraşi considerente fiecare încărcare exterioară poate fi privită ca funcţie de deplasare de forma $A\,\Delta_k$, deci fiecare încărcare S poate fi reprezentată ca o sumă de forma următoare:

$$\left.\begin{aligned}S_1&=A_{11}\Delta_1+A_{12}\Delta_2+\ldots+A_{1n}\Delta_n;\\ S_2&=A_{21}\Delta_1+A_{22}\Delta_2+\ldots+A_{2n}\Delta_n;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ S_n&=A_{n1}\Delta_1+A_{n2}\Delta_2+\ldots+A_{nn}\Delta_n;\end{aligned}\right\} \quad (145)$$

Scanned with OKEN Scanner

Folosind aceste expresii, egalitatea (140) poate fi reprezentată ca o sumă a lucrurilor mecanice efectuate de mai multe cauze sau, prin introducerea în ea a expresiei (144) numai în funcţie de sarcini sau introducând expresia (145) numai în funcţie de deformaţii.

In primul caz vom avea:

$$2U = a_{11} S_1^2 + a_{12} S_1 S_2 + \ldots a_{21} S_2 S_1 + a_{22} S_2^2 + \ldots + a_{mn} S_m^2 \quad (146)$$

In al doilea caz vom obţine:

$$2U = A_{11} \Delta_1^2 + A_{12} \Delta_1 \Delta_2 + \ldots + A_{21} \Delta_1 \Delta_2 + A_{22} \Delta_2^2 + \ldots A_{mm} \Delta_m^2 \quad (147)$$

Ambele aceste expresii confirmă ipoteza că energia potenţială este o funcţie omogenă de gradul al doilea a încărcărilor respectiv a deplasărilor.

De exemplu dacă considerăm o grindă simplu rezemată (fig. 316) solicitată simultan de forţa P şi de momentul M_a aceste solicitări vor provoca în grindă deformaţii ale căror valori calculate cu formulele din tratele de rezistenţa materialelor, vor fi:

Săgeata în dreptul sarcinii P

$$f_p = \frac{P l^3}{48 E I} \cdot a_{11} P;$$

$$f_m = -\frac{M a l^2}{16 E I} = a_{12} Ma$$

Unghiurile de rotaţie în direcţia momentului Ma

$$\varphi_{ap} = -\frac{P l_2}{16 E I} a_{21} P$$

$$\varphi_{am} = \frac{M_a l}{3 E I} = a_{22} M_a$$

Faţă de acestea, expresia energiei potenţiale se va scrie astfel:

$$U = \frac{1}{2} P (f_p + f_m) + \frac{1}{2} M_a (\varphi_{ap} + \varphi_{am} =$$

$$= \frac{1}{2} P^2 a_{11} + \frac{1}{2} P M_a a_{12} + \frac{1}{2} M_a P a_{21} + \frac{1}{2} M_a^2 a_{22}$$

După substituirea valorilor a_{11}, $a_{12} = a_{21}$, a_{22} şi reducerea termenilor asemenea obţinem:

$$U = \frac{l}{96 E I} (P^2 l^2 - 6 l P M_a + 16 M_a^2) \quad (148)$$

2. Energia potenţială este întotdeauna pozitivă. Aceasta rezultă din natura expresiei sale care se compune din pătratele valorilor eforturilor interioare şi ale momentelor.

Existenţa componentelor negative (148) arată că, din cauza acţiunii concomitente a două încărcări, poate să se obţină o oarecare scădere a energiei potenţiale faţă de suma energiilor potenţiale provocate separat de fiecare sarcină.

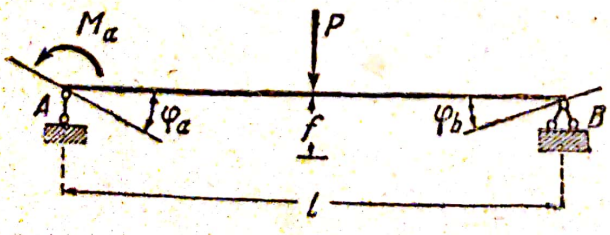


Fig. 316

3. Energia potenţială acumulată în sistem, sub influenţa totalităţii cauzelor interioare, nu este egală cu suma energiilor potenţiale calculate pentru fiecare cauză în parte.

Aceasta rezultă din faptul că *pătratul sumei a două valori nu este egal cu suma pătratelor lor. De aceea când considerăm acţiunea*

succesiva a două încărcări trebue să calculăm nu numai creşterea energiei potenţiale provenite din a doua încărcare ci şi a lucrului primei încărcări prin deformaţia provocată de încărcarea a doua.

De exemplu, dacă considerăm grinda reprezentată în fig. 316, mai întâi numai sub acţiunea încărcării P, adăugând ulterior încărcarea produsă de momentul M_a atunci acumularea de energie potenţială U din grindă va progresa în următoarea ordine:

a) sub acţiunea încărcării P, valoarea creşte dela zero până la valoarea finală.

$$U_1 = \frac{1}{2} P \cdot f_p ;$$

b) sub acţiunea momentului aplicat M_a a cărui valoare creşte dela zero până la valoarea finală şi din încărcarea P care se găseşte în acelaşi timp pe grindă

$$U_2 = \frac{1}{2} M_a \varphi_{am} - P f_m$$

Energia potenţială totală din grindă, acumulată în acest fel, va fi:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} P f_p + \frac{1}{2} M_a \varphi_{am} - P f_m$$

Substituind în expresiunile de mai sus în locul săgeţilor f_p, f_m şi a unghiului de rotire φ_{am} valoarea lor şi făcând reducerea termenilor asemenea, obţinem:

$$U = \frac{1}{96 E I} (P^2 l^2 + 16 M_a^2 - 6 l P M_a).$$

Această expresie a cantităţii de energie corespunde exact cu valoarea ei (148) obţinută, considerând grinda încărcată simultan cu P şi M_a.

Probleme şi exerciţii

94. Să se determine cantitatea de energie potenţială acumulată într'o grindă sub acţiunea unei sarcini P aplicată pe această grindă (fig. 317), ţinând seama de influenţa momentului şi de forţa tăietoare.

Indicaţii. Pentru încărcarea dată, ecuaţiile momentului şi a forţelor tăietoare vor avea expresii diferite pentru fiecare secţiune. De aceea termenii expresiei energiei potenţiale, care caracterizează influenţa momentului şi a forţei tăietoare, trebue să se compună din două integrale, cu limitele respective de integrare.

După ce vom stabili cantitatea totală de energie potenţială, trebue să determinăm influenţa forţei tăietoare în comparaţie cu a momentului. Pentru aceasta trebue să analizăm cazul particular al unei grinzi, de exemplu cu secţiune dreptunghiulară (de lăţimea b şi înălţimea h) şi luând

$$k = \frac{6}{5}; \quad G = 0{,}4\, E.$$

După introducerea tuturor datelor în expresia energiei potenţiale, aceasta va avea următoarea formă:

$$U = \frac{P a^2 (l - a)}{2 E l b h} \left[4 \frac{a (l - a)}{h^2} + 3 \right]$$

Alegând valorile numerice pentru a, exprimate în funcţie de deschidere şi transformând partea cu parentezele mari, se poate urmări influenţa forţei tăietoare după relaţia:

$$m = \frac{3 h^2}{4 a (l - a)} \cdot 100$$

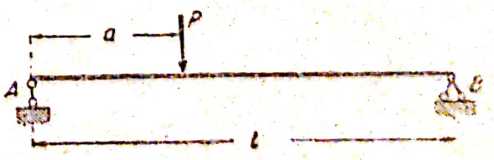


Fig. 317

Această relaţie se obţine în funcţie de raportul h : l.

Pentru $a = (l - a) = 0{,}5\ l$ $\qquad m = 3\ \frac{h^2}{l^2}\ 100$

Când $\frac{h}{l} = \frac{1}{5}$ $\qquad m = 12\%$

Când $\frac{h}{l} = \frac{1}{7}$ $\qquad m = 6{,}1\%$

Când $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$ $\qquad m = 3\%$

Rezultă că influența forței tăietoare crește odată cu sporirea înălțimii grinzii.

95. Să se determine cantitatea de energie potențială dintr'un sistem cu cadre care se găsește sub acțiunea unei forțe concentrate (fig. 318), ținând seamă numai de influența efortului axial și a momentului. Secțiunile barelor sunt aceleași pe toată lungimea.

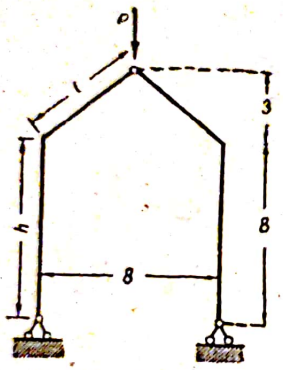


Fig. 318

Indicații. Existența simetriei complete permite să ne limităm la studiul unei singure jumătăți.

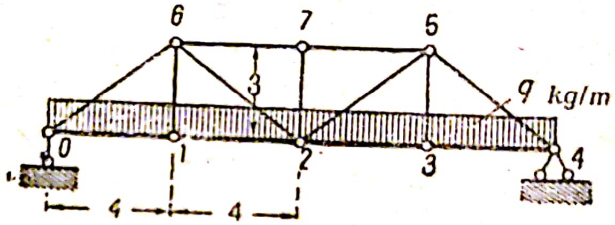


Fig. 319

$$U = \frac{1}{EF}\left(N_h^2\ h + N_c^2\ c\right) + \frac{1}{EI}\left[\int_0^h M^2\ ds + \int_0^c M^2\ ds\right]$$

96. Să se determine cantitatea de energie potențială din grinda cu zăbrele reprezentată în fig. 319.

Indicații. Cantitatea de energie potențială trebue să fie determinată prin suma cantităților acumulate în fiecare bară (143); de aceea pentru calcule se recomandă întocmirea unui tablou după exemplul de mai jos.

Prin însumarea cifrelor din ultima coloană, se determină cantitatea de energie potențială.

97. Folosind relația dintre energia lucrului mecanic a forțelor exterioare și aceea a forțelor interioare, să se determine unghiul de rotire al

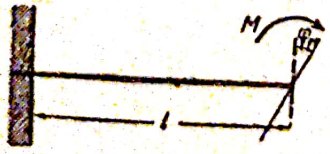


Fig. 320

N-rul de ordine al elementelor	F cm²	S cm	N	N²	$\frac{N^2 S}{EF}$
0–1	F	400			
0–2	F	400			
0–6	$\frac{1}{2}F$	500			
6–2	$\frac{1}{2}F$	500			
1–6	$\frac{1}{2}F$	300			
6–7	F	400			

secțiunii de'a extremitatea grinzii (fig. 320) solicitată de un moment aplicat în această secțiune.

Scanned with OKEN Scanner

Indicații. Pentru calcul trebuie să folosim relația:

$$\frac{1}{2} M \Delta_{\varphi m} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} \cdot ds.$$

Valoarea unghiului de rotire din expresia lucrului mecanic al forțelor exterioare este necunoscuta căutată.

Intrebare. Dece nu se poate aplica acest procedeu la calculul unghiului de rotire sau de deformație într'un punct oarecare al grinzii?

98. Să se determine variația distanței între punctele a și b ale sistemului reprezentat în fig. 321 și solicitat de forțele P, aplicate în aceste puncte.

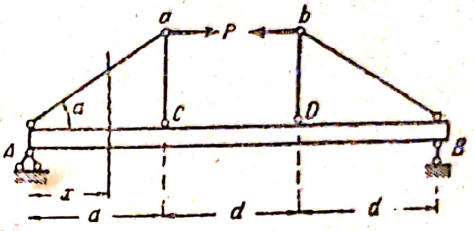


Fig. 321

Indicații. Sistemul considerat este un sistem mixt și se compune din grinda AB și piesele articulate AaC și BbD. Energia potențială se determină ținând seama de influența eforturilor axiale și a momentelor.

După aceste date trebue să se alcătuiască expresia energiei potențiale a sistemului:

$$U = \sum \frac{N^2}{2\,EF} s + \int \frac{M^2}{2\,EI} ds$$

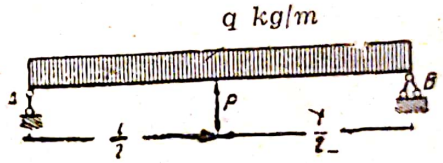


Fig. 322

In fiecare element trebue să ținem seama de influența efortului axial și a momentului.

Lucrul mecanic al forțelor exterioare, care se efectuează de către forța P în direcția ei, se determină prin expresia:

$$T = \frac{1}{2} P (\Delta_a + \Delta_b) = \frac{1}{2} P \Delta_{ab}$$

Tablou de calcul

Denumirea elementelor	F cm²	Lungimea S în cm	Efortul N	Momentul M
Aa și Bb	F	$d \cos \alpha$		
aC „ bD	F	$d \operatorname{tg} \alpha$		
AC „ BD	F_1	d		
CD	F_1	d		

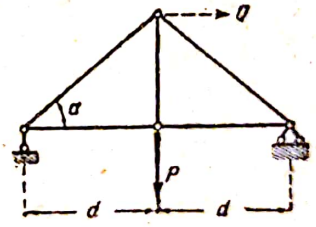


Fig. 323

99. Să se determine creșterea energiei potențiale într'o grindă care fiind încărcată cu o sarcină uniform distribuită primește, ca încărcare suplimentară o forță concentrată P aplicată în mijlocul deschiderii (fig. 322).

100. Să se determine creșterea energiei potențiale în grinda cu zăbrele (fig. 323), care fiind încărcată inițial cu sarcina concentrată P, aplicată la mijloc, primește o încărcare suplimentară, sub forma unei forțe orizontale Q.

§ 79. Expresia lucrului mecanic la grinzile curbe

Dacă axa barei este curbă, un element separat din bară despărțit prin două secțiuni normale pe axa ei, are forma unei pene, iar fibrele ei au lungimi diferite (fig. 324). Aceasta influențează deformațiile în raport cu înălțimea secțiunii. Să analizăm separat deformațiile elementului ce se găsește sub acțiunea forțelor N_m și Q_m și a momentului încovoietor M_m.

Scanned with OKEN Scanner

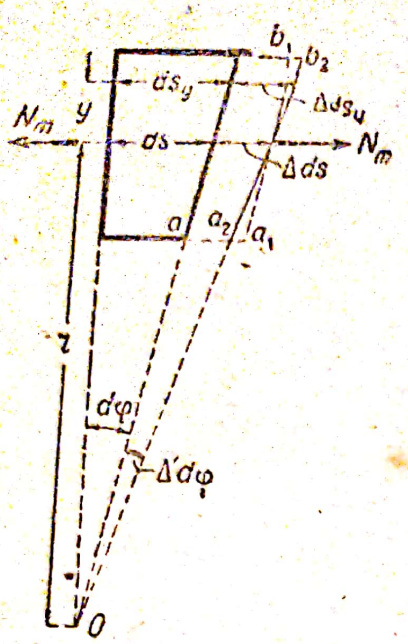


Fig. 324

1. Când asupra elementului ds al unei bare curbe acționează efortul axial N_m, deformația elementului se caracterizează prin deplasarea planului ab în poziția $a_2\ b_2$, iar deformarea unei fibre oarecare ds_y, care se găsește la distanța y dela fibra axială, se determină prin expresia *)

$$\Delta\ ds_y = \frac{N_m}{EF}\left(1 + \frac{y}{r}\right) ds$$

Deformația elementului poate fi considerată ca formată din două deplasări ale planului ab și anume:

a) mai întâi prin deplasarea liniară în poziția $a_1\ b_1$ egală cu alungirea simplă a fibrei axiale,

$$\Delta\ ds_N = \frac{N_m \cdot ds}{E\,F};$$

b) apoi prin rotire în poziția $a_2\ b_2$ care se determină cu expresia:

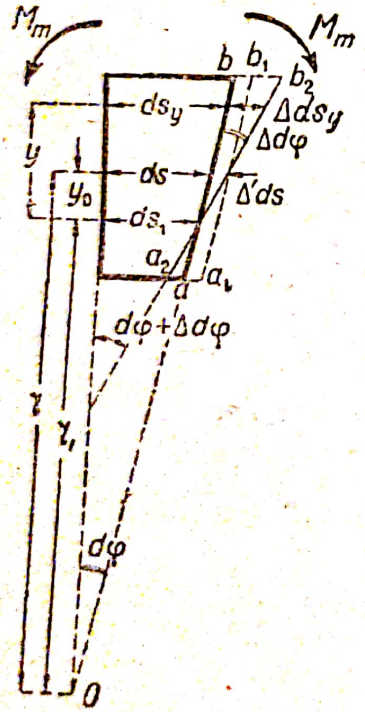


Fig. 325

$$\Delta\ d\ \varphi_1 = \frac{N_m \cdot ds}{E\,F r}$$

2. Când asupra elementului acționează un moment, planul secțiunii elementului trece în poziția $a_2\ b_2$ (fig. 325).

La această deplasare, axa neutră iese din planul axial al elementului, iar fibra axială ds capătă alungirea $\Delta'\ ds$. Această deformație a elementului poate fi considerată ca fiind compusă din două deplasări: din deplasarea liniară cu valoarea $\Delta\ ds_m$ a planului ab, paralel cu poziția lui anterioară și pe urmă din rotire cu unghiul $\Delta\ d\ \varphi_m$.

După cum se știe din cursul de rezistența materialelor**) deformarea unghiulară la încovoierea unei bare cu axa curbă se determină prin expresia:

$$\Delta\ d\ \varphi_m = \frac{M ds_o}{E\,I'_z} = \frac{M r_1}{E\,I'_z\,r} \cdot ds.$$

---

*) **Notă.** *N. M. Beleaiev.* „Rezistența materialelor", ediția 1945, pag. 559. *S. P. Timoshenko,* „Rezistența materialelor" partea 2-a, ediția 1945, pag. 65.

) **Notă. *N. M. Beleaiev* „Rezistența materialelor" ediția 1945, pag. 560. *I. P. Procofiev* „Teoria construcțiilor", partea I-a, ediția 1939, pag. 234.

Scanned with OKEN Scanner

în care I'_z este momentul de inerție convențional care se determină prin :

$$I'_z = \int_F \frac{y^2}{1 + \frac{y}{r}} dF = r_1 S_o$$

în care S_o este momentul static al secțiunii transversale în raport cu axa neutră.

La deplasările mici ale planului neutru din planul axei barei, ceea ce are loc chiar pentru valorile $r > 4h$, în care h este înălțimea secțiunii, putem să admitem că $r = r_1$ și $I'_z = I_z$ și atunci valoarea deformației unghiulare se transformă astfel :

$$\Delta d \varphi_m = \frac{M}{EI_z} \cdot ds,$$

obținându-se o expresie analoagă aceleia în cazul încovoierii unei bare drepte.

Valoarea alungirii fibrei axiale, provocată de încovoiere se determină cu valoarea*) :

$$\Delta ds_m = \frac{Mds}{EFr}.$$

3. Acțiunea forței tăietoare provoacă numai alunecarea secțiunii și nu provoacă nici alungirea fibrei axiale, nici rotirea secțiunii. Influența curburii asupra variației valorii alunecării poate fi neglijată și se poate lua egală cu valoarea deplasării în cazul încovoierii unei bare drepte.

Astfel dacă în secțiunile unei bare curbe se produc eforturi interioare N_k, Q_k și momentul M_k și dacă în această bară vor apare noi deformații provocate de noi eforturi N_m și Q_m și momentul M_m, atunci creșterea lucrului mecanic interior al fiecărui element infinit mic se va exprima cu suma următorilor termeni :

$$-dU = N_k (\Delta ds_N + \Delta ds_M)_m + M_k (\Delta d \varphi_N + \Delta d \varphi_M)_m + Q_k \Delta h_m.$$

Față de aceasta, expresia lucrului mecanic virtual în bară cu axa curbă, se va scrie astfel :

$$\sum S_k \Delta_{km} = \sum \int N_k \frac{N_m}{EF} ds + \sum \int N_k \frac{M_m}{EFr} ds +$$

$$+ \sum \int M_k \frac{M_m r_1}{E I' r} ds + \sum \int M_k \frac{N_m}{EF\rho} ds + k \sum \int Q_k \frac{Q_m}{GF} ds \quad (155)$$

Valorile $\frac{r_1}{r}$ și I' care intră în această expresie depind de raportul r/h (h este înălțimea secțiunii grinzii) ; când $r > 4h$ se poate con-

*) **Notă.** Vezi indicațiile dela pag. 276 (anterioară).

sidera*) că $r_1 = r$ și $I' = I$. In acest caz, expresia lucrului virtual se simplifică astfel:

$$\sum S_k \Delta_{km} = \sum \int N_k \frac{N_m}{EF} ds + \sum \int N_k \frac{M_m}{EFr} ds +$$

$$+ \sum \int M_k \frac{M_m}{EI} ds + \sum \int M_k \frac{N_m}{EFr} ds + k \sum \int Q_k \frac{Q_m}{GF} ds \quad (156)$$

Aceasta diferă de expresia analoagă pentru barele cu axa dreaptă (138) prin termenul al doilea și al patrulea.

Expresia energiei potențiale a barei curbe cu raza $r > 4\ h$ se simplifică și se aduce la următoarea formă:

$$V = \frac{1}{2} \sum \int \frac{N_k^2}{EF} ds + \frac{1}{2} \sum \int \frac{M_k^2}{EI} ds + \sum \int \frac{N_k M_k}{EFr} ds +$$

$$+ \sum \frac{k}{2} \int \frac{Q_k^2}{GF} ds \quad (157)$$

§ 80. Teorema reciprocității lucrului mecanic (Teorema lui Betti)

La alcătuirea expresiei lucrului virtual, am pornit dela ipoteza că un sistem elastic care se găsește sub acțiunea sarcinilor S_k capătă noi deformații Δ_{km} provocate de acțiunea noilor încărcări S_m. In această ipoteză, lucrul virtual se determină prin expresia:

$$\sum S_k \Delta_{km} = \sum \int N_k \frac{N_m}{EF} ds +$$

$$+ \sum \int M_k \frac{M_m}{EI} ds + k \sum \int Q_k \frac{Q_m}{GF} ds \quad (158)$$

în care N_k, Q_k și M_k sunt forțele interioare, respectiv momentul, provocate în sistem de acțiunea primei încărcări și N_m, Q_m și M_m sunt forțele interioare, respectiv momentul, provocate de acțiunea încărcării a doua.

Partea din dreaptă acestei expresii nu se va schimba în valoare dacă o vom înlocui cu factorii:

$$\sum \int N_m \frac{N_k}{EF} ds + \sum \int M_m \frac{M_k}{EI} ds + k \sum \int Q_m \frac{Q_k}{GF} ds$$

însă această schimbare a factorilor modifică sensul părții din stânga și anume: încărcările S_m care provoacă eforturile interioare N_m, Q_m și M_m după sensul deplasării devin sarcini inițiale ale sistemului, iar sarcinile S_k devin sarcini secundare (în ordinea aplicării). Astfel, dacă vom nota cu Δ_{mk} deplasările provocate de acțiunea încărcării S_k pe direcția sarcinilor S_m, atunci după sensul deplasării vom avea:

$$\sum S_m \Delta_{mk} = \sum \int N_m \frac{N_k}{EF} ds +$$

$$+ \sum \int M_m \frac{M_k}{EI} ds + k \sum \int Q_m \frac{Q_k}{GF} ds \quad (159)$$

*) **Notă.** *Timoshenko.* „Rezistența materialelor", Ediția 1929 cap. XVI pag. 390.

Scanned with OKEN Scanner

Din comparaţia expresiilor (158) şi (159) rezultă că :

$$\sum S_k \Delta_{km} = \sum S_m \Delta_{mk} \qquad (160)$$

In aceasta constă *teorema reciprocităţii lucrului mecanic.*

Dacă vom conveni să considerăm două cazuri de încărcare succesivă a sistemului cu sarcini primare şi secundare (S_k şi S_m) care provoacă deplasările Δ_{km} şi Δ_{mk}, atunci relaţia dedusă se va formula astfel :

Lucrul virtual al încărcărilor, produs de forţele primare prin deplasările corespunzătoare, provocate de forţele secundare este egal cu lucrul virtual produs de sarcinile secundare prin deplasările corespunzătoare, provocate de forţele primare.

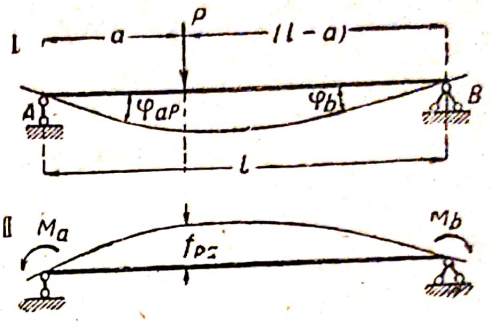


Fig. 326

Această teoremă este cunoscută sub denumirea de *teorema lui Betti* şi are un vast câmp de aplicaţie la calculul sistemelor static nedeterminate, uşurând şi generalizând metodele de alcătuire a ecuaţiilor suplimentare.

Să lămurim sensul acestei teoreme cu un exemplu simplu considerând o grindă simplu rezemată (fig. 326) în ipoteza că este încărcată în primul rând cu forţa P, iar în al doilea rând cu momentele M_a şi M_b.

Din cursul de rezistenţa materialelor se cunoaşte că unghiurile de rotire ale secţiunilor din dreptul reazimelor provocate de acţiunea sarcinii P, vor fi :

$$\varphi_{ap} = - \frac{Pa\,(l-a)\,(2\,l - a)}{6\,l\,E\,I},$$

$$\varphi_{bp} = \frac{Pa\,(l^2 - a^2)}{6\,l\,E\,I}$$

Din acelaşi curs se ştie că săgeata la distanţa a dela reazimul din stânga, provocată de acţiunea momentelor M_a şi M_b, aplicată în secţiunile din dreptul reazimelor va fi :

$$f_p = (f_{pa} + f_{pb}) =$$

$$= - \frac{a\,(l-a)}{6\,l\,E\,I} \left[M_a\,(2l - a) + M_b\,(l + a) \right]$$

Folosind aceste elemente, alcătuim expresia lucrului virtual, în cele două ipoteze :

$$\sum S_k \Delta_{km} = - P\,(f_{pa} + f_{pb}) =$$

$$= - P\,\frac{a\,(l-a)}{6\,l\,E\,I} \left[M_a\,(2\,l - a) + M_b\,(l + a) \right];$$

$$\sum S_m \Delta_{km} = - M_a\,\varphi_{ap} - M_b\,\varphi_{pb} =$$

$$= - M_a\,\frac{P\,a\,(l-a)\,(2\,l-a)}{6\,l\,E\,I} - M_b\,\frac{P\,a\,(l^2 - a^2)}{6\,l\,E\,I} =$$

$$= - \frac{P\,a\,(l-a)}{6\,l\,E\,I} \left[M_a\,(2\,l - a) + M_b\,(l + a) \right]$$

După cum şi era de aşteptat primele părţi ale acestor ecuaţii sunt egale între ele.

Scanned with OKEN Scanner

§ 81. Teorema reciprocității deplasărilor (Teorema lui Maxwell)

Această teoremă poate fi considerată ca o consecință a teoremei reciprocității lucrului.

Intr'adevăr, după teorema reciprocității lucrului (160) avem :

$$\sum S_k \Delta_{km} = \sum S_m \Delta_{mk} .$$

Insă această teoremă nu-și pierde aplicațiunea în cazul când, în loc de un șir de sarcini din prima încărcare S_k și din a doua încărcare S_m, vom considera numai câte o singură sarcină.

$$S_k \Delta_{km} = S_m \Delta_{mk} .$$

Să presupunem acum că încărcările S_k și S_m indiferent de mărimea lor sunt *numeric egale ;* atunci, reducând factorul comun din amândoi membrii ai ecuației obținem :

$$\Delta_{km} = \Delta_{mk} \qquad (161)$$

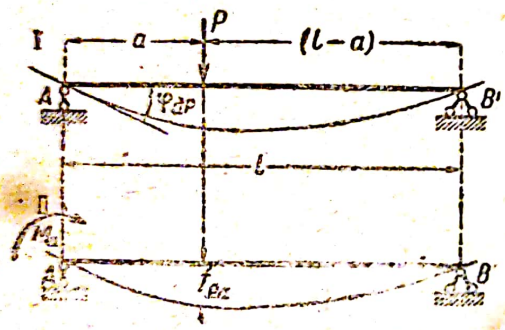


Fig. 327

de unde rezultă, că *independent de mărimea lor, aceste deplasări vor fi numeric egale.* In aceasta constă teorema referitoare la reciprocitatea deplasărilor care se formulează în felul următor : *dacă sarcina primară este egală numeric cu cea secundară, deplasarea provocată de sarcina secundară pe direcția sarcinii primare este numeric egală cu deplasarea provocată de încărcarea primară pe direcția sarcinii secundare.*

Să lămurim sensul acestei teoreme cu un exemplu simplu, în care scop considerăm grinda simplă rezemată din fig 327, încărcată în primul rând cu sarcina $P = C$ kg aplicată la distanța a dela reazimul din stânga și în al doilea rând cu momentul $M_a = C$ kgm aplicat în reazimul din stânga. Ambele sarcini sunt numeric egale.

Din cursul de rezistența materialelor se știe că unghiul de rotire al secțiunii φ_{ap} în dreptul reazimului, provocat de acțiunea sarcinii P este egal cu :

$$\varphi_{ap} = -\frac{P_a (l-a)(2l-a)}{6 l E I} = -\frac{C_a (l-a)(2l-a)}{6 l E I}$$

Din același curs se cunoaște că săgeata f_{pa} din punctul aflat la distanța a dela reazimul din stânga, provocată de acțiunea momentului M_a, aplicat la reazim are valoarea :

$$f_{pa} = -\frac{M_a (l-a)(2l-a)}{6 l E I} = -\frac{C_a (l-a)(2l-a)}{6 l E I}$$

Comparând expresiile lui φ_{ap} și f_{pa} se vede că părțile din dreapta a acestor expresii sunt egale, deci :

$$\varphi_{ap} = f_{pa}$$

însă dimensiunile lor rămân diferite.

Scanned with OKEN Scanner

Această teoremă ușurează simțitor determinarea deformațiilor și calculul sistemelor static nedeterminate, deoarece din ea rezultă că *deplasările cu aceleași indicii sunt numeric egale* deci aceste deplasări se pot substitui între ele.

In afară de aceasta, teorema de mai sus permite uneori înlocuirea unui calcul complicat al deplasării Δ_{mk} cu un calcul mai simplu al deplasării Δ_{km}, ceea ce ușurează simțitor munca.

CAPITOLUL 17

DETERMINAREA ANALITICĂ A DEPLASĂRILOR

§ 82. Expresia deplasărilor sistemelor (formula lui Mohr—Maxwell)

Presupunem că un sistem cu secțiuni pline, în care urmează să se determine deplasările, se găsește sub acțiunea unei încărcări oarecare S_m, care provoacă în secțiunile lui, eforturile interioare N_m, Q_m și momentul M_m. Să considerăm același sistem sub acțiunea unei sarcini virtuale S_k, dirijată pe direcția deplasării căutate. Această sarcină va provoca eforturile N_k, Q_k și momentul N_k. Cu aceste date lucrul virtual al sarcinii k pentru deplasările provocate de sarcinile m, se va scrie în felul următor:

$$S_k \Delta_{km} = \sum \int N_k \frac{N_m}{EF} ds + \sum \int M_k \frac{M_m}{EI} ds + k \sum \int Q_k \frac{Q_m}{GF} ds.$$

Să presupunem că sarcina virtuală este egală cu unitatea $S_k = 1$. Atunci expresia lucrului virtual va avea forma:

$$1 \Delta_{km} = \sum \int \overline{N}_k \frac{N_m}{EF} ds + \sum \int \overline{M}_k \frac{M_m}{EI} ds + k \sum \int \overline{Q}_k \frac{Q_m}{GF} ds \quad (162)$$

în care $\overline{N}_k$, $\overline{Q}_k$ și $\overline{M}_k$ sunt eforturile interioare din secțiunile sistemului, provocate de sarcina unitară.

Expresia (162) servește pentru a determina direct deplasarea în punctul sau în secțiunea considerată provocată de acțiunea încărcării date. Această expresie este cunoscută sub denumirea de formula lui Mohr—Maxwell. După această formulă se obține valoarea deplasării măsurată în unități corespunzătoare cauzei ce provoacă deplasarea: dacă $\overline{S}_k$ este o forță, atunci Δ_{km} se va măsura în unități de lungime; dacă $\overline{S}_k$ este un moment, atunci Δ_{km} este un număr abstract (reprezentând o rotație).

De exemplu se cere să determinăm rotirea secțiunii din dreptul reazimului din stânga al unei grinzi simplu rezemate, încărcată cu sarcini uniform distribuite (fig. 328). Pentru determinarea rotirii necunoscute, considerăm grinda sub acțiunea unui moment virtual $M_a = 1$ (fig. 328). Incărcarea reală va provoca în secțiunile grinzii următoarele momente:

$$M = \frac{1}{2} q x (l - x);$$

încărcarea virtuală produce în aceleași secțiuni momentele $M = \frac{l - x}{l}$. Influența forțelor tăietoare se neglijează. Cu aceste date, valoarea rotirii căutate se determină din formula (132) și se va scrie astfel:

$$\Delta_{km} = \varphi_{aq} = \frac{1}{EI} \int_0^l \frac{q}{2l} x (l - x)^2 \, dx = \frac{q l^3}{24 EI}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul când se determină *deplasările sistemelor cu zăbrele*, în secțiunile cărora momentul și forța tăietoare sunt egale cu zero, formula (162) se va modifica în consecință, devenind:

$$\Delta_{km} = \sum \frac{\overline{N}_k N_m}{EF} s \qquad (163)$$

Astfel, determinarea deplasărilor într'un sistem, se face considerând sistemul sub acțiunea unei solicitări virtuale egală cu unitatea.

Să analizăm câteva cazuri caracteristice utilizate în calculele de solicitări unitare.

1. Dacă se determină deplasarea liniară a unui punct oarecare al unui sistem (deplasarea absolută), se așază în direcția deplasării căutate o forță egală cu unitatea. De altfel forța poate avea direcția definită prin direcția deplasării, însă trebue să avem în vedere, că dacă la sfârșitul calculelor semnul deplasării este negativ, aceasta înseamnă că direcția reală a deplasării este îndreptată în partea contrară sensului adoptat pentru acțiunea forței.

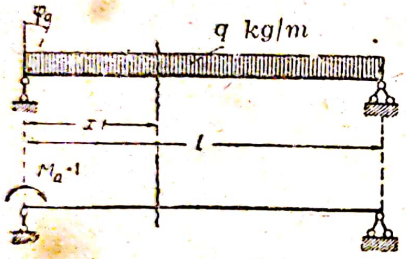


Fig. 328

2. In cazul când se determină variația distanței între două puncte a și b ale unui sistem (deplasarea relativă) — în scopul simplificării calculelor — trebue să aplicăm în aceste puncte două forțe unitare de sens opus (fig. 329). Fiecare din aceste forțe, va determina deplasările punctului de aplicație; însumând aceste două deplasări, determinăm variația necunoscută a distanței a — b.

Deplasarea pe direcția forței unitare aplicată în punctul a, se va scrie astfel:

$$\Delta_{am} = \int \overline{N}_a \Delta ds_m + \int \overline{M}_a \Delta \varphi_m + k \int \overline{Q}_a \Delta h_m$$

Deplasarea pe direcția forței unitare aplicată în punctul b, va fi:

$$\Delta_{bm} = \int \overline{N}_b \Delta ds_m + \int \overline{M}_b \Delta \varphi_m + k \int \overline{Q}_b \Delta h_m$$

Insumând aceste deplasări obținem deplasarea totală:

$$\Delta_{abm} = (\Delta_{am} + \Delta_{bm}) = \int (\overline{N}_a + \overline{N}_b) \Delta ds_m + \int (\overline{M}_a + \overline{M}_b) \Delta \varphi_m + k \int (\overline{Q}_a + \overline{Q}_b) \Delta h_m.$$

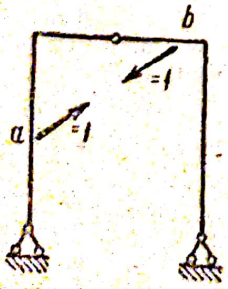


Fig. 329

Din ultima expresie rezultă că deplasarea totală poate fi calculată din suma eforturilor și momentelor interioare provocate de acțiunea simultană a forțelor unitare, aplicate în punctele a și b.

Introducerea simultană în calcul a două forțe unitare, simplifică simțitor calculele.

3. La determinarea rotirii secțiunii într'un sistem cu secțiune plină, se aplică în secțiunea considerată, după cum s'a arătat mai sus, un moment unitar virtual.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă trebue să determinăm însă rotirea întregii bare a sistemului față de axa coordonatelor, de exemplu bara unei grinzi cu zăbrele sau a unui cadru, atunci în loc de momentul unitar, se introduce un cuplu cu un moment unitar și anume: la extremitățile barei a cărei rotire urmează să se stabilească (fig. 329), se aplică două forțe concentrate determinate din condiția:

$$pd = 1, \quad \text{de unde} \quad p = \frac{1}{d}$$

în care d este lungimea barei.

Alegerea direcției momentului precum și a cuplului pot fi arbitrare, însă trebue să avem în vedere că semnul negativ, care se poate obține în urma calculelor, indică cum că rotirea reală a secțiunii este îndreptată în sens opus momentului sau a cuplului pe care l'am considerat.

4. Dacă se determină variația unghiului între două secțiuni ale unui sistem cu secțiune plină sau între două bare, se aplică în aceste secțiuni două momente unitare egale și de sens contrar; în cazul barelor se aplică două cuple egale de sens opus (fig. 330, unghiul α)

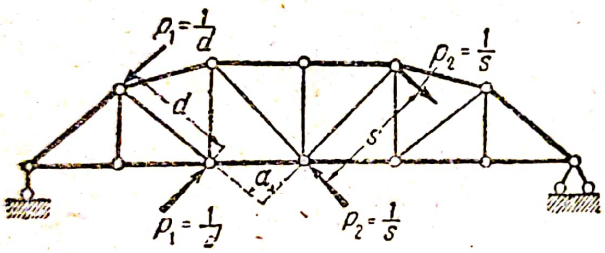


Fig. 330

$$p_1 = \frac{1}{d} \quad \text{și} \quad p_2 = \frac{1}{s}$$

De obiceiu, sensul momentelor și al cuplurilor se alege în așa fel, încât acțiunea lor să producă creșterea unghiului între secțiunile sau barele considerate. Dacă rezultatul calculelor va avea semnul negativ, înseamnă că unghiul se micșorează.

Probleme și exerciții

101. Să se determine unghiul de rotire φ_c al secțiunii transversale în grinda reprezentată în fig. 331 și încărcată cu sarcini uniform distribuite.

102. Considerând numai influența momentului, să se determine deplasarea punctului pe direcția cc și bara — arătată în fig. 332 — care se găsește sub acțiunea forței P.

Indicații. Rezolvarea problemei se simplifică simțitor,

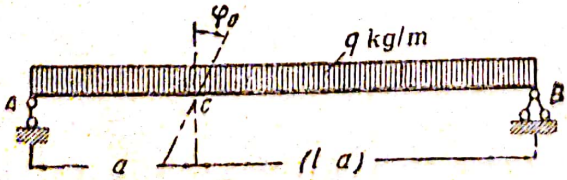


Fig. 331

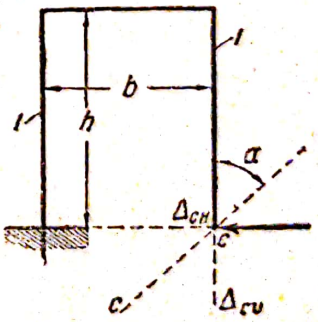


Fig. 332

dacă deplasarea căutată se consideră ca rezultatul însumării a două deplasări ale punctului c pe direcția verticală Δ_{cv} și orizontală Δ_{cH}:

$$\Delta_c = \Delta_{cv} \cos \alpha + \Delta_{cH} \sin \alpha$$

Scanned with OKEN Scanner

Deplasările Δ_{CV} și Δ_{CH} se calculează independent cu formula (162).

103. Să se determine variația unghiului din cheia unui arc cu trei articulații reprezentat în fig. 333 care se găsește sub acțiunea unei sarcini concentrate.

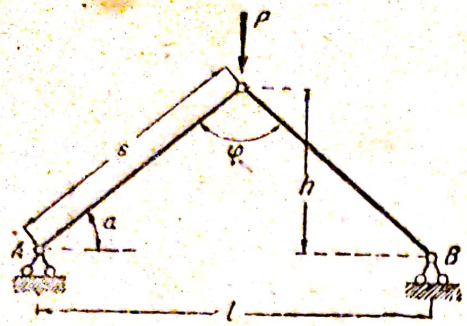


Fig. 333

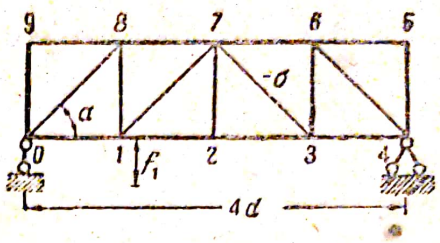


Fig. 334

Indicații. Variația unghiului este o deformație unghiulară, deci fără dimensiuni, sistemul trebue să fie considerat sub acțiunea a două cuple.

Intrebare. Ce valoare vor avea deplasările, când unghiul α este egal cu zero?

104. Să se determine deplasarea nodului 1 din grinda cu zăbrele reprezentată în fig. 334, în cazul când solicitarea din bara 3—7 se va modifica cu valcarea (—σ).

Indicații. Trebue să ne lămurim bine asupra valorii solicitărilor, care intră în formula deplasării.

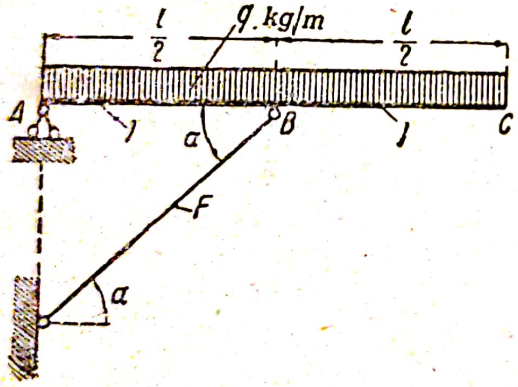


Fig. 335

105. Să se determine deplasarea verticală a punctului C care aparține sistemului reprezentat în fig. 335.

Indicații. In acest sistem nu ne putem limita numai să considerăm influența momentului, urmează să ținem seama și de influența forței axiale din contrafișe.

106. Să se determine variația unghiului între barele 3—15 și 4—12 ale grinzii cu zăbrele reprezentată în fig. 336, încărcată cu o sarcină concentrată aplicată în nodul dela mijloc.

Indicații. Alegând două poziții de încărcare trebue să calculăm eforturile aranjându-le într'un tablou după exemplul de mai jos.

Determinarea eforturilor date de încărcarea fictivă se face stabilind în prealabil elementele în care eforturile sunt egale cu zero.

No. barei	F cm²	S cm	$\bar{N}_k$	N_p	$\frac{\bar{N}_k N_p S}{EF}$
14–13	F	d			
13–12	F	d			
15–14	F	d			
3–4	F	d			
15–3	$0{,}5F$	$d/\cos\alpha$			
4–12	$0{,}5F$	$d/\cos\alpha$			

107. Să se determine deplasarea verticală a punctului dela mijloc a barei curbe C (fig. 337) care se găsește sub acțiunea unei forțe orizontale, aplicată în punctul de reazim A.

Scanned with OKEN Scanner

Indicații. Bara este trasată după un arc cu raza $r = 36$ m; coordonatele unui punct oarecare al barei sunt:

$$x = (r \cos 30^\circ - r \cos \varphi); \quad y = r \sin \varphi - \frac{r}{2}; \quad ds = rd\varphi.$$

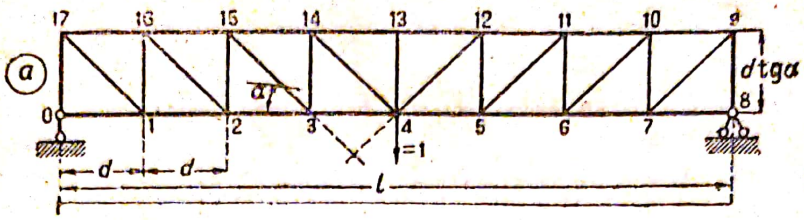


Fig. 336

Intru cât bara și încărcarea sunt simetrice, se recomandă să se facă calculul integralelor pentru jumătate de bară.

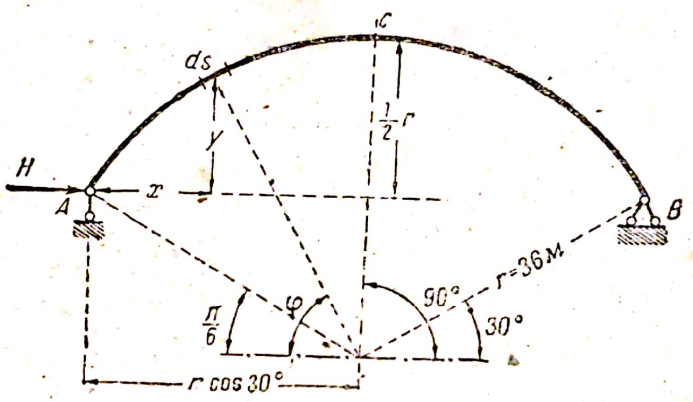


Fig. 337

108. Să se determine deplasarea radială în bara curbă încărcată cu forța P după cum se vede în fig. 338.

Intru cât în această bară se admite ca $\rho > 4h$, putem neglija deplasarea axei neutre.

Indicații. Pentru rezolvarea acestei probleme trebue să utilizăm expresia (155) a lucrului virtual în bare curbe. Ecuația deplasărilor se va scrie astfel:

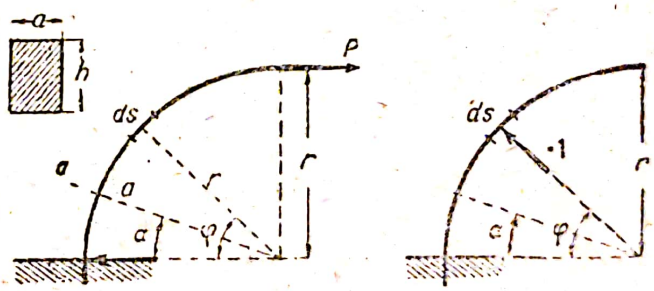


Fig. 338

$$\Delta_{rp} = \int \overline{M}_r \frac{M_p}{EI'} ds + \int \overline{N}_r \frac{N_p}{EF} ds + \int \overline{N}_r \frac{M_p}{EFr} ds +$$
$$+ \int \overline{M}_r \frac{N_p}{EFr} ds + k \int Q_r \frac{Q_p}{GF} ds$$

§ 83. Determinarea deplasărilor prin derivata expresiei energiei potențiale

Un alt procedeu pentru determinarea deplasărilor se bazează pe teorema lui Castigliano. După această teoremă *deplasările care se produc într'un sistem în direcția unei solicitări exterioare arbitrare, se determină prin derivarea parțială a expresiei energiei potențiale în raport cu solicitarea.*

Scanned with OKEN Scanner

După cum se știe, energia potențială se determină prin următoarea sumă de integrale :

$$U = \frac{1}{2} \sum \int \frac{N^2}{EF} ds + \frac{1}{2} \sum \int \frac{M^2}{EI} ds + \frac{k}{2} \sum \int \frac{Q^2}{GF} ds.$$

Conform teoremei expuse mai sus, deplasarea pe direcția unei solicitări oarecare S_k, trebue să fie determinată din expresia :

$$\Delta_k = \frac{\partial U}{\partial S_k} = \sum \int \frac{N}{E F} \frac{\partial N}{\partial S_k} ds + \sum \int \frac{M}{E I} \frac{\partial M}{\partial S_k} ds + \\ + k \sum \int \frac{Q}{G F} \frac{\partial Q}{\partial S_k} ds \qquad (164)$$

Pentru a demonstra aceasta, presupunem că sistemul se găsește sub influența unor forțe și momente :

$$S_1, S_2, S_3, \ldots S_k$$

Valorile momentului încovoietor, a efortului normal precum și a forței tăietoare într'o secțiune oarecare, se pot exprima prin următoarele sume :

$$M = S_1 \overline{M}_1 + S_2 \overline{M}_2 + \ldots + S_k \overline{M}_k + \ldots$$
$$N = S_1 \overline{N}_1 + S_2 \overline{N}_2 + \ldots + S_k \overline{N}_k + \ldots$$
$$Q = S_1 \overline{Q}_1 + S_2 \overline{Q}_2 + \ldots + S_k \overline{Q}_k + \ldots$$

în care $\overline{M}_k$, $\overline{N}_k$ și $\overline{Q}_k$ sunt respectiv momentul, efortul normal și forța tăietoare din aceeași secțiune, provocate de forța unitară având același punct de aplicație și aceeași direcție ca și încărcarea S_k.

Derivata expresiilor M, N și Q în raport cu o sarcină arbitrară S_k, se va scrie astfel :

$$\frac{\partial M}{\partial S_k} = \overline{M}_k ; \frac{\partial N}{\partial S_k} = \overline{N}_k ; \text{ și } \frac{\partial Q}{\partial S_k} = \overline{Q}_k$$

Introducând valorile acestor derivate în formula (164) obținem :

$$\Delta_k = \sum \int \frac{N}{E F} \overline{N}_k ds + \\ + \sum \int \frac{M}{E I} \overline{M}_k ds + k \sum \int \frac{Q}{G F} \overline{Q}_k ds$$

Formula astfel obținută este cu totul asemănătoare cu formula deplasărilor (162) și astfel putem considera că teorema este demonstrată*).

Se poate vedea ușor că diferența dintre expresia deplasărilor ca derivată (după teorema lui Castigliano) și expresia deplasărilor după

*) **Notă.** Teorema lui Castigliano a fost demonstrată pe baza expresiei deplasărilor după Mohr ; ea poate fi însă demonstrată și independent de această expresie (vezi *Procofiev.* Teoria Construcțiilor, volumul I, ediția 2-a, 1939, § 94)

Trebue să menționăm că analog cu relația (164) se poate demonstra și relația

$$S_k = \frac{\partial U}{\partial \Delta_k}$$

(a se vedea mai departe § 93)

teorema lui Mohr constă în aceea că în primul caz deplasările se determină direct numai pe direcţia acţiunii încărcării, atunci când după teorema lui Mohr locul deplasării determinate, nu depinde de poziţia încărcării.

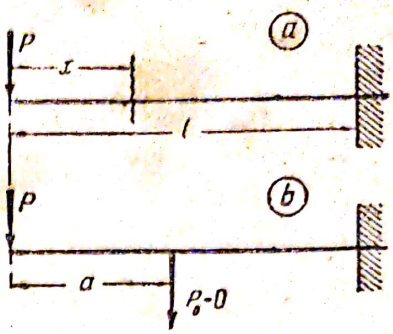


Fig. 339

Pentru a folosi teorema lui Castigliano pentru determinarea deplasării, dintr'un punct oarecare, independent de acţiunea încărcării, trebue să introducem o sarcină fictivă: sau forţa $P_0 = 0$ sau momentul $M_0 = 0$, care acţionează pe direcţia deplasării necunoscute şi derivând după aceasta încărcarea fictivă, să egalăm cu zero termenii rezultatului în care vor intra valorile P_0 sau M_0.

De exemplu se cere să determinăm săgeata pe direcţia forţei P aplicate la extremitatea grinzii, reprezentată în fig. 339 a. Expresia momentului într'o secţiune oarecare a grinzii este:

$$M = - P x ;$$

iar derivata acestei expresii:

$$\frac{\partial M}{\partial P} = - x ;$$

Prin urmare săgeata pe direcţia forţei P conform formulei (164) va fi:

$$\Delta_{pp} = \int_0^l \frac{Px}{EI} x dx = \frac{1}{3} \frac{Pl^3}{EI}$$

Dacă pentru acelaşi fel de încărcare se cere să se determine săgeata în punctul aflat la distanţa a dela extremitatea liberă a grinzii, trebue să introducem pe grindă o sarcină fictivă P_0 (fig. 339 b) şi să alcătuim expresia derivatelor momentelor după această forţă fictivă, pentru porţiunea dela 0 până la a

$$M = - Px ; \frac{\partial M}{\partial P_0} = 0$$

pentru porţiunea dela a până la l

$$M = - Px - P_0 (x - a) ; \frac{\partial M}{\partial P_0} = - (x - a)$$

In baza acestei expresii, deplasarea din punctul ce se găseşte la distanţa a dela extremitatea liberă a grinzii se va scrie astfel:

$$EI \Delta_{ap} = \int_0^l \left[Px + P_0 (x - a) \right] (x - a) dx$$

de unde după integrare avem:

$$EI \Delta_{ap} = \frac{P}{3} (l^3 - a^3) - \frac{Pa}{2} (l^2 - a^2) + P_0 \frac{(l - a)^3}{3}$$

Intru cât în realitate $P_0 = 0$, deplasarea necunoscută va fi:

$$EI \Delta_{ap} = \frac{P}{3} (l^3 - a^3) - \frac{Pa}{2} (l^2 - a^2)$$

Probleme şi exerciţii

109. Ţinând seama de influenţa lui M şi N să se determine deplasarea punctului C al barei reprezentată în fig. 340 şi care este încărcată cu sarcina P.

Scanned with OKEN Scanner

Indicații. Punctul C se găsește pe direcția sarcinii P, deci în acest caz teorema lui Castigliano se va aplica direct.

Întrebare. Care va fi diferența între deplasările punctelor C și D?

110. Să se determine unghiul de rotire al secțiunii transversale a unei grinzi simplu rezemate, încărcată pe jumătatea deschiderii cu o sarcină uniform distribuită (fig. 341).

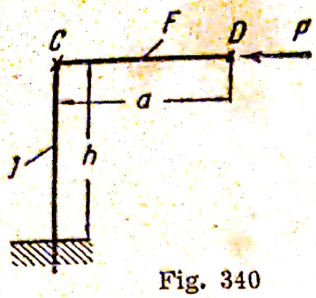


Fig. 340

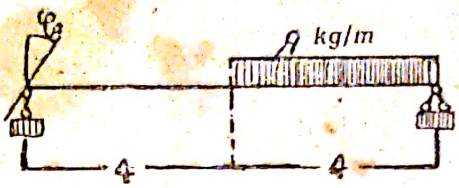


Fig. 341

Indicații. Pentru obținerea rezultatului cu ajutorul teoremei lui Castigliano, trebue să introducem în secțiune un moment egal cu zero (vezi indicațiile, dela § 85).

111. Să se determine deplasarea extremității din dreapta a unei grinzi cu contrafișă (fig. 342) încărcată cu sarcina P.

Indicații. Se poate neglija influența asupra deplasării a forței axiale pe direcția axei grinzii. Secțiunea contrafișei este F, iar momentul de inerție al grinzii este I.

112. Să se determine deplasarea extremității barei parabolice reprezentată în fig. 343 și încărcată cu forța P, aplicată la distanța a, dela capătul din stânga.

Ecuația axei barei este:

$$y = \frac{4f}{l^2} x (l - x)$$

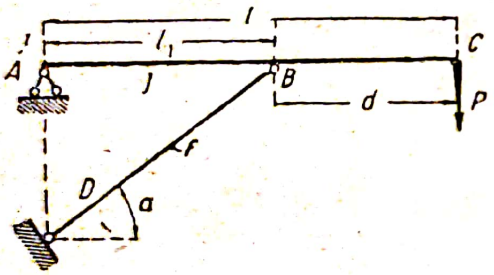


Fig. 342

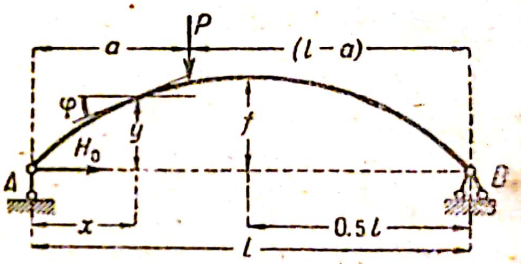


Fig. 343

Indicații. Pentru determinarea deplasărilor se poate neglija influența forței tăietoare, întru cât aceasta influențează puțin valoarea deformației.

In afară de aceasta, într'o bară curbă cu săgeată $f < \frac{1}{5} l$, se poate considera $\sin \varphi = 0$ și $\cos \varphi = 1$; atunci $ds = dx$.

Aplicarea teoremei lui Castigliano ne obligă să introducem forța $H = 0$. Admițând această forță la derivare, nu mai este nevoie să o menținem și la integrare, întru cât după integrare termenii care conțin această forță, fiind egali cu zero, se reduc.

§ 84. Calculul deplasărilor cu ajutorul curbei momentelor forțelor tăietoare etc.

Integralele care intră în epurele deplasărilor pot fi calculate și cu ajutorul curbei momentelor, forțelor axiale și tăietoare (metoda lui Versceaghin). Cea mai caracteristică aplicare a acestei metode este în cazul curbei momentelor. De aceea, expunerea de mai jos se referă la curba momentelor care reprezintă un caz general.

Influența momentului încovoietor asupra valorii deplasărilor se exprimă prin următoarea integrală:

$$\Delta_{km} = \int \overline{M}_k \frac{M_m}{EI} ds,$$

în care $\overline{M}_k$ M_m, este produsul dintre ordonatele curbei momentelor M_m

din sarcina efectivă și ordonatele curbei momentului $\overline{M}_k$ al sarcinei unitare, ordonatele fiind raportate la aceeași secțiune.

Curba momentelor încărcării efective poate fi trasată cu linii drepte sau curbe în raport cu natura încărcării, *însă curba momentului produs de sarcina unitară, în sistemele cu axe drepte, se trasează întotdeauna prin linii drepte.*

Această proprietate ne dă posibilitatea să transformăm expresia integralei după cum urmează:

Presupunem că avem în sistem o oarecare porțiune rectilinie AB (fig. 344), unde curba momentelor date de încărcarea efectivă este curba acb, iar curba momentelor date de sarcina unitară se trasează prin linia dreaptă mn, înclinată cu unghiul α față de axa sistemului.

Ordonata curbei momentului dat de sarcina unitară, într'o secțiune oarecare a acestei porțiuni, poate fi exprimată prin abscisa ei x, măsurată dela punctul de intersecție al dreptei mn cu axa porțiunii respective a sistemului

$$\overline{M}_k = x \cdot tg\ \alpha\ .$$

Atunci deplasarea Δ_{km} provocată de încărcarea acelei porțiuni poate fi reprezentată în felul următor:

$$\Delta_{km} = \int_A^B \overline{M}_k \frac{M_m}{EI} d\,x = \operatorname{tg}\alpha \int_A^B \frac{M_m}{EI} x\, d\,x$$

Dacă pe porțiunea considerată, momentul de inerție I este constant, atunci:

$$\Delta_{km} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{EI} \int_A^B x \cdot M_m \cdot dx$$

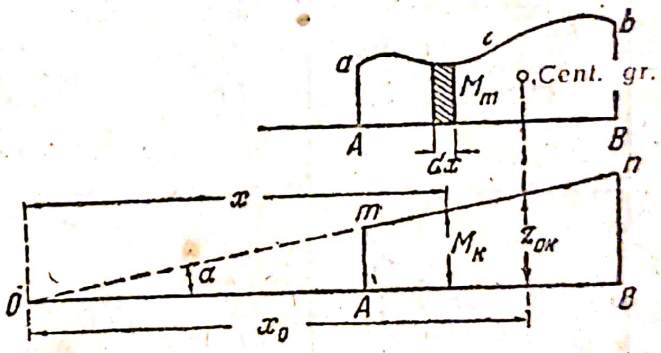


Fig. 344

Factorul $M_m\, d_x$, care intră în produsul obținut sub semnul integralei, reprezintă un element infinit mic al suprafeței curbei $dF = M_m\, dx$, iar întregul produs xdF reprezintă momentul static al suprafeței acestui element față de punctul de intersecție O al dreptei mn, cu axa porțiunii sistemului; deci expresia deplasării poate fi prezentată astfel:

$$\Delta_{km} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{EI} \int_A^B x\ dF = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{EI} \Omega \cdot x_o\ ,$$

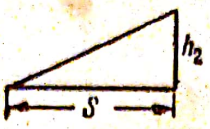
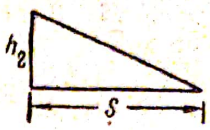
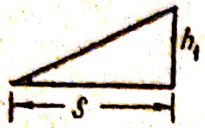
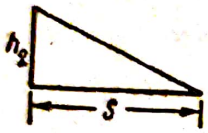
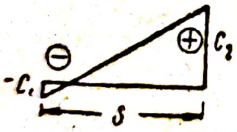
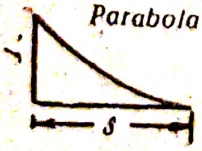
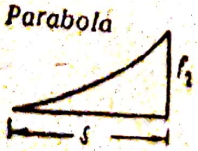
în care x_o este distanța centrului de greutate al suprafeței Ω a curbei momentelor date de încărcarea reală până la punctul de intersecție a dreptei mn cu axa porțiunii AB. In viitor vom denumi punctul O ca punctul de origină al curbei momentelor unitare.

Din fig. 344 se constată ușor că produsul

$$x_o \operatorname{tg}\alpha = z_{ok}$$

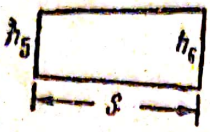
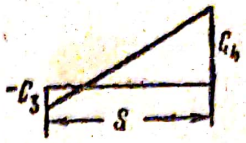
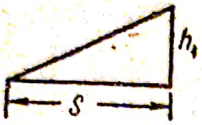
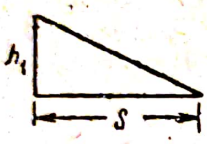
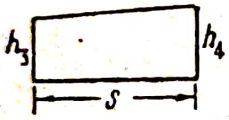
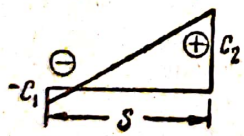
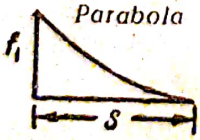
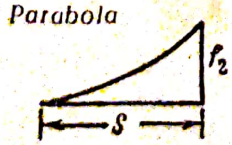
Scanned with OKEN Scanner

Tabloul 3 de Integrale $\int \bar{M}_k \bar{M}_m \, ds$

Curba $\bar{M}_k$ \ Curba $\bar{M}_m$	1 	2 
1 	$\frac{sh_1h_2}{3}$	$\frac{sh_1h_2}{6}$
2 	$\frac{sh_2^2}{6}$	$\frac{sh_2^2}{3}$
3	$\frac{s}{6}h_2[2h_4+h_3]$	$\frac{s}{6}h_2[2h_3+h_4]$
4 	$\frac{s}{6}h_2[2C_2-C_1]$	$\frac{s}{6}h_2[C_2-2C_1]$
5  Parabola	$\frac{sf_1h_2}{12}$	$\frac{sf_1h_2}{4}$
6 Parabola 	$\frac{sf_2h_2}{4}$	$\frac{sfh_2}{12}$
7	$\frac{sfh_2}{3}$	$\frac{sfh_2}{3}$

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul 3 de Integrale $\int \overline{M}_k \overline{M}_m ds$

Curba $\overline{M}_k$ \ Curba $\overline{M}_m$	3	4
		
1		$\frac{sh_1}{6}[2h_6+h_5]$	$\frac{sh_1}{6}[2C_4-C_3]$
2		$\frac{s}{6}h_2[2h_5+h_6]$	$\frac{s}{6}h_2[C_4-2C_3]$
3		$\frac{s}{6}[2(h_3h_5+h_4h_6)+h_3h_6+h_4h_5]$	$\frac{s}{6}[2(-h_3C_3+h_4C_4)+h_3C_4-h_4C_3]$
4		$\frac{s}{6}[2(-C_1h_5+C_2h_6)-C_1h_6+C_2h_5]$	$\frac{s}{6}[2(C_1C_3+C_2C_4)-C_2C_3-C_1C_4]$
5		$\frac{sf_1}{12}(3h_5+h_6)$	$\frac{sf_1}{12}(C_4-3C_3)$
6		$\frac{sf_2}{12}(3h_6+h_5)$	$\frac{sf_2}{12}(3C_4-C_3)$
7		$\frac{sf}{3}(h_5+h_6)$	$\frac{sf}{3}(C_4-C_3)$

Scanned with OKEN Scanner

este ordonata curbei momentelor date de sarcina unitară, măsurată în dreptul centrului de greutate al curbei momentelor date de încărcarea reală.

De aci rezultă că:

$$\Delta_{km} = \frac{1}{EI} \Omega z_{ok}$$

Dacă sistemul se compune dintr'un şir de porţiuni rectilinii având fiecare momentul de inerţie constant, integrala se extinde pe întreaga lungime şi deplasarea totală se va exprima prin suma deplasărilor calculate pentru fiecare porţiune în parte

$$\Delta_{km} = \frac{1}{EI} \sum \Omega z_{ok} \qquad (165)$$

în care fiecare membru determină influenţa fiecărei porţiuni asupra valorii deplasării.

Toate cele expuse relativ la calculele deplasărilor cu ajutorul curbei momentelor, se pot aplica şi la calculul deplasărilor produse de forţele axiale şi forţele tăietoare.

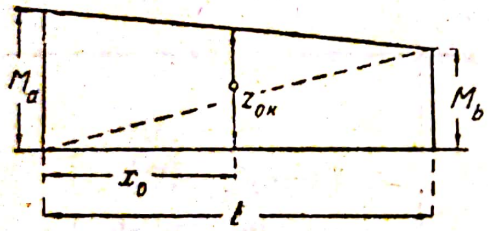


Fig. 345

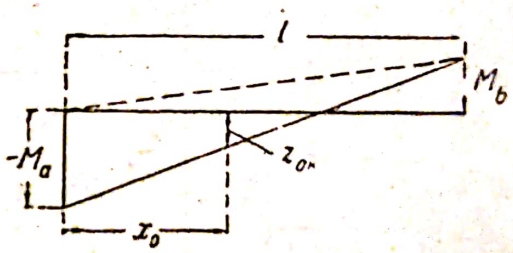


Fig. 346

Astfel *în sistemele cu axe drepte, integralele care intră în expresia deplasărilor pot fi calculate ca o sumă a produselor porţiunilor separate ale suprafeţei curbei provenite din încărcarea reală, prin ordonatele curbei provenite din încărcarea unitară, măsurată în dreptul centrului de greutate al aceleiaşi porţiuni a suprafeţei primei curbe.*

La calculul deplasărilor după formula (165) sensul deplasării se determină algebric ca rezultat al înmulţirii, adică, dacă semnul suprafeţei curbei momentelor din încărcarea reală este la fel cu semnul ordonatei respective z_{ok}, atunci deplasarea va avea semnul pozitiv (+), iar dacă semnul acelei suprafeţei nu este acelaşi ca semnul ordonatei z_{ok}, atunci deplasarea va avea semnul negativ (—).

Dacă curba momentelor din încărcarea unitară este un trapez (fig. 345) ordonata z_{ok}, care intră în formula (165), poate fi calculată după ordonatele curbei momentelor dela extremităţile porţiunii. Calculul se face descompunând trapezul în două triunghiuri.

$$z_{ok} = \frac{1}{l} \left[\overline{M}_a (l - x_0) + \overline{M}_b x_0 \right]$$

Dacă conturul curbei are forma din fig. 346, atunci această formă

trebue considerată ca un caz particular al trapezului, în care una din ordonate este negativă.

$$z_{ok} = \frac{1}{l}\left[- M_a (l - x_o) + \overline{M}_b \; x_o \right]$$

Pe baza acestor expresii pentru z_{ok} se întocmesc tablouri ajutătoare, cu formule de calcul, reprezentând rezultatele calculării integralelor de genul :

$$\int \frac{\overline{M}_k \; \overline{M}_m}{EI} ds = \frac{1}{EI} \overline{\Omega}_m \; z_{ok}$$

In cazurile când conturul curbei momentelor din încărcarea reală este prea complicat, ceea ce ar împiedeca calculul suprafeţei şi al poziţiei centrului de greutate, trebue să împărţim această suprafaţă complicată a curbei momentelor în suprafeţe separate simple, pentru care sunt cunoscute expresiile suprafeţelor şi ale poziţiei centrelor de greutate. Pornind, astfel, dela aceste suprafeţe simple, calculele se efectuează după formula (165).

Acest procedeu se bazează pe următoarele consideraţiuni : Presupunem că avem de calculat o integrală caracteristică prin conturul complicat al unei curbe (fig. 347). Impărţind suprafaţa curbei în suprafeţe mai simple, fiecare ordonată a curbei se va descompune în două sau mai multe părţi.

$$M_m = M_m^I + M_m^{II} + \ldots$$

Această descompunere a momentului într'o serie de momente componente provoacă descompunerea integralei generale într'un şir de integrale componente.

$$\frac{1}{EI}\int \overline{M}_k \, M_m \, ds = \frac{1}{EI}\int \overline{M}_k \, M_m^I \, ds + \frac{1}{EI}\int \overline{M}_k \, M_m^{II} \, ds + \ldots,$$

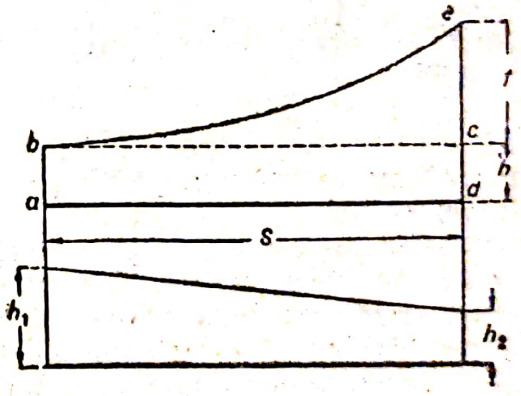


Fig. 347

Calculul fiecărei integrale din partea dreaptă a acestei expresii se poate face cu ajutorul formulei (165) şi atunci valoarea integralei totale este o sumă de forma :

$$\frac{1}{EI}\int \overline{M}_k \, M_m \; ds = \frac{1}{EI} \Omega_m^I \, z_{ok}^I + \frac{1}{EI} \Omega_m^{II} \, z_{ok}^{II} + \ldots$$

ceea ce era de demonstrat.

Faptul că fiecare integrală şi suprafaţă Ω_m pot fi împărţite în mai multe părţi componente, permite folosirea datelor tabloului atât pentru curbele arătate în tablou, cât şi pentru acelea care pot fi alcătuite din cele cuprinse în tablou.

De exemplu, calculul deformaţiei cu ajutorul curbei momentelor reprezentate în fig. 347 poate fi efectuat prin însumarea rezultatelor provenite considerând suprafeţele *abcd* şi *ace* ale curbei şi anume :

Scanned with OKEN Scanner

Subdiviziunea după tablou	Ordonatele la extremitatea curbelor	$\int \overline{M}_k M_m ds$
6×3	$h_5=h_2$; $h_6=h_1$	$\frac{1}{12}s[(3h_2+h_1)$
6×3	$h_3=h_4=h$	$\frac{sh}{6}[2h(h_2+h_1)+h(h_2+h_1)]$
		$\frac{s}{12}[f(3h_2+h_1)+6h(h_2+h_1)]$

§ 85. Simplificări la determinarea deplasărilor, datorite condiţiunilor de simetrie*)

Simetria sistemului, precum şi simetria în încărcarea sistemului, conduc întotdeauna la simplificarea calculului deplasărilor ; în aceste cazuri expresia de sub integrală ia o formă mai simplă. Dela această proprietate, a pornit ideea ca în sistemele simetrice dar cu încărcare disimetrică, încărcarea să fie transformată în una simetrică şi alta antisimetrică (având direcţiunile sarcinilor opuse).

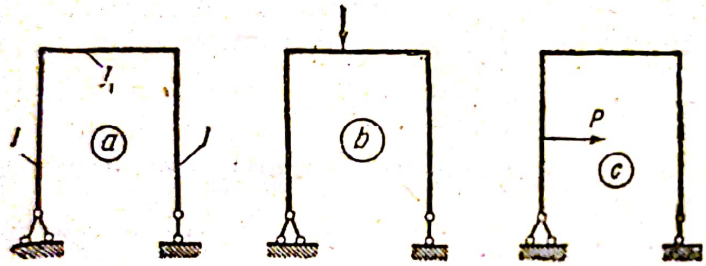


Fig. 348

Posibilitatea unei astfel de transformări a încărcării se bazează pe faptul că la calculul sistemelor elastice, se presupune independenţa compunerii şi descompunerii sarcinilor, precum şi a deformaţiilor produse de ele ; pe baza acestei ipoteze, se poate considera că descompunerea — arătată mai sus — a sarcinii nu va modifica câtuşi de puţin lucrul sistemului considerat ca un ansamblu.

Aplicarea acestui procedeu de calcul este posibilă numai la sistemele cu dimensiuni geometrice simetrice, precum şi la secţiunile transversale ale barelor care le compun. Reacţiunile provocate de încărcări trebue şi ele să fie simetrice.

De exemplu schema arătată în fig. 348, *a*, care este simetrică în compunerea ei interioară, este disimetrică din punct de vedere al legăturilor de rezemare. De aceea folosirea condiţiilor de simetrie în cazul acestei scheme devine posibilă numai la o astfel de încărcare, când reacţiunile vor lucra ca şi cele simetrice, ceea ce se produce la încărcarea cu forţe verticale (fig. 248, b) şi nu va avea loc în cazul încărcării cu o forţă orizontală (fig. 348, c).

Faptul că descompunerea încărcării disimetrice într'o încărcare simetrică şi una antisimetrică, în vederea determinării deplasărilor, este raţională, se poate explica mai bine prin exemple.

Presupunem că urmează să se determine săgeata la mijlocul unei

*) **Nota revizorului editorial:** Această metodă a fost elaborată de *Andrée* şi se cunoaşte şi sub denumirea de *„metoda B. U."*

grinzi încărcate cu o sarcină disimetrică, după cum se arată în fig. 349. In aceeaşi figură este reprezentată şi curba momentelor provenite din această încărcare reală (fig. 349, a) şi din încărcarea virtuală unitară (fig. 349, c).

Comparând aceste curbe, se poate vedea că calculul integralelor după aceste curbe ar fi destul de complicat.

Să presupunem acum că aceeaşi încărcare a fost descompusă într'o încărcare simetrică (fig. 350, a) şi una antisimetrică (fig. 350, b).

In această descompunere a încărcării, suprapunerea unei părţi a încărcării descompuse deasupra celeilalte ne dă ca rezultat încărcarea iniţială.

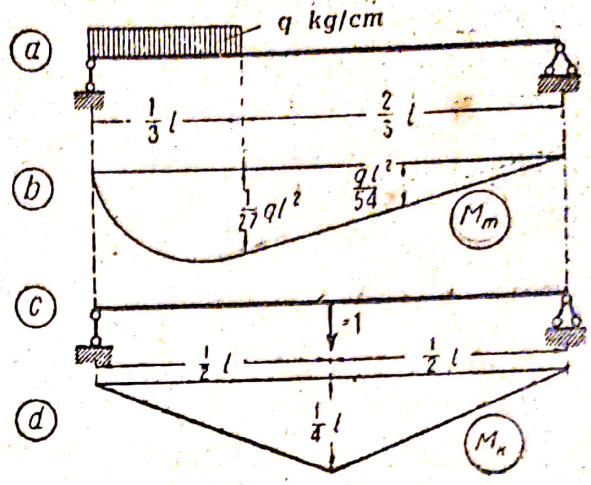


Fig 349.

Comparând curbele momentelor obţinute în cazul încărcării simetrice şi încărcării antisimetrice cu aceea a momentelor din încărcarea virtuală (fig. 349), se poate vedea că în cazul când curba din încărcarea virtuală este simetrică, deplasarea provocată de încărcarea antisimetrică este egală cu zero ; de aceea rămâne numai să calculăm valoarea deplasării provocată de acţiunea încărcării simetrice, ceea ce simplifică şi mai mult calculele.

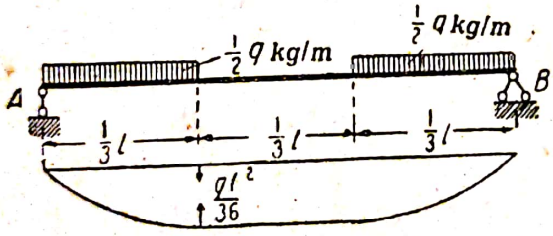


Fig. 350 a

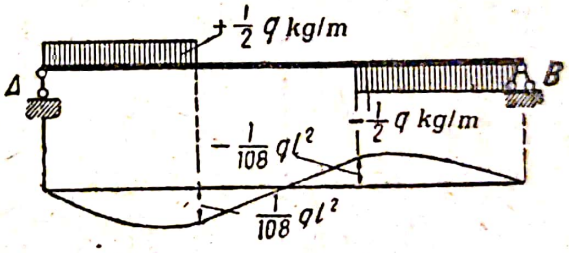


Fig. 350 b

Motivarea analitică a acestui procedeu constă în descompunerea valorii momentului din încărcarea simetrică şi din aceea antisimetrică în două momente :

$$M_m = M_I + M_{II}$$

Aceasta conduce şi la descompunerea integralelor care determină deplasarea :

$$\Delta_{km} = \frac{1}{EI}\int \overline{M}_k M_m \, ds = \frac{1}{EI}\int \overline{M}_k (M_{mI} + M_{mII}) \, ds =$$

$$= \frac{1}{EI}\int \overline{M}_k M_{mI} \, ds + \frac{1}{EI}\int \overline{M}_k M_{mII} \, ds.$$

Din condiţiunile antisimetriei curbei momentelor din integrala a doua, această integrală este egală cu zero, deci :

$$\Delta_{km} = \frac{1}{EI}\int \overline{M}_k M_{mI} \, ds.$$

Procedeul expus pentru descompunerea încărcării în două încărcări, una simetrică şi alta antisimetrică, poate fi extins şi asupra încărcărilor virtuale ale sistemului, în cazul când aceasta este dată ca disimetrică.

La o astfel de descompunere, încărcarea virtuală considerată, în speţă, egală cu unitatea se împarte în două jumătăţi de unitate, una din ele intrând în încărcarea simetrică, iar cealaltă în încărcarea antisimetrică.

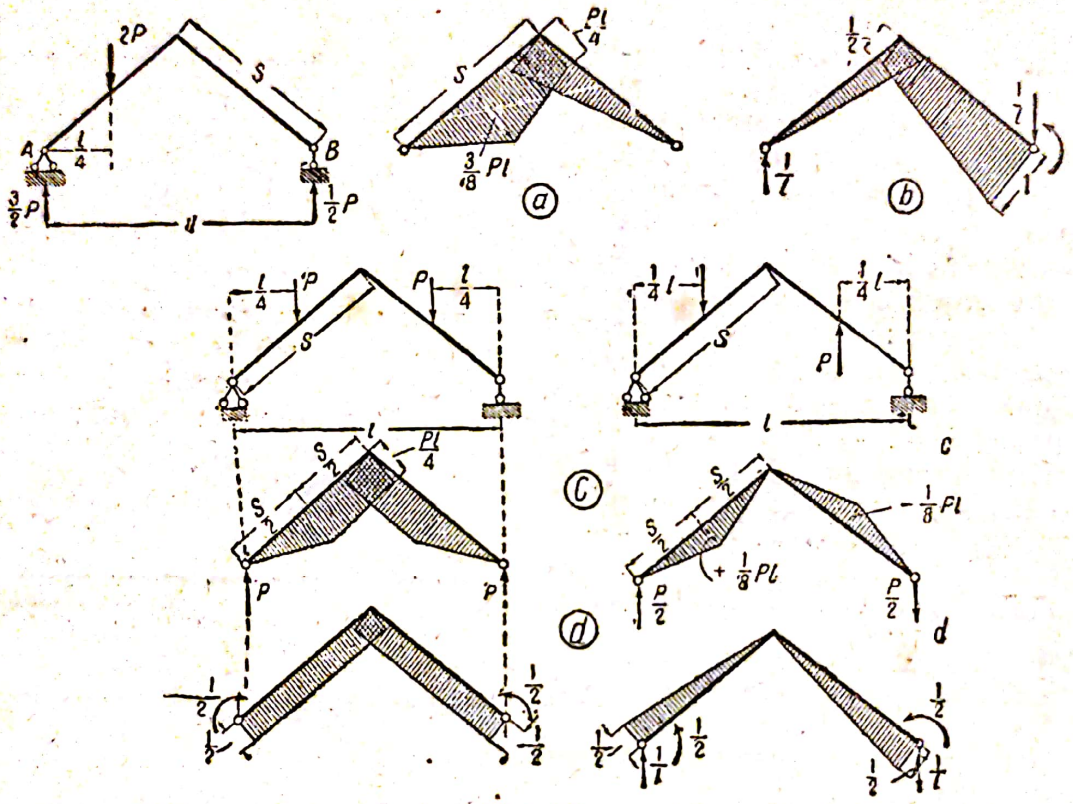


Fig. 351

De exemplu, se cere să se determine unghiul de rotire al secţiunii din reazimul B, în cazul unei grinzi cu axa după o linie frântă (fig. 351). Incărcarea reală şi încărcarea virtuală a grinzii cu momentul unitar sunt aşezate disimetric faţă de sistem; curbele momentelor provocate de aceste forţe sunt reprezentate în fig. 351, a şi b.

Pentru simplificarea calculelor, descompunem încărcarea reală şi încărcarea virtuală în sisteme de încărcare simetrică şi antisimetrică, după cum se arată în fig. 351, c şi d.

In cazul de faţă, deplasarea căutată (unghiul de rotire) se determină prin expresia obţinută din comparaţia încărcărilor simetrice şi antisimetrice (fig. 351, c şi d).

$$EI\,\varphi_B = 2\left(\frac{1}{2}\,\frac{S}{2}\cdot\frac{Pl}{4}+\frac{S}{2}\,\frac{Pl}{4}\right)\frac{1}{2}-2\left[\frac{1}{2}\,S\,\frac{Pl}{8}\cdot\frac{1}{4}\right]=\frac{5}{32}\,Fl.S$$

113. Considerând numai influența momentului, să se determine deplasarea pe verticală și pe orizontală a punctului k al unei bare poligonale, solicitată de forța H, reprezentată în fig. 352.

Indicație. Trebue să construim curbele momentelor din încărcare și ale forțelor unitare, corespunzătoare deplasărilor căutate și folosind formula (165), să calculăm cu aceasta deplasările cerute.

114. Să se determine săgeata și rotirea secțiunii transversale în punctul C al axei barei

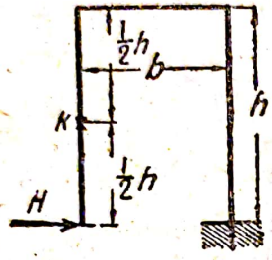


Fig. 352

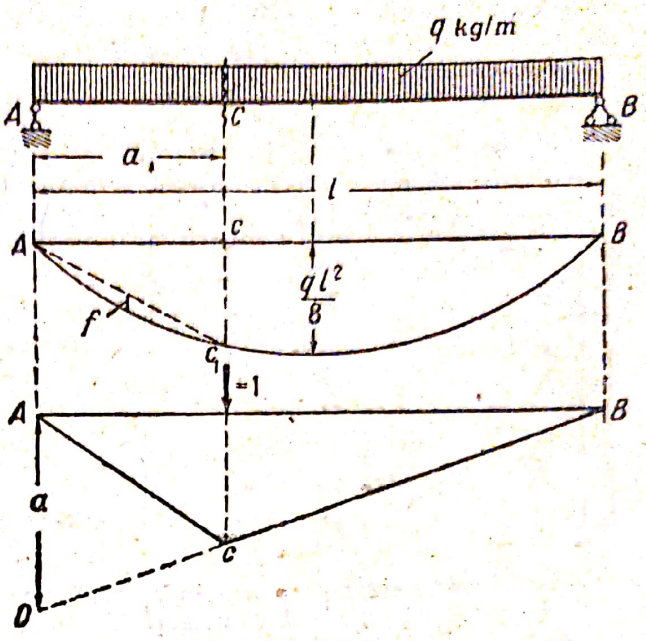


Fig. 353

reprezentate în fig. 353, care este încărcată cu o sarcină uniform distribuită.

Indicații. La calculul suprafeței curbei rezultate din încărcarea uniform distribuită, trebue să avem în vedere că suprafața segmentului de parabolă se determină prin produsul $F = \frac{2}{3}\, a \cdot f \cdot$ în care a este proiecția pe orizontală a coardei, iar f — săgeata pe verticală.

Este recomandabil să se facă calculul mai întâi după toată suprafața curbei încărcării reale și după triunghiul ABD, iar apoi valoarea obținută să fie redusă prin produsul dintre suprafața Acc_1 a curbei încărcării reale și ordonata respectivă a triunghiului.

115. Să se determine deplasarea orizontală a punctului C al unui sistem cu trei articulații, care este arătat în fig. 354 și încărcat cu sarcini uniform distribuite.

Indicație. Sistemul este simetric, deci este recomandabil ca la calculul deplasării să descompunem efortul unitar corespunzător deplasării necunoscute într'un sistem de încărcare simetric și antisimetric.

Intrebare. Se va simplifica oare calculul deplasării în cazul când în această problemă vom descompune sarcina unitară virtuală în două sarcini, una simetrică și alta antisimetrică?

116. Să se determine unghiul de rotire al reazimului din stânga la un sistem cu trei articulații, având încărcarea arătată în fig. 355.

Indicație. Deoarece sistemul este simetric, trebue să folosim la calcule proprietățile simetriei directe și ale antisimetriei, aplicate atât la încărcarea reală cât și la cea virtuală.

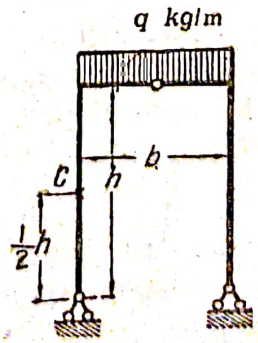


Fig. 354

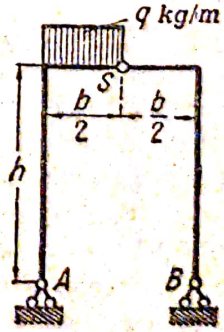


Fig. 355

Pentru a aprecia avantajele utilizării proprietăților simetriei, se recomandă să

se construiască curba momentelor din încărcarea reală și virtuală unitară, fără să le descompunem, ținând seama de simetrie.

117. Să se determine deplasarea verticală a punctului D și deplasarea orizontală a punctului A, al sistemului reprezentat în fig. 356, ținând seama de influența momentului și, separat, de influența forței axiale.

118. Să se determine tasarea articulației S din sistemul reprezentat în fig. 357, încărcat cu sarcina $P = 36$ t.

Indicație. Deoarece sistemul este simetric față de axa verticală și sarcina este verticală, pentru a afla săgeata articulației, trebue să folosim descompunerea încărcării date în două încărcări, una simetrică și alta antisimetrică.

119. Să se determine unghiul de rotire al barei AB din sistemul și în condițiile problemei precedente (fig. 357).

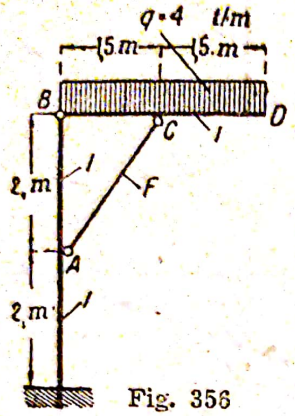


Fig. 356

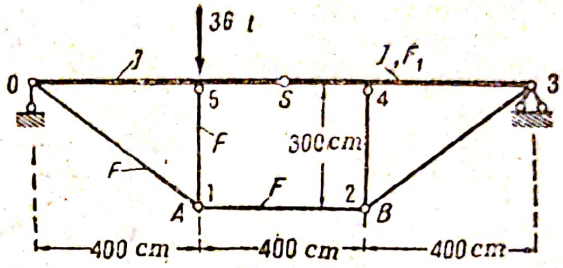


Fig. 357

120. Să se determine, în grinda parabolică reprezentată în fig. 358, variația unghiului față de orizontala diagonalei D_{2-13} provocată de acțiunea unei sarcini uniform repartizate pe toată deschiderea grinzii.

Indicații. La rezolvarea problemei trebue să folosim condiția de simetrie a deformației diagonalelor D_{2-13} și D_{6-11}. Aceasta va permite determinarea deformației necunoscute a unghiului, examinând unghiul între aceste diagonale.

La determinarea eforturilor provocate de sarcina uniform distribuită, trebue să ținem seama de proprietățile grinzilor parabolice cu zăbrele (§ 34).

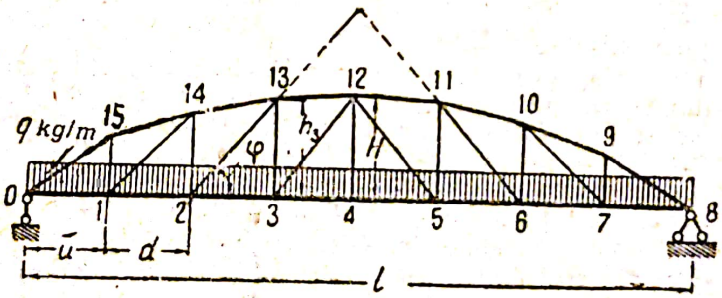


Fig. 358

§ 86. Determinarea deformărilor provocate de variațiile de temperatură

Cu schimbarea temperaturii mediului înconjurător variază și lungimea barelor unui sistem; încălzirea sau răcirea neuniformă provoacă deformarea barelor sistemului: unele puncte ale sistemului se deplasează, iar unele secțiuni transversale, precum și barele, își schimbă unghiurile de înclinare.

Deplasările care apar în sistem sub influența variațiilor de temperatură se calculează pe baza expresiei lucrului virtual al sistemului.

Sistemul se consideră în stare reală, sub acțiunea deformațiilor provocate de variația de temperatură și în stare virtuală, sub acțiunea unei forțe unitare exterioare $\overline{S}_k = 1$ și a eforturilor interioare provocate de ea: $\overline{N}_k$ $\overline{Q}_k$ și a momentului $\overline{M}_k$.

Scanned with OKEN Scanner

Deformaţiile diferitelor elemente ale sistemului, produse de variaţia de temperatură, sunt de forma următoare :

lungimea fibrei axiale Δds_t şi
rotirea secţiunii transversale $\Delta\varphi_t$

In raport cu acestea, expresia lucrului mecanic virtual se va scrie pentru cazul general în felul următor (135 şi 136) :

$$S_k \Delta_{kt} = \int \overline{N}_k \Delta ds_t + \int \overline{M}_k \Delta\varphi_t$$

şi în consecinţă, formula pentru determinarea deplasării, provocată de variaţia de temperatură, va avea următoarea formă :

$$\Delta_{kt} = \int \overline{N}_k \Delta ds_t + \int \overline{M}_k \, d\varphi_t \qquad (166)$$

Trecem la determinarea expresiunilor deformaţiilor Δds_t şi $\Delta\varphi_t$ care intră în compunerea valorii de sub semnul integralei.

a) In barele cu axa rectilinie (fig. 359), în care toate fibrele elementelor infinit mici din această bară au lungimea constantă ds, creşterea lungimii acestor fibre va depinde numai de diferenţa lor de temperatură. Dacă admitem că în interiorul corpului, temperatura variază liniar, deformaţia finală se va exprima prin aceea că planul secţiunii normale pe axa barei va ocupa o nouă poziţie înclinată faţă de această axă. Această deformaţie finală poate fi considerată ca fiind compusă din deplasarea planului ab, paralel cu sine însuşi, în poziţia $a_1 b_1$ pe distanţa Δds_t, iar apoi din rotirea aceluiaşi plan în jurul fibrei axiale cu unghiul $\Delta\varphi_t$.

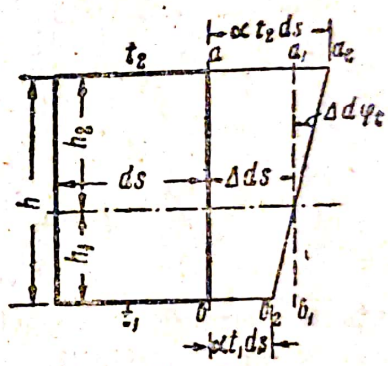


Fig. 359

Prima deplasare poate fi considerată ca lungirea fibrei cu valoarea :

$$\Delta ds_t = \frac{\alpha (t_2 h_1 + t_1 h_2)}{h_1 + h_2} ds \qquad (167)$$

Dacă secţiunea barei este simetrică ($h_1 = h_2$) atunci :

$$\Delta ds = \alpha \frac{t_2^0 + t_1^0}{2} \cdot ds = \alpha t^0 ds.$$

în care $t^0 = \frac{1}{2}(t_1^0 + t_2^0)$ este temperatura medie uniformă pe toată înălţimea barei, iar α coeficientul de dilataţie lineară termică a materialului.

A doua deplasare, cea unghiulară, dat fiind valoarea ei relativ mică, poate fi determinată astfel :

$$\Delta\varphi_t = \alpha \frac{t_2^0 - t_1^0}{h} ds = \alpha \frac{\Delta t^0}{h} ds \qquad (168)$$

în care $\Delta t^0 = (t_2^0 - t_1^0)$ este diferenţa de temperatură dintre feţele barei.

b) In barele cu axa curbă, lungirea relativă a fibrelor în raport cu înălţimea secţiunii va depinde atât de diferenţa de temperatură a acestor fibre, cât şi de lungimea fibrelor propriu zise, care variază după înălţimea secţiunii. Pornind dela aceleaşi ipoteze care s'au admis la determinarea deformaţiei în barele cu axa rectilinie, obţinem pentru barele curbe următoarele relaţii* :

$$\Delta\, ds_t = \alpha\, t^\circ\, ds\,;$$

$$\Delta\, \varphi_t = \alpha \frac{\Delta t^\circ}{h} ds + \frac{\alpha\, t}{\rho} ds\,.$$

în care ρ este raza cu curbură a barei. Valoarea termenului $\frac{\alpha\, t}{\rho} ds$ este în general destul de mică, putând fi deci neglijată.

In acest fel, după substituirea în formula (166) a valorii $\Delta\, ds_t$ şi $\Delta\, \varphi_t$, vom avea :

$$\Delta_{kt} = \alpha\, t^\circ \int \overline{N}_k\, ds + \alpha \frac{\Delta\, t^\circ}{h} \int \overline{M}_k\, ds \qquad (169)$$

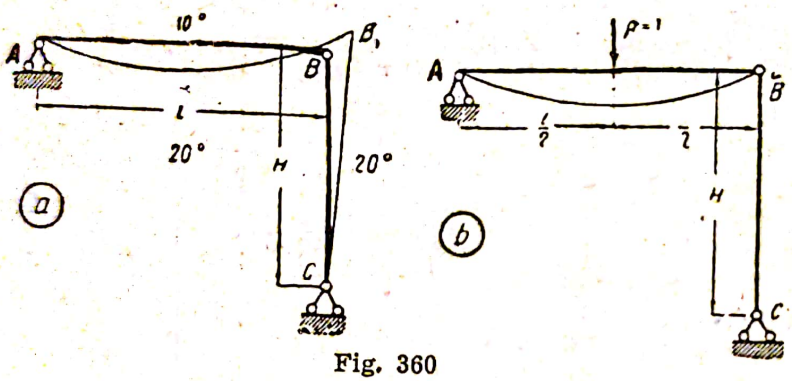


Fig. 360

La deducerea valorilor deformaţiilor $\Delta\, ds_t$ şi $\Delta\, \varphi_t$ s'a presupus că temperatura creşte, de aceea în expresiile lor s'a introdus semnul plus ; în caz de scădere a temperaturii, semnele din partea dreaptă a ecuaţiei vor fi inverse.

Semnul definitiv al părţii din dreapta formulei (169) se poate determina cel mai simplu comparând deformaţiile provocate de influenţa temperaturii cu deformaţiile provocate de acţiunea sarcinii virtuale.

Dacă, în ambele cazuri, deformaţiile au aceeaşi direcţie, adică sunt de acelaşi semn, atunci membrul corespunzător al expresiei va fi pozitiv, iar dacă direcţiile deformaţiilor sunt opuse, atunci membrul respectiv al expresiei va fi negativ.

De exemplu, se cere să determinăm săgeata în mijlocul grinzii reprezentate în fig. 360, supusă la o încălzire neuniformă, având în partea superioară 10°, iar în cea inferioară 20°.

Din ipotezele de încărcare reală (fig. 360 a) şi de încărcare virtuală (fig. 360 b) se poate vedea că încovoierea grinzii sub acţiunea temperaturii şi a sarcinii virtuale are acelaşi sens, de aceea integrala care depinde de valoarea momentului va avea semnul plus.

După datele din aceeaşi figură şi din semnul forţei axiale N, rezultă că sensul deformaţiei stâlpului provocată de temperatură este diferită de direcţia deplasării efortului N; deci integrala care depinde de efortul axial trebue să aibă semnul minus.

*) Notă. *I. P. Procofiev* „Teoria Construcţiilor", volumul I, ediţia 2-a, 1932 pag. 18.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel deplasarea necunoscută se va determina în cazul de față prin următoarea expresie:

$$\Delta_{kl} = f_{kl} = -\alpha\, 15^0 \int_0^H \frac{1}{2}\, dy + \alpha \frac{10}{h}\, 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2}\, x dx =$$

$$= -\alpha\, 15^0\, \frac{1}{2}\, H + \alpha\, \frac{H}{h} \cdot \frac{l^2}{8}$$

Valorile de sub integrală, din partea dreaptă a formulei (169), pot fi considerate ca suprafețele curbelor respective ale forțelor axiale și ale momentelor, deci calculul integralelor poate fi efectuat și prin integrare și prin suprafețele curbelor:

$$\Delta_{kl} = \alpha\, t^0\, \Omega_N + \alpha \frac{t^0}{h} \cdot \Omega_M$$

Dacă deplasarea provocată de variația de temperatură se determină pentru un sistem cu zăbrele (o grindă cu zăbrele), atunci formula (169) va avea următorul aspect:

$$\Delta_{kl} = \sum \alpha t^0 \int \overline{N}_k\, ds = \sum \alpha t^0\, \overline{N}_k\, l_k \qquad (170)$$

Sub semnul sumei se introduc acele bare ale sistemului, care suferind influența variației de temperatură, primesc eforturi axiale provocate de încărcarea virtuală.

De exemplu se cere să se determine deformația unghiului din nodul 1 al grinzii cu zăbrele reprezentată în fig. 361, în care montanții și diagonala au suferit o creștere de temperatură de 10^0.

Pentru determinarea deformației necunoscute, aplicăm la barele care formează unghiul în cauză, câte un cuplu de forțe cu momentul egal cu unitatea (fig. 361 b).

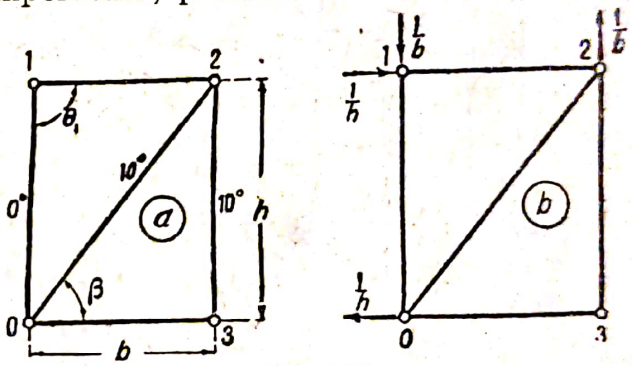


Fig. 361

In tabloul de mai jos, sunt arătate toate datele pentru fiecare bară a grinzii și sunt determinate valorile componente ale deformației.

Valoarea necunoscută a deformației unghiului este:

$$\Delta\, \theta_1 = \alpha\, 10 \left[\frac{b}{h \cos^2 \beta} - \frac{h}{b} \right]$$

Numerele barelor	Lungimea barelor	Efortul în bare	Încălzirea t^0	Valoarea lui $\alpha t^0 \overline{N}_k\, l_k$
0 — 1	h	$-\frac{1}{b}$	10	$-\alpha\, 10\, \frac{h}{b}$
1 — 2	b	$-\frac{1}{h}$	0	0
2 — 3	h	0	10	0
3 — 0	b	0	0	0
0 — 2	$\frac{b}{\cos \beta}$	$\frac{1}{h \cos \beta}$	10	$+\alpha\, 10\, \frac{b}{h \cos^2 \beta}$

Scanned with OKEN Scanner

121. Să se determine deplasarea extremității C a unei grinzi metalice (fig. 362), a cărei față superioară a fost încălzită la 20°, iar cea inferioară la 10°.

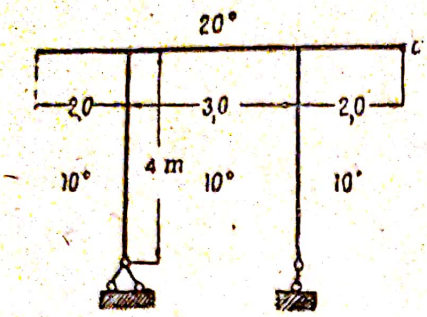


Fig. 362

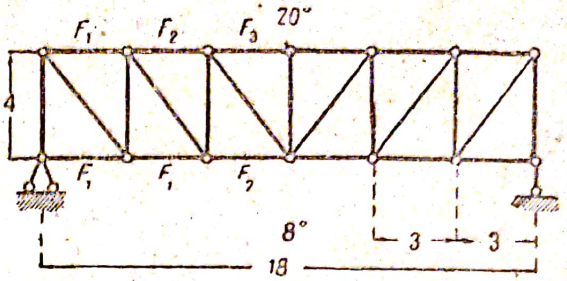


Fig. 363

Indicație. Deplasarea trebue să se calculeze cu formula (169) folosind condițiile de simetrie.

122. Să se determine valoarea săgeții din mijlocul grinzii cu zăbrele reprezentată în fig. 363, având talpa superioară încălzită la 20°, iar cea inferioară la 8°.

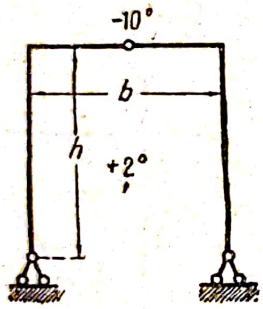


Fig. 364

Indicație. La rezolvarea acestei probleme, se recomandă să considerăm separat influența asupra deformației grinzii din încălzirea ambelor tălpi la aceeași temperatură și separat influența încălzirii unei singure tălpi.

123. Ținând seama de moment și de forța axială, să se determine variația unghiului între stâlp și riglă la un cadru cu trei articulații (fig. 364), temperatura din exterior fiind —10° și cea din interior + 2°.

§ 87. Liniile de influență ale deplasărilor

Ordonatele liniei de influență ale deplasărilor definesc valorile deplasărilor provocate într'un punct al unui sistem de o sarcină unitară aplicată în dreptul unei ordonate.

Din aceasta rezultă limpede procedeul de construire a liniei de influență a deplasărilor. Așezând sarcina unitară într'un punct oarecare m cu abscisa x (fig. 365), trebue să determinăm ecuația deplasării necunoscute:

$$\delta_{k\,u} = \int \frac{\overline{N}_k\,\overline{N}_m}{EF}\,ds + \int \frac{\overline{M}_k\,\overline{M}_m}{EI}\,ds + \ldots.$$

Atribuind apoi lui x diferite valori, trebue să calculăm valorile corespunzătoare ale deplasărilor și considerând valorile lor numerice drept ordonate, să le așezăm în dreptul punctelor corespunzătoare sarcinilor. Curba dusă prin vârfurile acestor ordonate reprezintă conturul liniei de influență.

Ecuaţia ei se caracterizează prin aceea că valorile momentelor, forţelor axiale şi tăietoare care intră în ea, se calculează pentru o sarcină unitară reală şi virtuală. Pentru a putea distinge această deplasare de deplasările Δ_{km}, produse de încărcarea reală, *prima se notează cu* δ_{km} *şi se numeşte deplasarea produsă de încărcările unitare.*

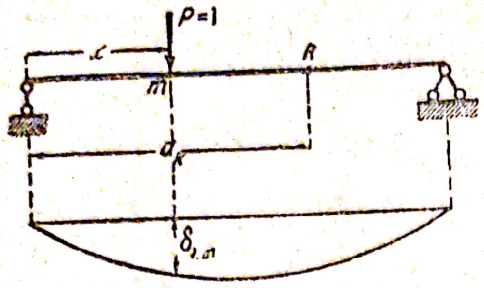


Fig. 365

Faptul că ecuaţia liniei de influenţă a deplasării se determină prin două încărcări unitare, permite tratarea liniei de influenţă a deplasării ca linie a deformaţiilor, provocată în sistem de o forţă unitară, aplicată în direcţia deplasării necunoscute.

Intr'adevăr, datorită încărcării unitare aplicate în punctul k, punctul m al sistemului va avea o săgeată determinată prin valoarea δ_{mk}. Insă după teorema referitoare la reciprocitatea deplasărilor (§ 79)

$$\delta_{mk} = \delta_{km}$$

Astfel linia deformaţiilor care apar într'un sistem, din cauza încărcării unitare aplicate pe direcţia deplasării, este linia de influenţă a acestei deplasări.

Această proprietate uşurează construcţia prin metodele grafice ale liniei de influenţă a deplasărilor, prin folosirea curbei deformaţiilor care se va trata la § 90.

Exemplu. In fig. 366 este reprezentată construcţia liniei de influenţă a unghiului de rotire al secţiunii pe reazimul unei grinzi.

Alegând poziţia sarcinii unitare la distanţa x dela extremitatea din stânga, alcătuim ecuaţia săgeţii din punctul m

$$EI\delta_{mk} = \frac{1}{2}\frac{(l-x)x^2}{l}\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{(l-x)}{l}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{(l-x)^2x}{l}\frac{2}{3}\frac{(l-x)}{l}$$

$$EI\delta_{mk} = \frac{1}{6l}(l-x)\cdot x\cdot(2l-x)$$

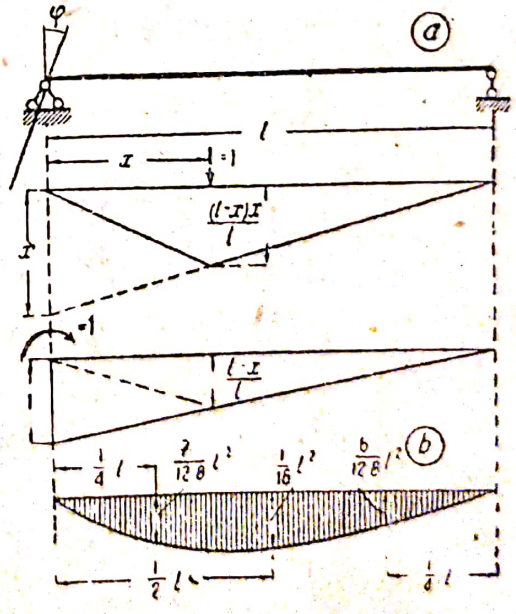


Fig. 366

Dând lui x mai multe valori, obţinem o curbă, care este linia de influenţă căutată a rotirii secţiunii (fig. 366 b);

pentru $x = \frac{1}{4} l$ $\quad EI\,\delta_{mk} = \frac{7}{128} l^2$

„ $x = \frac{1}{2} l$ $\quad EI\,\delta_{mk} = \frac{1}{16} l^2$

„ $x = \frac{3}{4} l$ $\quad EI\,\delta_{mk} = \frac{5}{128} l^2$

Probleme și exerciții

124. Să se construiască linia de influență a săgeților unei articulații intermediare a arcului parabolic reprezentat în fig. 367, ținând seama numai de influența momentelor. Ecuația axei arcului este : $y = \frac{4f}{l} x\,(l-x)$.

Secțiunea arcului este constantă.

Indicație. La alcătuirea ecuației liniei de influență trebue să utilizăm descompunerea încărcării în încărcare simetrică și antisimetrică și să considerăm $ds = dx$.

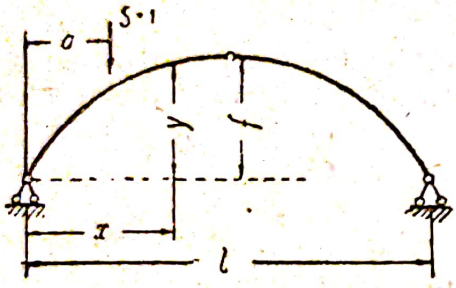


Fig. 367

125. Să se construiască linia de influență a variației unghiului 14 — 2 — 3 al grinzii cu zăbrele, înfățișată în fig. 368.

Indicație. Pentru a putea determina variația valorii acestui unghiu, trebue să alegem două cupluri ; în acest caz, efortul provocat de aceste cupluri se produce numai în triunghiul 14 — 2 — 3.

Pentru alcătuirea ecuației care determină linia de influență, trebue să alegem poziția sarcinii mobile, atât în nodurile din dreapta și din stânga nodului 14, cât și chiar în nodul 14.

Aplicând sarcina în dreapta nodului 14, ecuația liniei de influență, alcătuită după formula

$$\delta_{mk} = \sum \frac{\bar{N}_k \bar{N}_m}{EF} s$$

va avea următoarea formă :

$$\delta_{mk} = \frac{(l-x)}{l\,EF} \quad \frac{(1 + \sin\alpha)}{\cos\alpha}$$

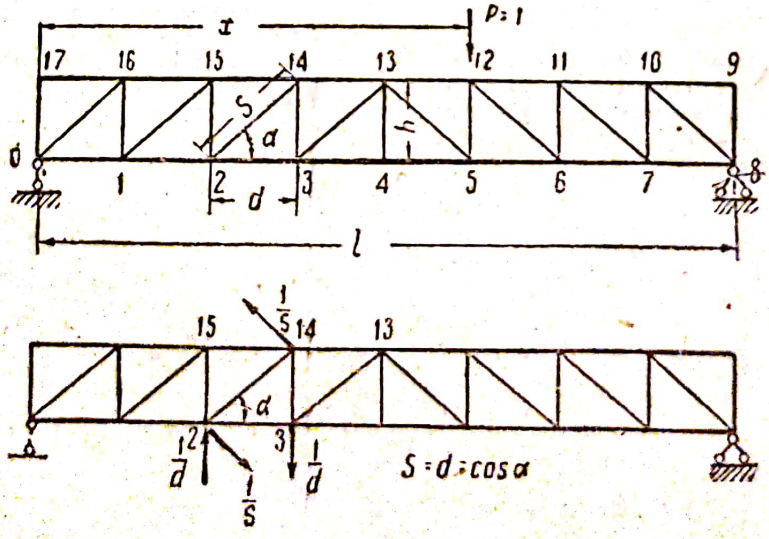


Fig. 368

In mod analog se determină ordonatele liniei de influență ale deformației căutate, când sarcina se găsește în nodul 14 și la stânga lui.

CAPITOLUL 18

DETERMINAREA DEPLASĂRILOR CU AJUTORUL SARCINILOR ELASTICE

§ 88. Noţiuni introductive

Tabloul complet al deformaţiilor oricărui sistem se obţine după ce s'au stabilit deplasările reale ale tuturor punctelor şi nodurilor sistemului (fig. 369). Totuşi adeseori în practică şi în calculele tehnice, trebue să aflăm, în loc de deplasările reale ale nodurilor grinzilor cu zăbrele sau axelor grinzilor, proiecţiile acestor deplasări pe o anumită direcţie. Această problemă este de exemplu în strânsă legătură cu determinarea săgeţii sistemului.

Cu toate că săgeţile punctelor din axa grinzii sau a nodurilor grinzilor cu zăbrele pot fi determinate prin calcularea lor succesivă cu formula (163), în acest caz însă utilizarea sarcinilor virtuale şi elastice este mult mai indicată. Intrebuinţarea sarcinilor elastice la determinarea deplasărilor se bazează pe studiul deformaţiilor lanţurilor articulate, formă la care pot fi reduse toate sistemele, atât cele cu bare articulate, cât şi cele cu secţiune plină.

Analizând starea deformaţiei grinzii cu zăbrele reprezentată în fig. 369, se poate vedea că pentru construirea geometrică a poziţiei nodurilor ei deplasate, nu este nevoie să determinăm deformaţiile barelor şi tuturor unghiurilor. Ne putem limita la determinarea lungimilor deformate ale barelor zăbrelelor 0 — 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 7 — 8 şi a unghiurilor dintre aceste bare.

Fig. 369

Aceste zăbrele formează tocmai acel lanţ articulat, care trebue să fie separat de grindă şi studiat din punct de vedere al deformaţiilor, spre a putea construi grinda cu zăbrele deformată.

Studiul deformaţiei grinzii cu zăbrele poate fi limitat prin necesitatea de a cunoaşte poziţia nodurilor numai unei singure tălpi, de exemplu a tălpii inferioare, care se găseşte pe lungimea lanţului 0 — 2 — 4 — 6 — 8, ceea ce simplifică rezolvarea problemei. In general, însă, într'un sistem cu bare articulate, lanţul poate fi ales după direcţii arbitrare dela un nod de reazim la celălalt.

In sistemele cu secţiune plină şi axă continuă (fig. 370), lanţurile se formează prin împărţirea axei în porţiuni legate între ele prin articulaţii, la care se aplică momentele ce înlocuesc legăturile interioare suprimate. Intr'un asemenea lanţ, deplasările tuturor punctelor pot fi găsite prin aceeaşi modalitate ca şi într'un lanţ care a fost separat dintr'o grindă cu zăbrele, adică prin determinarea de-

Fig. 370

formațiilor unghiurilor formate de porțiunile vecine, precum și a deformațiilor din porțiunile care alcătuesc lanțul.

§ 89. Determinarea deplasărilor prin metoda momentelor statice

Dacă punem, sub formă de ordonate, segmente egale în mărime cu deplasările punctelor din axa grinzii sau cu deplasarea nodurilor unei grinzi cu zăbrele, poligonul care trece prin vârfurile ordonatelor reprezintă epura deplasărilor. Conturul epurei deplasărilor reamintește curba momentelor (fig. 371). De aceea se naște întrebarea, dacă s'ar putea să construim curba deplasărilor, ca fiind curba momentelor date de o sarcină concentrată virtuală oarecare, raportând acțiunea acestor forțe la o bară dreaptă convențională, care este proiecția sistemului pe direcția perpendiculară pe deplasările necunoscute.

Pornind dela proprietățile curbei momentelor, se poate scrie că forțele fictive necunoscute W, pe care le căutăm, pot fi determinate ca diferența forțelor tăietoare în cele două părți ale nodului*).

$$W_k = Q_{f\,(k+1)} - Q_{fk}$$

sau

$$W_k = \frac{M_{f\,(k+1)} - M_{fk}}{d_{(k+1)}} - \frac{M_{fk} - M_{f\,(k-1)}}{d_k} \qquad (171)$$

Conform condiției de mai sus, prin momentele $M_{f\,(k-1)}$, M_{fk}, $M_{f\,(k+1)}$, trebue să se determine ordonatele y_{k-1}, y_k și y_{k+1} ale epurei săgeților și de aceea valoarea sarcinii fictive se va determina prin expresia:

$$W_k = \frac{y_{k+1}}{d_{k+1}} - \frac{y_k}{d_{(k+1)}} - \frac{y_k}{d_k} + \frac{y_{k-1}}{d_k} \qquad (172)$$

Valoarea acestei sarcini fictive poate fi găsită, dacă vom determina deplasările y_{k-1} y_k și y_{k+1}, în care scop în punctele respective trebue să fie aplicate sarcinile unitare. Deoarece deplasările necunoscute întră în expresia sarcinii fictive la scara $\frac{1}{d_k}$ și $\frac{1}{d_{k+1}}$, sarcinile unitare aplicate la sistem, în loc de unitate, vor avea valorile $\frac{1}{a_k}$ respectiv $\frac{1}{d_{k+1}}$ cu semnele corespunzătoare semnelor deplasărilor din formula (172), după cum se arată în fig. 372.

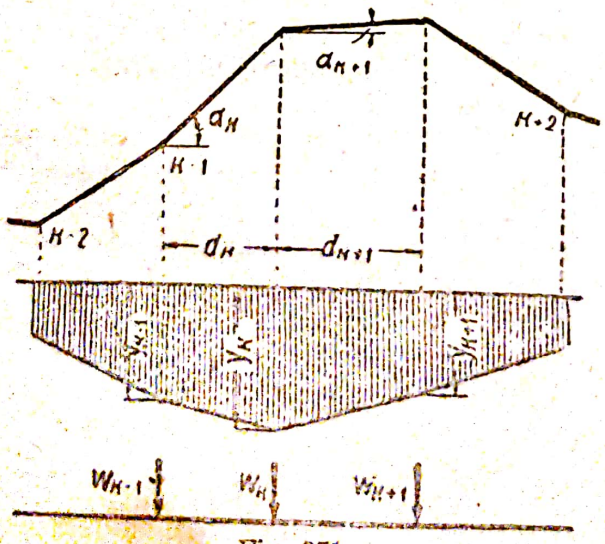


Fig. 371

Din expresia (172) se vede că sarcina fictivă W reprezintă

*) Notă. In fig. 371 și în figurile următoare, sensul pozitiv al forțelor fictive se consideră de sus în jos.

Scanned with OKEN Scanner

lucrul mecanic al forţelor convenţionale $\frac{1}{d}$ pe deplasările reale y ; de aceea valoarea acestor sarcini poate fi calculată în acelaşi fel ca lucrul eforturilor interioare, care apar în sistem sub acţiunea încărcării date. Această determinare poate fi făcută prin formula (162).

$$W_k = \sum \left[\int \overline{M}_k \frac{M_m}{EI} ds + \right.$$
$$\left. + \int \overline{N}_k \frac{N_m}{EF} ds + k \int \overline{Q}_k \frac{Q_m}{GF} ds \right] \qquad (173)$$

în care $\overline{M}_k$, $\overline{N}_k$ şi $\overline{Q}_k$ sunt momentele, forţele axiale şi forţele tăietoare care apar în sistem sub influenţa momentelor unitare, aplicate la barele ce alcătuesc schema lanţului.

După ce vom calcula în toate nodurile lanţului valorile sarcinilor elastice, putem să trecem la calculul deplasărilor liniare considerate ca momente statice date de forţele virtuale W_k , pentru care motiv acestea din urmă se repartizează la o bară dreaptă fictivă (convenţională). Această bară dreaptă nu poate fi considerată ca izolată de schema construcţiei date, pe care o înlocuieşte. Legătura între bara fictivă şi schema construcţiei constă în următoarele :

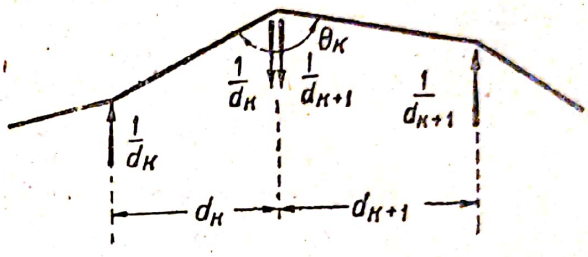


Fig. 372

a) dacă sub acţiunea încărcării, schema construcţiei nu are deplasări în punctul dat, momentul produs de forţele fictive în acest puct al barei fictive trebue să fie egal cu zero şi invers, existenţa deplasării sistemului este condiţionată de existenţa momentului fictiv în acest punct al barei fictive (convenţionale).

b) dacă într'o secţiune oarecare înclinarea tangentei variază faţă de axa deformată, atunci în această secţiune a barei fictive, trebue să fie aplicată o forţă tăietoare virtuală.

De exemplu, dacă construcţia dată (fig. 373) este încastrată la o extremitate, deci $y_A = 0$ şi $\varphi_A = 0$ şi este liberă la celălalt, deci $y_B \neq 0$ şi $\varphi_B \neq 0$, atunci în punctul A al barei fictive (convenţionale) avem :

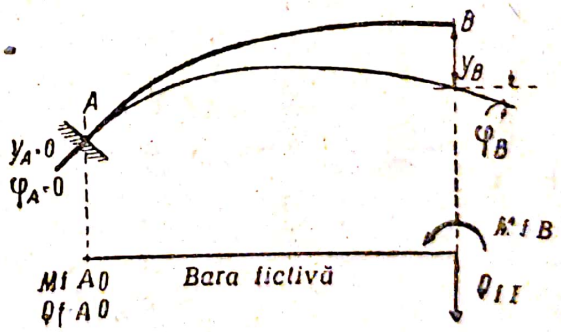


Fig. 373

$$M_{fA} = 0 \text{ şi } Q_{fA} = 0 ;$$

iar în punctul B al barei convenţionale trebue să fie aplicate şi determinate M_{fB} şi Q_{fB}.

Valorile momentelor şi forţelor tăietoare virtuale care se introduc în schema barei fictive se determină după datele din celelalte puncte ale sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem, de exemplu, că sistemul dat este o grindă cu console (fig. 374), ale cărei extremități C și D au o săgeată, iar secțiunile transversale din dreptul acestor puncte sunt rotite.

Față de această situație, trebue să aplicăm pe schema barei fictive forțele și momentele virtuale $M_{\Phi C}$, $Q_{\Phi C}$ și $M_{\Phi D}$, $Q_{\Phi D}$.

Relația din care se pot determina aceste necunoscute este că în punctele de reazim ale sistemului dat $y_A = y_B = 0$ și respectiv $M_{fA} = M_{fB} = 0$, ceea ce permite să alcătuim următoarea ecuație de echilibru a sarcinilor virtuale.

$$M_{fC} + Q_{fC}\, l_1 - \sum_{C}^{A} W \cdot a = 0\,;$$

$$M_{fC} + Q_{fC}\,(l_1+l_2) - \sum_{C}^{B} W \cdot b = 0\,;$$

Rezolvând aceste două ecuații, se determină valorile necunoscutelor M_{fC} Q_{fC}. Pentru determinarea celorlalte necunoscute pot fi alcătuite ecuații noi.

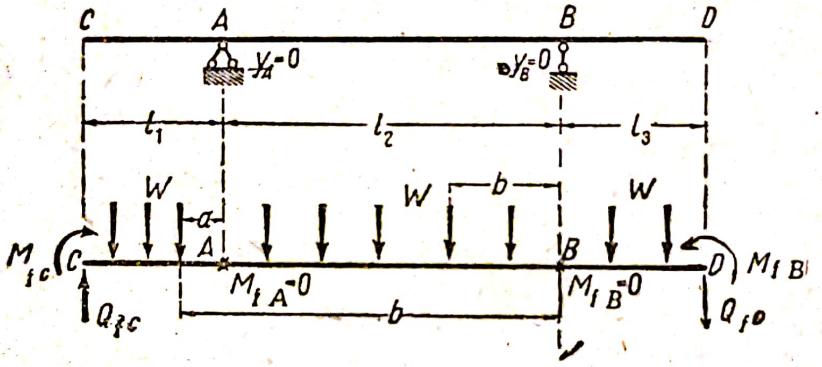


Fig. 374

După ce aceste încărcări și forțe fictive vor fi determinate, *deplasările liniare ale punctelor sistemului se calculează ca fiind momente statice ale sarcinilor virtuale față de punctele respective ale barei fictive (convenționale), iar unghiurile de rotire se calculează ca forțe tăietoare virtuale în punctele respective ale barei fictive.*

De exemplu săgeata în punctul K din sistemul reprezentat în fig. 375 se determină cu expresia :

$$\Delta_k = M_{fk} = Q_{fA} \cdot a_k - \sum_{1}^{k-1} W\,(a_k - a)$$

sau

$$\Delta_k = \frac{a_k}{l} \sum_{1}^{n-1} W\,(l - a) - \sum_{1}^{k-1} W\,(a_k - a) \qquad (174)$$

Unghiul de rotire al aceleiași bare se va determina din expresia :

$$\varphi_k = Q_{fA} - \sum_{1}^{k-1} W \qquad (175)$$

Scanned with OKEN Scanner

Procedeul expus este aplicabil atât la sistemele cu secţiune plină, cât şi la sistemele cu bare articulate (grinzi cu zăbrele). In raport cu natura sistemului, se modifică şi procedeul de calcul al valorilor sarcinilor elastice, cum se arată în § 91 şi 93.

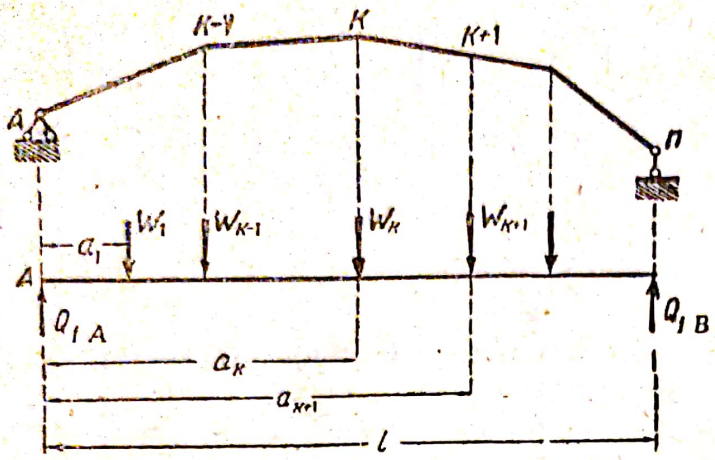


Fig. 375

Determinarea deplasărilor cu ajutorul sarcinilor elastice se poate face după toate direcţiile. Mai sus am analizat un caz mai frecvent în practică, când se determină deplasările pe direcţia perpendiculară la planul de mişcare al aparatelor de reazim. Dacă deplasările se determină după o direcţie înclinată cu unghiul γ faţă de *planul de mişcare* (fig. 376), calculul deplasărilor trebue să se facă ţinând seama de deplasarea Δl din planul reazimului mobil, care este rezultatul deplasării tuturor punctelor sistemului în această direcţie. Această deplasare suplimentară în reazimul mobil, determinată prin valoarea $\Delta l \cos \gamma$, poate fi considerată ca un moment virtual în reazim.

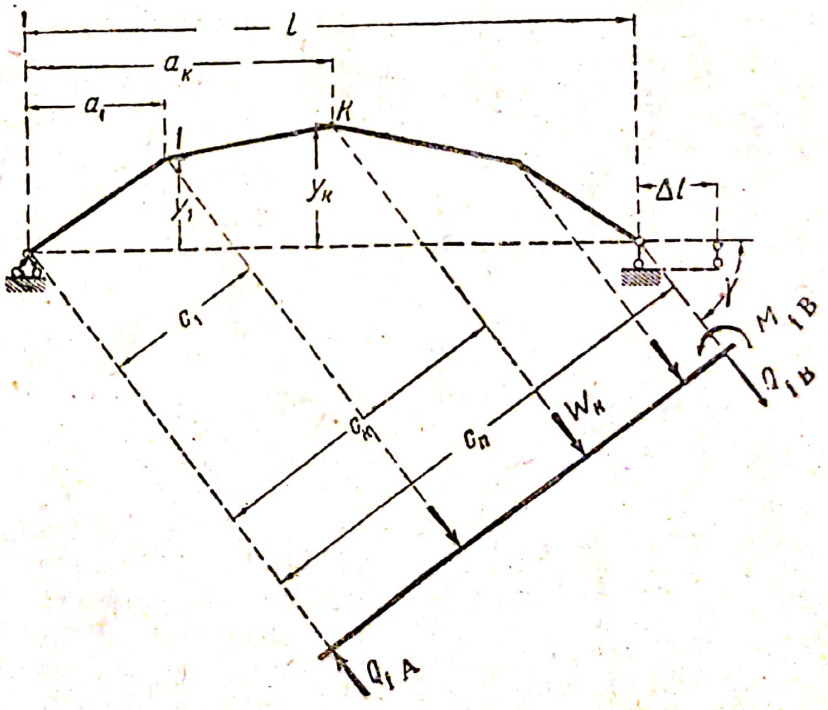


Fig. 376

$$M_{1B} = \Delta l \cos \gamma$$

cu semnul corespunzător direcţiei deplasării (considerat pozitiv când deplasarea este îndreptată în jos). Valoarea acestui moment şi valcarea forţelor tăietoare virtuale provocate de acţiunea acestui moment, care sunt:

$$Q_{1B} = Q_{1A} = \frac{\Delta l \cos \gamma}{c_n}$$

Scanned with OKEN Scanner

trebue să fie ţinute în seamă la calculul deplasării pe această direcţie a oricărui punct K :

$$\Delta_k = \frac{c_k}{c_n}\left[\sum_1^{n-1} W\,(c_n - c) + \Delta l \cos\gamma\right] - \sum_1^{n-1} W\,(c_k - c) \quad (176)$$

Valorile care intră în aceste formule ale deplasării, Δl, se determină în prealabil din formula generală (174) adoptată pentru direcţia dată :

$$\Delta l = \sum_1^{n-1} W \cdot y$$

§ 90. Intrebuinţarea poligonului funicular la construirea epurei deplasărilor

In paragraful precedent s'a stabilit că fiecare deplasare poate fi determinată ca un moment static dat de forţele virtuale W. Insă din statica grafică se ştie că fiecare moment static poate fi determinat cu ajutorul poligonului funicular, ca un produs dintre distanţa polară H şi segmentul y paralel cu rezultanta, măsurat între laturile extreme respective ale poligonului funicular.

$$M = y \cdot H \cdot$$

Utilizând această proprietate a poligonului funicular pentru construirea epurei deplasărilor şi considerând valorile deformaţiilor unghiulare drept forţele virtuale W, trebue să construim pentru ele un poligon al forţelor la scara distanţei polare $H = 1$, urmând să construim apoi poligonul funicular respectiv.

Condiţia $H = 1$ rezultă din faptul că deplasarea, stabilită prin momentul static, se determină în poligonul funicular prin produsul :

$$\Delta = M_f = y \cdot H = y \cdot 1 \quad (177)$$

Prin urmare, pentru ca segmentele cuprinse între laturile extreme ale poligonului funicular, construit pentru sarcinile virtuale, să reprezinte de-a-dreptul deplasările, trebue să alegem distanţa polară egală cu unitatea.

Poligonul funicular pentru sarcina virtuală W se construeşte la fel ca şi în cazurile obişnuite.

In fig. 377 sunt reprezentate poligoanele funiculare pentru următoarele direcţii ale forţelor : verticală (a), orizontală (b) şi înclinată (c).

Dacă se determină deplasarea pe direcţia perpendiculară la planul de mişcare al reazimelor, atunci poziţia liniei de închidere a poligonului funicular se determină prin punctele zero pe liniile verticale ale articulaţiilor de reazim (fig, 377), deoarece punctele de reazim nu au în această direcţie nicio deplasare. Raza vectorie (polară), paralelă cu linia de închidere, determină în poligonul forţelor valorile reacţiunilor sarcinilor elastice.

La determinarea deplasărilor în direcţia de mişcare a reazimelor, adică pe direcţia perpendiculară la cea considerată mai sus, toate laturile noului poligon funicular vor fi perpendiculare pe laturile respec-

Scanned with OKEN Scanner

tive ale poligonului din cazul precedent și direcția liniei de închidere va fi de asemenea perpendiculară pe cea precedentă.

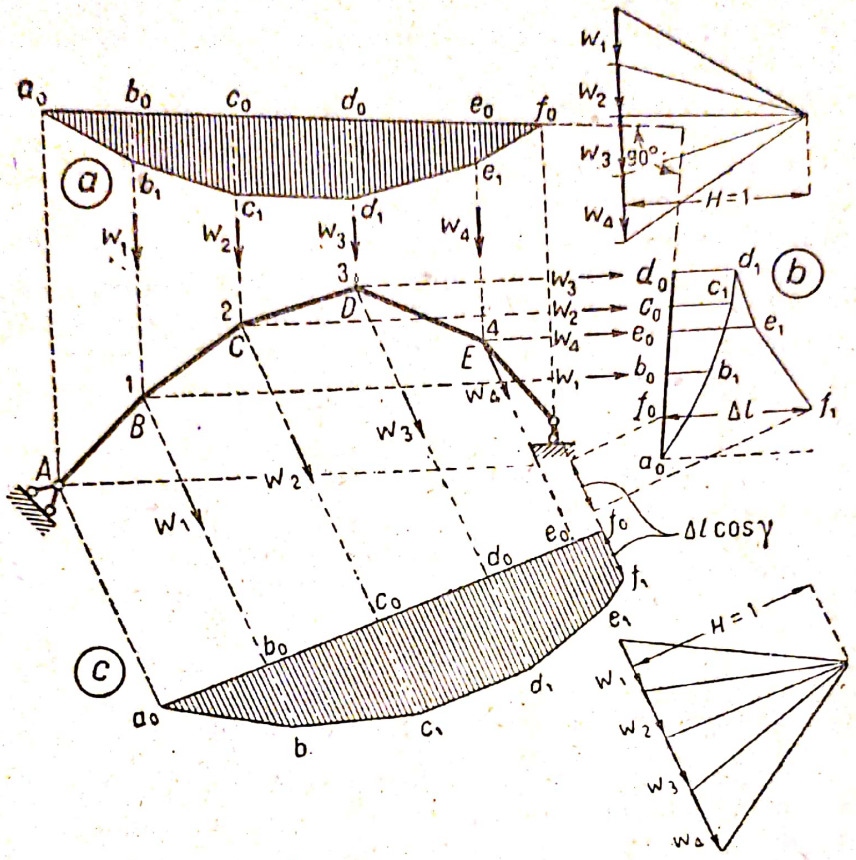


Fig. 377

Această latură va trece prin punctul a_o, corespunzător cu poziția articulației reazimului fix (fig. 377 b) și va ocupa poziția dreptei $a_o d_o$. In urma acestei construcții, valoarea deplasării Δl, pe direcția mișcării reazimelor va fi determinată prin segmentul $f_o f_1$.

Cunoscând valoarea segmentului Δl putem să construim epura deplasărilor pentru orice direcție. In acest scop după ce vom construi poligonul funicular și vom determina punctul de intersecție al ultimei laturi a poligonului cu dreapta care trece prin reazimul mobil (în fig. 376, punctul f) și care este parelelă cu direcția deplasării, se așază pe direcția dreptei dela punctul f un segment egal ca valoare cu proiecția deplasării reazimului mobil pe direcția deplasărilor, adică $f_o f_1 = \Delta l \cos \gamma$.

Semnul se determină prin direcția deplasării Δl. Prin punctul O obținut în acest fel ducem linia de închidere, dela care se măsoară deplasările tuturor punctelor sistemului.

In expresia deformațiilor, în mod obligator, trebue să figureze ca factor comun coeficientul de elasticitate E, din care cauză valorile numerice ale deplasărilor sunt mici. Scoaterea în afară a acestui

factor comun permite sporirea valorilor numerice ale deformaţiilor lor, uşurând astfel măsurarea lor în poligonul forţelor.

Insă deoarece, odată cu variaţia valorii forţelor, se schimbă şi valoarea poligonului propriu zis, pentru înlăturarea acestei variaţii este necesar să mărim respectiv şi distanţa polară, adică să o înmulţim cu valoarea lui E.

Poligonul funicular se construeşte la scara epurei, micşorată — de obiceiu — faţă de dimensiunile reale de k ori. Prin urmare, dacă voim să obţinem deplasarea în valoarea ei naturală. trebue să micşorăm distanţa polară de k ori.

In sfârşit, trebue să avem în vedere că deplasările în sisteme sunt, în general, mici şi prezintă dificultăţi la măsurarea lor chiar în mărime naturală, deci este de dorit să le obţinem mărite de m ori. Această mărire se poate obţine prin micşorarea distanţei polare a poligonului funicular de m ori,

$$H = 1\ \frac{E}{k \cdot m} \tag{178}$$

De exemplu, dacă admitem că $E = 21 \times 10^5$, reducerea la scara epurei $k = 300$ şi mărirea deplasărilor reale pe care o dorim $m = 14$, atunci lungimea segmentului care determină pe H se va calcula astfel :

$$H = 1 \cdot \frac{21 \times 10^5}{300 \times 14} = 500$$

Prin urmare, dacă în epură luăm lungimea segmentului H egală cu 5 cm, scara forţelor se va determina prin condiţia 1 cm = 100 unităţi de forţă.

Aceeaşi chestiune relativă la factorul de trecere dela poligonul funicular la epura deformaţiilor poate fi rezolvată şi în ordine inversă şi anume : dându-se distanţa polară, trebue să calculăm coeficientul de trecere $1/m$ care, conform expresiei (178) se va determina prin :

$$\frac{1}{m} = \frac{\overline{Hk}}{E}$$

§ 91. Determinarea valorii sarcinii elastice în sistemele cu secţiune plină

La determinarea deplasărilor şi construirea epurelor lor la sistemele cu secţiune plină, axa acestor sisteme se împarte în porţiuni atât de mici, încât variaţia momentelor şi eforturilor interioare pe lungimea elementului se pot considera ca rectilinii. Pe schema din fig. 378 sunt arătate două elemente separate din sistem. Curbele momentelor încovoietoare arătate în ambele porţiuni ale acestei epure sunt considerate ca pozitive, iar forţele axiale N_k şi N_{k+1} constante şi pozitive. Pentru a putea calcula valoarea sarcinei elastice W_k în punctul de legătură al acestor porţiuni, trebue să aplicăm asupra fiecărei porţiuni câte un cuplu cu valorile $\frac{1}{d_k}$ respectiv $\frac{1}{d_{k+1}}$, dându-le direcţia deplasării necunoscute. In fig. 378 sunt arătate astfel de cupluri şi sunt reprezentate pentru ele curbele momentelor. Sub acţiunea forţelor care formează

aceste cupluri, apar pe lungimea porțiunii forțele axiale pe porțiunea $(k-1)\ k$:

$$\overline{N}_k = -\frac{\sin\alpha_k}{d_k} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha_k}{s_k}$$

iar pe porțiunea $k\ (k+1)$

$$N_{k+1} = +\frac{\sin\alpha_{k+1}}{d_{k\ 1}} = +\frac{\operatorname{tg}\alpha_{k+1}}{s_{k+1}}$$

Cu aceste date se calculează integralele care intră în formula sarcinii elastice (173).

Ținând seama de influența momentelor încovoietoare virtuale, formula sarcinii elastice va fi următoarea:

$$W_{kM} = \int \overline{M}_k \frac{M}{EI}\,ds = \frac{s_k}{6EI}(2M_k + M_{k-1}) + \frac{s_{k+1}}{6EI_{k+1}}(2M_k + M_{k+1}) \quad (179)$$

Ținând seama de influența forțelor axiale, formula sarcinii elastice va avea următorul aspect:

$$W_{kN} = \int \overline{N}_k \frac{N}{EF}\,ds = -\frac{N_k S_k}{EF_k}\frac{\sin\alpha_k}{d_k} + \frac{N_{k+1} S_{k+1}\sin\alpha_{k+1}}{EF_{k+1}\ d_{k+1}} =$$

$$= -\frac{N_k}{EF_k}\operatorname{tg}\alpha_k + \frac{N_{k+1}}{EF_{k+1}}\operatorname{tg}\alpha_{k+1} \quad (180)$$

Formula completă și desfășurată a sarcinii elastice, care ține seama de influența momentelor și forțelor axiale, va fi:

$$W_k = W_{kM} + W_{kN}$$

Trebue să menționăm că *valoarea sarcinii elastice dependentă de momentele încovoietoare* (179) *rămâne invariabilă pentru orice direcție a deplasărilor ce se determină.* In ce privește influența forțelor axiale asupra valorii sarcinii elastice, aceasta depinde de unghiul de înclinare al barei față de direcția deplasării căutate, ceea ce adeseori (§ 92) complică calculele.

Influența forțelor tăietoare asupra valorii sarcinii elastice se poate stabili din următoarele considerente:

Forțele tăietoare din încărcarea reală se determină cu valorile:

$$Q_k = \frac{M_k - M_{k-1}}{s_k};$$

$$Q_{k+1} = \frac{M_{k+1} - M_k}{s_{k+1}}$$

Forțele tăietoare din încărcarea unitară se determină prin

$$\overline{Q}_k = \frac{1}{s_k};$$

$$\overline{Q}_{k+1} = -\frac{1}{s_{k+1}}$$

Față de aceste condiții, valoarea sarcinii elastice se determină cu formula:

$$W_{kQ} = k\,\frac{M_k - M_{k-1}}{s^2_k\,GF} - k\,\frac{M_k - M_{k+1}}{s^2_{k+1}\,GF} \qquad (181)$$

în care k este coeficientul de neuniformitate a distribuirii solicitărilor tangențiale și al deformației în secțiunea barei.

Exemplu. Presupunem că se cere să construim epura deformațiilor cadrului triunghiular, reprezentat în fig. 379, încărcat cu sarcina concentrată P.

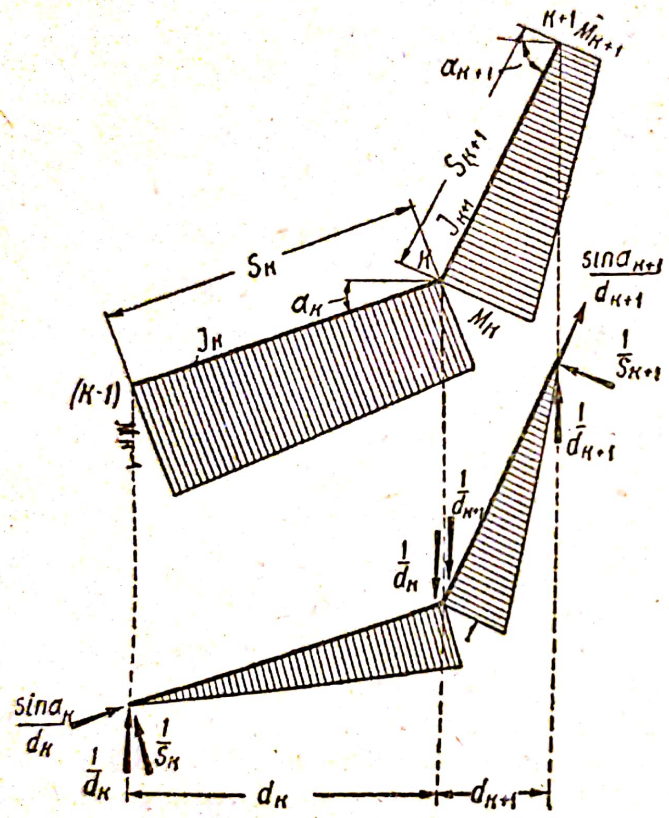


Fig. 378

Sarcinile elastice care depind de momentele date de încărcare, se calculează cu formula (178), care, la lungimi egale $\frac{1}{2}s$ ale segmentelor axei barei, se aduc la următoarele forme:

$$W_{kM} = \frac{s}{12\,EI}(M_{k-1} + 4\,M_k + M_{k+1})$$

Să calculăm după aceasta valorile sarcinii elastice din punctul al doilea:

$$W_{2M} = \frac{s}{12\,EI}\left(\frac{3}{16}Pl + \frac{4}{8}Pl + \frac{1}{16}Pl\right) = \frac{6}{96}\cdot\frac{sPl}{EI}$$

In mod analog se calculează valorile sarcinilor elastice și din celelalte puncte:

$$W_{0M} = \frac{3}{192}C;$$

$$W_{1M} = \frac{7}{96}C;$$

$$W_{2M} = \frac{6}{96}C;$$

$$W_{3M} = \frac{3}{96}C;$$

$$W_{4M} = \frac{1}{192}C;$$

în care

$$C = \frac{P\cdot sl}{E\,I}$$

Sarcinile elastice care apar în urma acțiunii forțelor axiale sunt:

$$N_{01} = -\frac{3}{4}P\sin\alpha;$$

$$N_{1,2} = \frac{1}{4}P\sin\alpha;$$

$$N_{15} = N_{54} = -\frac{1}{4}P\sin\alpha;$$

și se calculează cu formula (180).

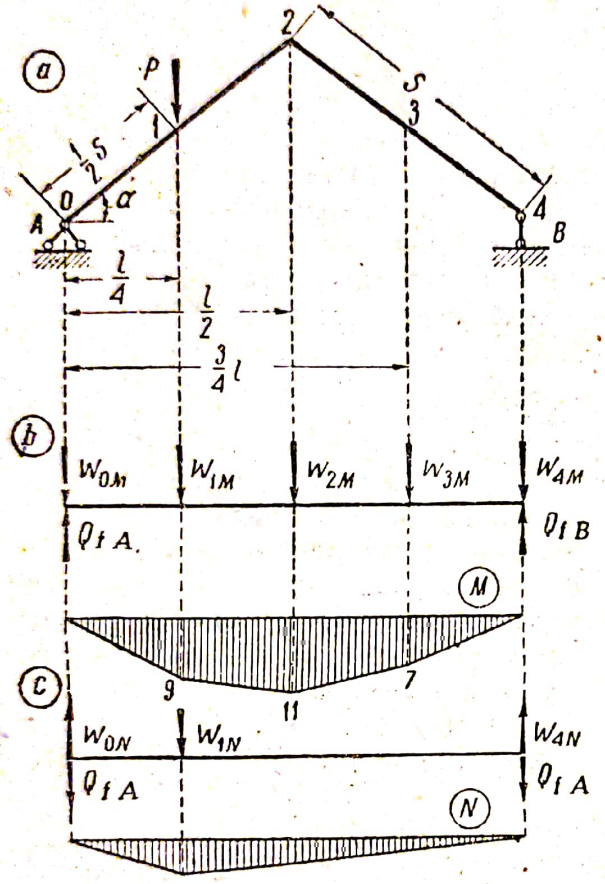
Să calculăm detaliat cu această formulă două sarcini :

$$W_{1N} = \frac{3}{4}\frac{P}{EF}\frac{s}{2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{0{,}25\,l} + \frac{1}{4}\frac{P}{EF}\frac{s}{2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{0{,}25\,l} = 2\,\frac{Ps}{EFl}\sin^2\alpha\,;$$

și

$$W_{2N} = -\frac{1}{4}\frac{P}{EF}\cdot\frac{s}{2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{0{,}25\,l} + \frac{1}{4}\frac{P}{EF}\frac{s}{2}\frac{\sin^2\alpha}{0{,}25\,l} = 0$$

In mod analog se calculează și sarcinile elastice pentru celelalte puncte :



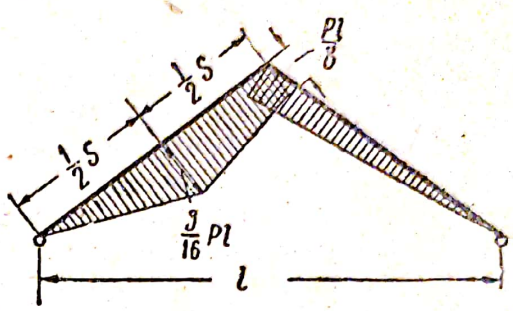


Fig. 379

$$W_{0N} = -\frac{3}{2}D\,;$$

$$W_{1N} = 2D\,;$$

$$W_{2N} = 0\,;$$

$$W_{3N} = 0\,;$$

$$W_{4N} = -\frac{1}{4}D\,;$$

în care : $D = \dfrac{Ps}{EF\,l}\sin^2\alpha$.

Deoarece cadrul considerat poate să se rotească la capete, determinăm valoarea forței tăietoare Q_{fA} la extremitatea din stânga ;

din momentul M :

$$Q_{fA} = \frac{C}{192}\left(3 + 14\cdot\frac{3}{4} + 12\cdot\frac{2}{4} + 6\cdot\frac{1}{4}\right) = \frac{21}{192}C\,,$$

din forța axială N :

$$Q_{fA} = D\left(-\frac{3}{2} + 2\cdot\frac{3}{4}\right) = 0\,.$$

In fig. 379 *b* și *c* sunt arătate schemele de distribuție ale sarcinilor virtuale pe proiecția orizontală a cadrului. După această schemă determinăm valorile deformațiilor din punctele de aplicație ale sarcinilor, calculându-le ca momente statice ale sarcinilor elastice :

$$f_2 = \frac{C}{192}\left[(21 - 3)\frac{1}{2} - 14\,\frac{1}{4}\right] +$$

$$+ D\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{4}\,1\right) = \frac{11}{384}C + \frac{1}{4}D$$

În mod analog se determină săgeţile şi în celelate noduri:

$$f_1 = \frac{9}{384} C + \frac{3}{8} D$$

$$f_3 = \frac{7}{384} C + \frac{1}{8} D$$

In fig. 379 b şi c sunt construite separat epurele deformaţiilor provocate de acţiunea momentelor şi forţelor tăietoare. Ordonatele primei epure sunt construite la scara valorii $C = \frac{sPl}{EF}$, iar ordonatele de celei a doua epure, la scara valorii $D = \frac{P \cdot s}{EF} \sin^2 \alpha$.

Determinarea deplasărilor şi construirea epurelor deformaţiilor pentru sarcinile fictive elastice, este cu atât mai precisă cu cât lungimea porţiunilor în care se împarte axa sistemului este mai mică, ceea ce este foarte important în cazul când epura momentelor creşte în mod accentuat şi are conturul cu o curbură pronunţată.

In cazurile când valorile forţelor elastice nu depind de influenţa forţelor axiale, ele pot fi calculate — în loc de formula (179) — după formula

$$W = \frac{M_{k-1} + M_k}{2\ EI_k} s_k \qquad (182)$$

adică, calculându-le ca suprafaţa trapezului epurei momentelor care se referă la porţiunea dată. Un asemenea calcul al celorlalte sarcini cere însă ca poziţia lor pe axa barei să fie raportată la proiecţia centrului de greutate al trapezului pe această axă. Dacă epura prezintă o creştere lentă, atunci se poate admite, cu destulă precizie, că centrul de greutate al trapezului coincide cu jumătatea porţiunii. La o asemenea aproximaţie, eroarea finală nu întrece, în general, 2—3%.

Dacă axa barei se împarte în porţiuni suficient de mici cu lungimea Δs şi să ţină seamă că în acest caz $M_{k-1} = M_k = M$, formula (182) va avea forma următoare:

$$\Delta\ W = \frac{M\ \Delta s}{E\ I} \qquad (183)$$

care reprezintă un element al suprafeţei epurei momentelor.

După cum se ştie, sarcinile elastice de acest gen se utilizează în studiile de rezistenţa materialelor pentru determinarea elementelor unei axe deformate prin încărcarea fictivă a grinzilor prin curba momentelor.

§ 92. Caz particular

Valoarea şi semnul sarcinii elastice, calculate după formula (180):

$$W_k = -\frac{N_k}{EF_k} \operatorname{tg} \alpha_k + \frac{N_{k+1}}{EF_{k+1}} \operatorname{tg}\ \alpha_{k+1}$$

depind de înclinarea barei şi direcţia deplasării necunoscute ce se caracterizează prin unghiurile α, care în cazuri particulare pot căpăta va-

Scanned with OKEN Scanner

lori de 90°. Aceasta se întâmplă când axa barei este paralelă cu direcţia deplasării ce se determină (fig. 380).

La această valoare a unghiului, tg $\alpha = \infty$, ceea ce introduce o nedeterminare în calcule.

Pentru înlăturarea acestei nedeterminări, trebue să ne întoarcem la punctul de plecare şi să confruntăm epura deplasărilor cu curba momentelor pentru acest caz. Existenţa în sistem a barei paralele cu deplasarea căutată şi solicitată de eforturi axiale în epura deformaţiilor se va caracteriza printr'o discontinuitate (salt) (fig. 380).

$$\Delta y = y_{k+1} - y_k$$

egal ca valoare cu deformaţia axială a acestei bare:

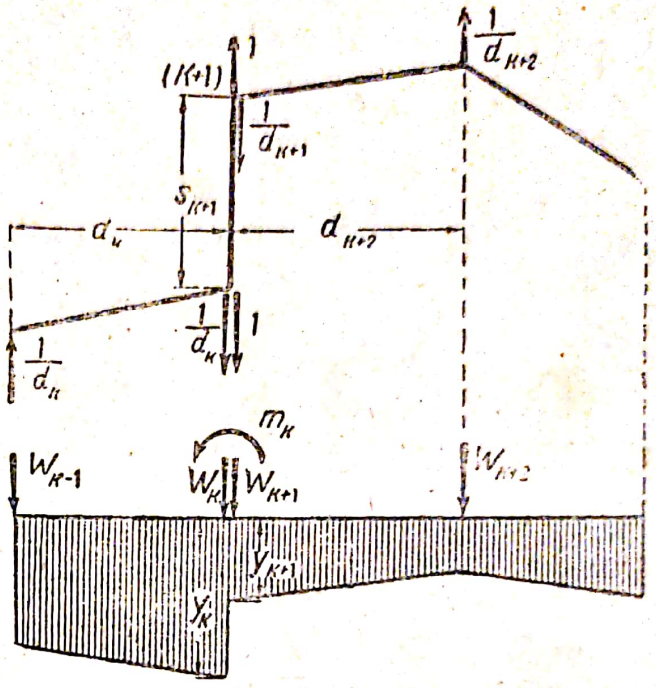


Fig. 380

$$\Delta y_{k+1} = \frac{N_{k+1}\, s_{k+1}}{EF_{k+1}}$$

Pornind ca şi mai înainte dela compararea epurei deformaţiilor cu curba momentelor, trebue să admitem că există în epura deformaţiilor creşterea Δy ceea ce este echivalent cu existenţa unui cuplu în încărcarea pentru care s'a construit curba momentelor.

De aci rezultă că influenţa deformaţiei barei, paralelă cu deformaţia necunoscută, pentru încărcarea virtuală, trebue să fie reprezentată ca un moment virtual:

$$m_{f\,(k+1)} = \Delta y_{k+1} = \frac{N_{k+1}\, s_{k+1}}{EF_{k+1}}$$

Semnul momentului se fixează în funcţie de semnul forţei axiale şi de direcţia barei; dacă forţa axială este pozitivă şi bara se îndreaptă în sus (fig. 380) atunci momentul va avea sensul negativ, întru cât prezenţa barei va provoca micşorarea ordonatelor părţii din dreapta.

In ce priveşte forţele virtuale W_k şi W_{k+1}, ele se vor calcula în acest caz cu formula (171), însă fără influenţa forţei tăietoare virtuale $Q_{f\,k}$, deci fără influenţa rotirii barei k $(k+1)$ şi fără să mai aplicăm la această bară cuplul unitar. Forţele virtuale W_k şi W_{k+1}, calculate fără

influenţele arătate mai sus se însumează pe direcţia lor şi se introduc sub această formă în calculul valorii deplasării ca un moment static.

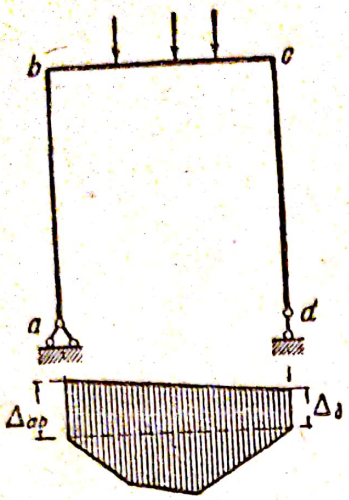


Fig. 381

Cazul barelor paralele cu deplasările ce se determină se prezintă mai des la sistemele în forma de cadru, în care deformarea stâlpilor cadrului influenţează asupra tuturor deplasărilor riglei.

De exemplu, să presupunem că avem cadrul reprezentat în fig. 381, aflat sub acţiunea încărcării de pe riglă şi că stâlpii cadrului sunt comprimaţi cu valorile Δ_{ab} şi Δ_{cd}, atunci epura deplasărilor provocate de acţiunea directă a sarcinilor trebue să fie mărită prin introducerea pe reazim a două momente virtuale.

$$m_{af} = \Delta_{ab} \quad \text{şi} \quad m_{cf} = \Delta_{cd}$$

Exerciţii

126. Să se construiască epura deplasărilor verticale şi orizontale din cadrul reprezentat în fig. 382, încărcat cu sarcina uniform distribuită $p = 500$ kg/m.

Reacţiunile cadrului sunt: $A = 900$ kg şi $B = 2100$ kg.

Calculul sarcinilor virtuale W s'a făcut după curba momentelor, ale cărei ordonate s'au calculat la intervale egale: la bara înclinată a cadrului la intervalul $\Delta_s = 1{,}00$ m, iar la bara orizontală la intervalul $\Delta_s = 1{,}20$ m.

In tabloul de mai jos sunt extrase: valorile ordonatelor epurei, suprafeţele diferitelor porţiuni ale curbei momentelor, precum şi aceleiaşi suprafeţe modificate în raportul momentelor de inerţie.

Suprafeţele calculate sunt considerate drept sarcinile elastice W, iar punctele lor de aplicaţie se repartizează la axa cadrului.

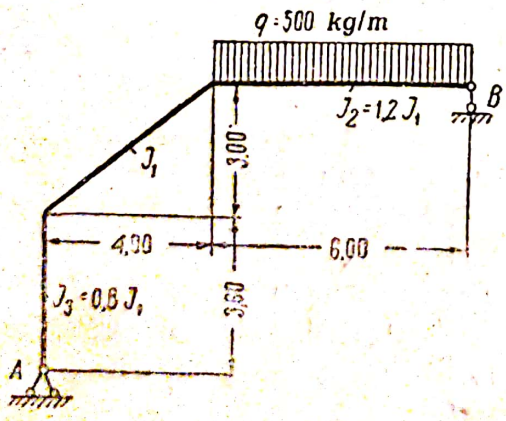


Fig. 382

Calculul analitic. Pentru determinarea analitică a deplasărilor cu metoda sarcinilor elastice, calculăm forţa tăietoare virtuală Q_{fA} în extremitatea din stânga:

$$EI_o\left[Q_{fA}\right] = \frac{1}{l}\sum_{o}^{n-1} W\,(l-a) =$$

$$= \frac{1}{10}\left[\frac{1}{2}\cdot 3600\cdot 5\,(6+1{,}33) + 3960\cdot 5{,}6 + \right.$$

$$+ 4320\cdot 4{,}21 + 3960\cdot 3{,}0 + 2880\cdot 1{,}87 +$$

$$\left. + 1080\cdot 0{,}8\right] = 12237 \text{ kg m}^2$$

Deplasările în direcţiile verticale şi orizontale ale unui punct oarecare al cadrului se determină din expresia momentelor statice ale sarcinilor elastice ce se găsesc în stânga acestui punct.

Scanned with OKEN Scanner

Nr. panoului	Lungimea panoului Δs în m	Distanța dela reazimul din stânga în m	Lungimea de încărcare x m	Ordonata curbei momentelor în kg m	Supraf. curbei mom kgm²	Supraf. Ep. raportate $F\frac{I^0}{I}$ kgm²	Sarcini elastice W kg m²
1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	—	—	—	—	—
1	1,0	0,8	—	720	360	360	W_1
2	1,0	1,6	—	1440	1080	1080	W_2
3	1,0	2,4	—	2160	1800	1800	W_3
4	1,0	3,2	—	2880	2520	2520	W_4
5	1,0	4,0	—	3600	3240	3240	W_5
6	1,2	5,2	1,2	4320	4752	3960	W_6
7	1,2	6,4	2,4	4320	5184	4320	W_7
8	1,2	7,6	3,6	3600	4752	3960	W_8
9	1,2	8,8	4,8	2160	3456	2880	W_9
10	1,2	10,0	6,0	0	1296	1080	W_{10}

De exemplu (fig. 383) pentru punctul K care separă a doua și a treia sarcină fictivă și se găsește dela extremitatea din stânga — pe orizontală, la distanța

$$x_k = \frac{4}{5} \cdot 2{,}00 = 1{,}6 \ m \ ;$$

iar pe verticală :

$$y_k = 3{,}6 + \frac{3}{5} \cdot 2{,}00 = 4{,}8 \ m \ ;$$

valorile deplasărilor vor fi :

$$\text{pe verticală : } EI_o \ \Delta_{kv} = 12237 \cdot 1{,}6 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1440 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1{,}6 =$$

$$= 18811 \text{ kg m}^3$$

iar pe orizontală :

$$EI_o \ \Delta_{kh} = 12237 \cdot 4{,}8 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1440 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1{,}2 =$$

$$= 58161 \text{ kg m}^3$$

Valoarea deplasării orizontale a reazimului din dreapta se determină din expresia momentului forțelor elastice în raport cu articulația B :

$$\Delta \ l = \frac{1}{EI_o} M_{fB} = \frac{1}{EI_o} \left[Q_{fA} \ h - \sum_{o}^{n-1} W_y \cdot \right] =$$

$$= \frac{1}{EI_o} (12237 \cdot 6{,}6 - \frac{1}{2} 3600 \cdot 5 \cdot 1) = \frac{71 \cdot 814}{EI_o} \text{ kg m}^3$$

Calculând cu metoda expusă deplasările unui rând de puncte ale cadrului, se poate construi după aceste calcule epura deplasărilor.

Este însă mai simplu să construim epura completă prin metoda grafică.

Construcția grafică. Construcția grafică a epurelor deplasărilor și determinarea după ele a diferitelor puncte — separat — se face cu ajutorul poligonului forțelor și a poligonului funicular, construită pentru sarcinile elastice.

La construirea poligonului forțelor, distanța polară este $H = 10000$ kg m².

Cu acest poligon de forțe se construesc poligoanele funiculare pentru direcția verticală a și orizontală b a sarcinilor elastice.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece amândouă reazimele nu au deplasare în sens vertical, linia de închidere $a_1\ b_1$ a primului poligon se determină prin intersecția laturilor extreme ale poligonului funicular cu verticalele care trec prin reazime. In cazul de față nu s'a ținut seama de influența comprimării stâlpului $\overline{A\ 1}$ asupra poziției liniei

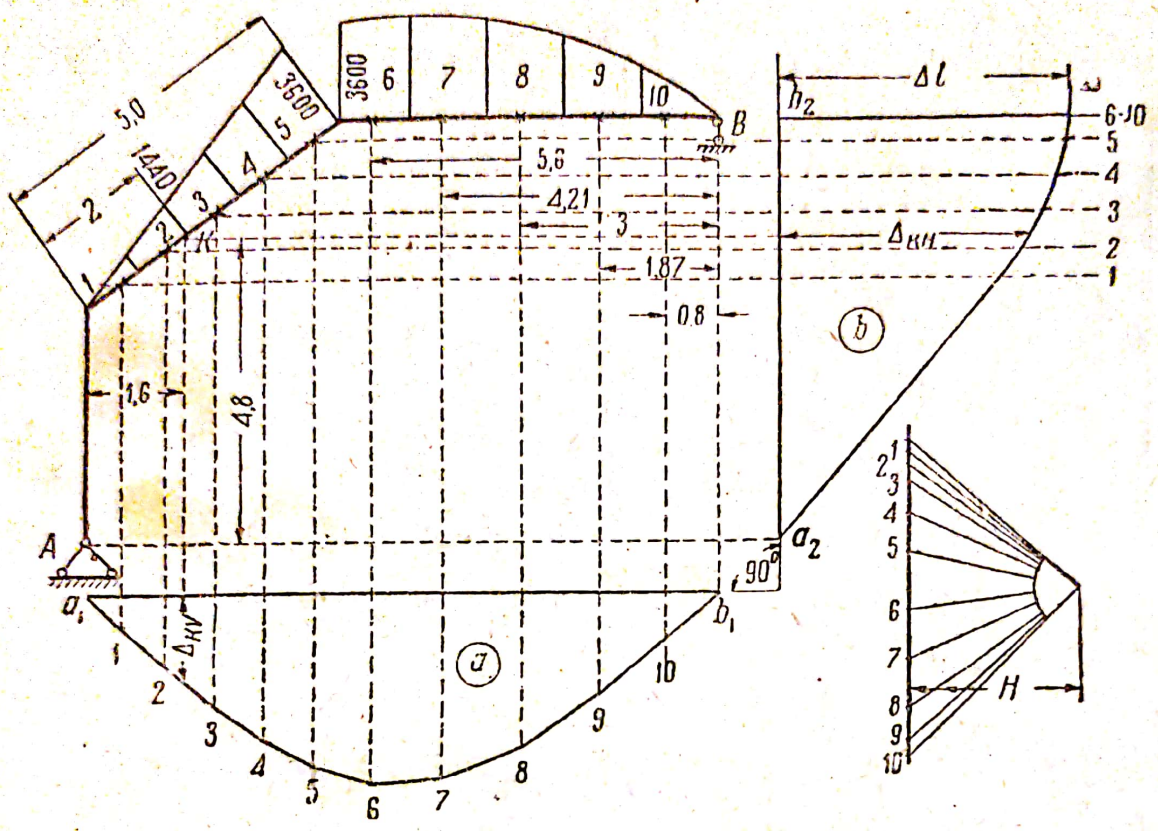


Fig. 383

de închidere. Linia de închidere $a_2\ b_2$ a poligonului al doilea, urmează să treacă prin punctul a_2 care este fix și trebue să fie perpendiculară pe linia de închidere $a_1\ b_1$ a primului poligon.

Trecerea dela poligonul funicular la epura deplasărilor trebue să se facă prin introducerea factorului de trecere care se determină din condiția (178).

$$\frac{1}{m} = \frac{H.K}{EI_0} = \frac{10^4.100}{2\cdot10^{10}\cdot I_0} = \frac{1}{2\ I_0\ 10^4}$$

§ 93. Calculul sarcinilor elastice în sistemele cu bare articulate

La determinarea sarcinilor fictive în sistemele articulate, formula (162) se transformă în felul următor :

$$W_k = \sum \overline{N}_k \frac{N_m}{EF} s = \sum \overline{N}_k \ \Delta\ s_m \qquad (184)$$

în care $\overline{N}_k$ este efortul provocat de cuplurile unitare aplicate la barele care delimitează nodul k.

Pentru calculul deplasărilor și construirea epurelor de deplasare, se separă în sistemul cu bare articulate, un număr de noduri legate

Scanned with OKEN Scanner

între ele cu zăbrelele grinzii, în așa fel încât să se formeze o linie dreaptă sau frântă, ori un lanț. In fig. 384 o astfel de linie este indicată prin nodurile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 și 8. Cu ajutorul acestei linii se calculează sarcinile elastice virtuale, în care scop se aplică asupra diferitelor bare cuplurile unitare cu forțele îndreptate după direcția deplasării necunoscute.

Presupunem de exemplu că trebue să se determine o sarcină unitară pentru nodul n al unei grinzi cu zăbrele (fig. 385) în care lanțul nodurilor alese pentru calculul deplasărilor trece prin nodurile

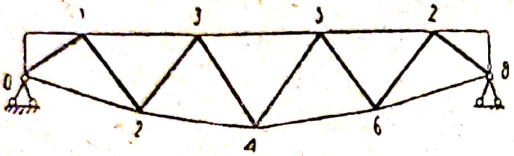


Fig. 384

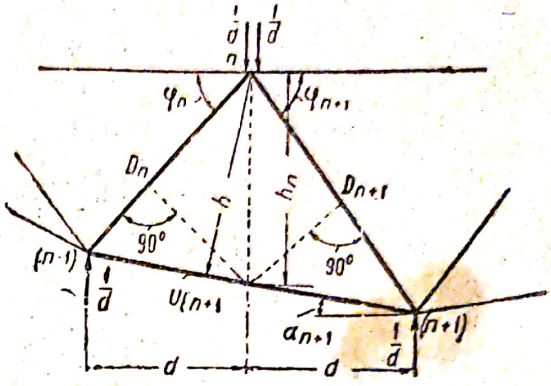


Fig. 385

$(n-1)$, n și $(n+1)$. Aplicăm la barele $(n-1)$ n și n $(n+1)$ cuplurile unitare cu forțele $\frac{1}{d}$ și calculăm eforturile axiale provocate de aceste cupluri în barele grinzii cu zăbrele.

Aceste cupluri provoacă eforturi numai în barele care formează triunghiul $(n-1)$ n $(n+1)$.

$$D_n = - U_{n+1} \frac{\cos \alpha_{n+1}}{\cos \varphi n} = - \frac{1 \cos \alpha_{n+1}}{h \cos \varphi_n}$$

în care :

$$U_{n+1} = \frac{1}{h}$$

$$D_{n+1} = - U_{n+1} \frac{\cos \alpha_{n+1}}{\cos \varphi_{n+1}} = - \frac{1 \cos \alpha_{n+1}}{h \cos \varphi_{n+1}}$$

Notând deformațiile provocate în aceleași bare de sarcinile care acționează asupra grinzii, prin ΔU_{n+1}, ΔD_n, ΔD_{n+1} și ținând seama de faptul că $h = h_n \cos \alpha_{n+1}$, valoarea sarcinii elastice va fi :

$$W_n = - \frac{1}{h_n} \left[\frac{\Delta U_{n+1}}{\cos \alpha_{n+1}} - \frac{\Delta D_n}{\cos \varphi_n} - \frac{\Delta D_{n+1}}{\cos \varphi_{n+1}} \right] \qquad (185)$$

Alegerea direcției liniei pentru care se determină deplasările poate fi făcută prin oricare nod al grinzii cu zăbrele ; este necesar însă ca linia să treacă prin nodurile de reazim. La o succesiune a nodurilor judicios aleasă se pot reduce uneori calculele valorilor sarcinilor elastice.

De exemplu, se poate spune că alegerea liniei nodurilor la grinzile cu zăbrele în sistemul dreptunghiular (fig. 386) după direcția 0, 1, 2, . . . 14, 15, 16 nu este bine făcută pentru cazul când se deter-

mină săgeţile verticale ale nodurilor ; în acest caz montanţii sunt paraleli cu direcţia deplasării pe care o căutăm, ceea ce complică desfăşurarea calculului sarcinilor elastice (§ 92). In asemenea grinzi cu zăbrele este bine ca liniile nodurilor să fie alese după direcţia tălpilor.

In cazul când linia nodurilor este aleasă în aşa fel încât ea se termină cu montanţii de pe reazim (fig. 386), atunci la construirea epurei deformaţiilor trebue să ţinem seama de deformaţia montanţilor de pe reazim ca momente virtuale de reazim, egale în valoare cu deformaţiile acestor montanţi (§. 92).

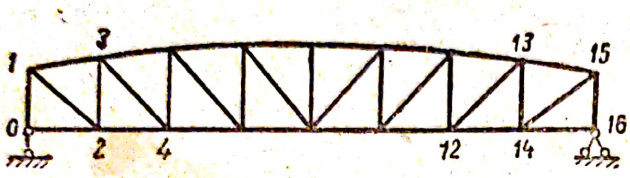


Fig. 386

La calculul aproximativ al sarcinilor elastice, se neglijează influenţa eforturilor din zăbrele. Această abstracţie se poate echivala cu abstracţia care se face în sistemele cu secţiune plină, când se neglijează influenţa forţei tăietoare.

In acest caz, formula (185) va avea forma următoare :

$$W_n = \frac{1}{h} \Delta U_{n+1}$$

Exprimând un efort oarecare prin momentul încărcării, luat faţă de nodul n, obţinem :

$$W_n = \frac{M_n}{EFh^2} s_{n+1} = \frac{M_n}{EI} s_{n+1} \qquad (186)$$

In această formulă ca moment de inerţie s'a luat produsul $Fh^2 = I$. Formula obţinută — după structura ei — este asemănătoare cu formula care determină valoarea sarcinii elastice în sistemele cu secţiune plină, când se face abstracţie de deformaţiile axiale ale barei (183).

La determinarea deformaţiilor pe linia tălpii rectilinii a unei grinzi cu zăbrele, formula (186) dă o valoare a săgeţii destul de apropiată de valoarea reală şi poate să servească pentru determinarea aproximativă a acestei valori.

Exerciţii

127. Să se construiască epura deformaţiilor grinzii cu zăbrele reprezentată în fig. 387 şi încărcată în nodul 5 cu o forţă concentrată P. Suprafeţele secţiunilor barelor sunt notate pe figură ; $\operatorname{tg} \alpha = 1{,}25$.

Reacţiunile :

$$A = \frac{3}{8} P \quad \text{şi} \quad B = \frac{5}{8} P$$

Se recomandă să se aleagă linia lanţului pe direcţia zăbrelelor dela nodul 0 până la nodul 8, iar deformaţia montanţilor să se calculeze separat.

Pentru a stabili influenţa deformaţiilor tălpilor şi zăbrelelor asupra valorii săgeţilor acesteia, deformaţiile acestor elemente trebuesc calculate separat pentru fiecare fel de deformaţii.

1. Pentru determinarea săgeţilor care se formează numai *sub influenţa de-*

formației elementelor tălpii, sarcinile elastice se calculează cu formula (186), care, — în cazul de față — se aduce la următoarea formă :

$$W = \frac{M}{E\,Fh^2}\,s = \frac{2\,d}{E\,d^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}\,\frac{M}{F} = C\,\frac{M}{F}$$

față de aceasta :

$$W_1 = C\cdot\frac{3}{8}\,P\cdot\frac{d}{180} = \frac{P}{240\;E\;\mathrm{tg}^2\,\alpha}\cdot = 1C_1$$

și mai departe :

$W_2 = 1{,}5\;C_1$; $W_5 = 2{,}0\;C_1$;
$W_3 = 1{,}2\;C_1$; $W_6 = 2{,}5\;C_1$;
$W_4 = 2{,}0\;C_1$; $W_7 = 1{,}66\;C_1$;

în care :

$$C_1 = \frac{P}{240\;E\;\mathrm{tg}^2\,\alpha}$$

Pentru determinarea săgeților, ca momente statice ale sarcinilor elastice, considerăm grinda cu zăbrele drept o bară fictivă (convențională) (fig. 387 a) la extremitățile căreia se aplică sarcinile virtuale și forțele tăietoare virtuale.

Forța tăietoare virtuală va fi :

$$Q_{\Phi A} = \frac{C_1}{8d}\,(7d + 1{,}5\cdot 6d + 1{,}2\cdot 5d + 2\cdot 4d + 2\cdot 3d + 2{,}5\cdot 2d + 1{,}66\cdot d) = 5{,}333\;C_1$$

Săgețile în nodurile acestei grinzi cu zăbrele sunt :

$f_1 = 5{,}333\;C_1 d$
$f_2 = 5{,}333\;C_1\;2d - C_1 d = 9{,}666\;C_1 d$
$f_3 = 5{,}333\;C_1\;3d - C_1\;2d - 1{,}5\;C_1 d = 12{,}50\;C_1 d$
$f_4 = 14{,}13\;C_1 d$;
$f_5 = 13{,}76\;C_1 d$;
$f_6 = 11{,}40\;C_1 d$;
$f_7 = 6{,}53\;C_1 d$;

Servindu-ne de aceste date ca ordonate s'a construit epura săgeților (fig. 387, b) la scara $\frac{1}{5\;C_1 d}$.

Calculul analitic poate fi înlocuit cu calculul grafic, cu ajutorul poligonului funicular.

In fig. 387 d, este reprezentată construcția unui poligon funicular pentru forțele elastice calculate mai sus, cu distanța polară $H = 5\;C_1$, iar cu acest poligon de forțe s'a construit poligonul funicular (fig. 387 b) care constitue epura săgeților. Deoarece distanța polară H s'a luat egală cu $5\;C_1$ pentru a obține valorile reale ale deformațiilor trebue să înmulțim ordonatele poligonului funicular cu coeficientul (178).

$$\frac{1}{m} = HK = 5\;C_1\;d\,,$$

în care K este scara poligonului forțelor.

Linia frântă construită printr'o metodă sau alta determină deformațiile lanțului format din elementele zăbrelelor. Ca să trecem la epurele de deformație ale tălpilor trebue să unim prin drepte toate articulațiile corespunzătoare fiecărei tălpi.

In afară de aceasta, epurele trebuesc corectate cu valoarea deformațiilor montanților de pe reazime, cu care se termină lanțul de bare. Deformațiile montanților de reazim sunt următoarele :

la montantul final din stânga :

$$\Delta s_0 = \frac{3}{8}\,\frac{Pd\;\mathrm{tg}\;\alpha}{E\cdot 90} = 1{,}95\;C_1\,d\,;$$

iar în montantul extrem din dreapta :

$$\Delta s_8 = \frac{5}{8}\,\frac{Pd\;\mathrm{tg}\;\alpha}{E\cdot 90} = 3{,}25\;C_1\,d\,;$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru corectarea epurei așezăm aceste segmente pe verticalele respective la scara epurei, deci împărțim ordonatele epurei cu factorul $5\ C_1\ d$.

$$0\text{-}0' = \frac{\Delta s_0}{5\ C_1\ d} = \frac{3\ Pd\ \text{tg}\ \alpha \cdot 240\ E\ \text{tg}^2\ \alpha}{8\ E\ 90 \cdot P \cdot 5d} = \frac{1}{5}\ \text{tg}^3\ \alpha = \frac{1{,}25^3}{5} = 0{,}39\ ;$$

$$8\text{-}8' = \frac{\Delta s_8}{5\ C_1 d} = \frac{5\ Pd\ \text{tg}\ \alpha \cdot 240\ E\ \text{tg}^2\ \alpha}{3\ E \cdot 90 \cdot P \cdot 5d} = \frac{1}{3}\ \text{tg}^3\ \alpha = \frac{1{,}25^3}{3} = 0{,}65$$

2. Să trecem acum la calculul influenței deformațiilor din diagonale asupra valorii săgeții.

Pentru calculul sarcinilor elastice egale cu valorile deformațiilor unghiulare ale lanțului, provocate de eforturile din diagonale, folosim formula (184).

$$W_k = \sum \bar{N}_k \frac{N_p\ s}{E\ F}\ ,$$

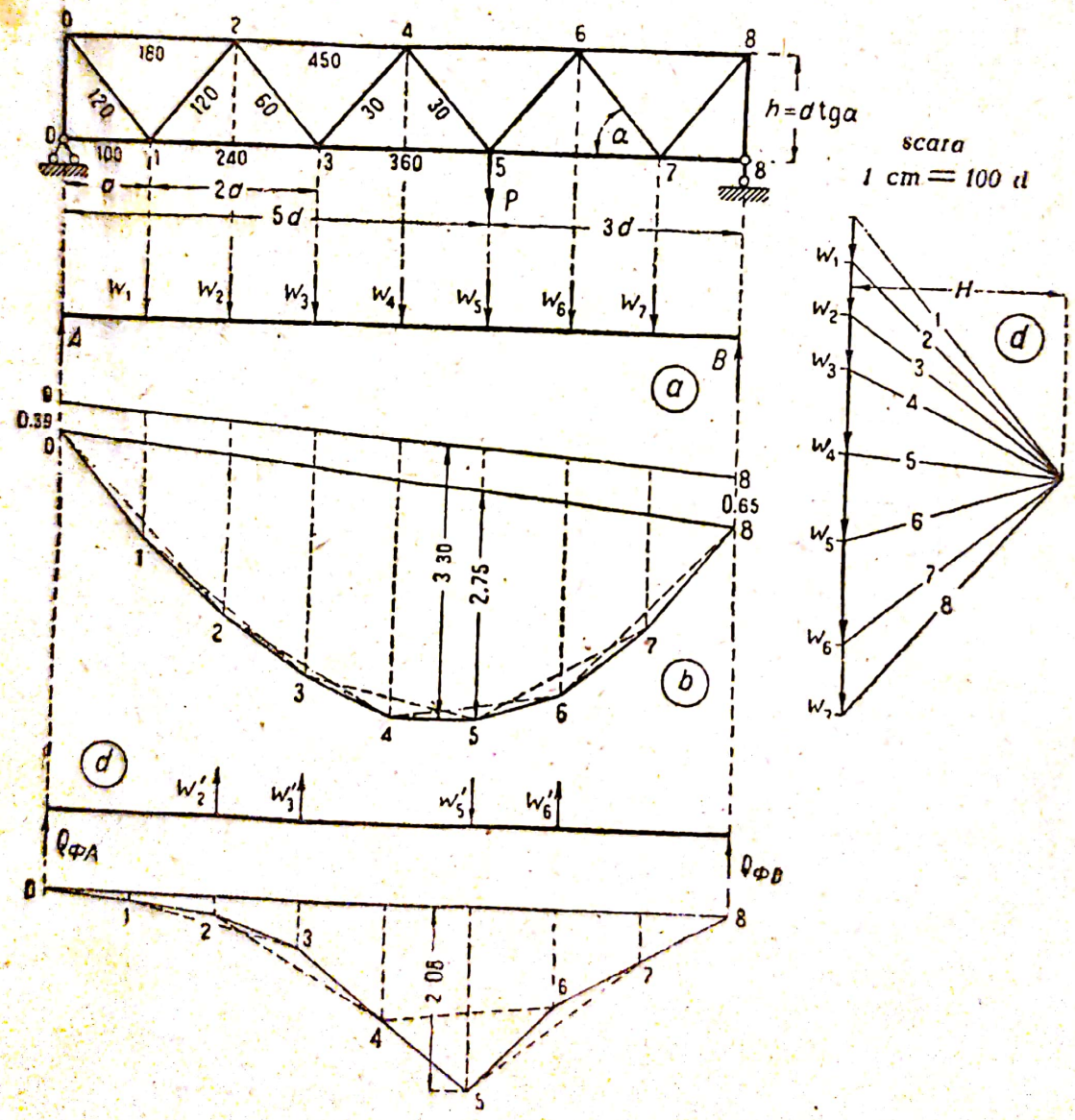


Fig. 387

în care $\bar{N}_k$ este efortul provenit din cuplurile unitare aplicate normal pe barele zăbrelelor care formează unghiul respectiv. Influența forțelor axiale s'a calculat

separat după cum se arată mai jos. În grinda cu zăbrele considerată, această formulă se aduce la forma următoare :

$$W_k = \frac{-1}{E \operatorname{tg} \alpha}\left(\frac{D_k}{F_k} + \frac{D_{k+1}}{F_{k+1}}\right)$$

Față de aceasta, sarcinile elastice se determină prin valorile :

$$W'_1 = \frac{1}{E \operatorname{tg} \alpha}\left(\frac{3}{8}\,\frac{P}{120 \sin \alpha} - \frac{3}{8}\,\frac{P}{120 \sin \alpha}\right) = 0 ;$$

$$W'_2 = \frac{-1}{E \operatorname{tg} \alpha}\left[\frac{3\,P}{8 \cdot 10 \sin \alpha} - \frac{3\,P}{8 - 60 \sin \alpha}\right] =$$

$$= \frac{-P}{240 \cdot E \cdot \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha}\,\frac{3}{4} = -\frac{3\,C_1}{4 \cos \alpha} ;$$

$$W'_3 = -\frac{3}{2}\,\frac{C_1}{\cos \alpha} ;$$

$$W'_4 = 0 ;$$

$$W'_5 = \frac{11}{2}\,\frac{C_1}{\cos \alpha} ;$$

$$W'_6 = -\frac{5}{4} - \frac{C_1}{\cos \alpha} ;$$

$$W'_7 = 0 .$$

Deoarece după datele problemei $\operatorname{tg} \alpha = 1{,}25$, unghiul fiind astfel $\alpha = 51^\circ\ 20'$ și $\cos \alpha = 0{,}625$, valorile sarcinilor elastice vor fi :

$$W'_2 = -C_1 \frac{3}{4 \cdot 0{,}625} = -1{,}2\ C_1$$

$$W'_5 = +C_1 \frac{11}{2 \cdot 0{,}625} = +8{,}8\ C_1$$

$$W'_3 = C_1 \frac{3}{2 \cdot 0{,}625} = 2{,}4\ C_1$$

$$W'_6 = -C_1 \frac{5}{4 \cdot 0{,}625} = -2\ C_1$$

Cu aceste sarcini virtuale calculăm săgețile pentru schema din fig. 387 d. Forța tăietoare virtuală la extremitatea din stânga barei va fi :

$$Q_{\Phi A} = \frac{C_1}{8d}\,(-1{,}2 \cdot 6d - 2{,}4 \cdot 5d + 8{,}8 \cdot 3d - 2 \cdot 2d) = 0{,}4\ C_1.$$

Momentele statice din această încărcare fictivă, care determină săgețile vor fi :

$$f_1 = 0{,}4\ C_1\ d = 0{,}4\ C_1\ d \text{ cm} ;$$
$$f_2 = 0{,}4\ C_1\ 2d = 0{,}8\ C_1\ d \text{ cm} ;$$
$$f_3 = 0{,}4\ C_1\ 3d + 1{,}2\ C_1\ d = 2{,}40\ C_1\ d \text{ cm} ;$$
$$f_4 = 6{,}40\ C_1\ d \text{ cm} ;$$
$$f_5 = 10{,}40\ C_1\ d \text{ cm} ;$$
$$f_6 = 5{,}60\ C_1\ d \text{ cm} ;$$
$$f_7 = 2{,}8\ C_1\ d \text{ cm} .$$

După aceste date este construită epura deplasărilor din fig. 387 c la scara $1{:}5\ C_1 d$.

3. Să trecem — în sfârșit — la calculul influențelor deformațiilor axiale ale barei asupra valorii săgeților.

La acest calcul valoarea sarcinilor elastice se determină prin termenii suplimentari stabiliți cu formula (184), care în acest caz se reduce la forma :

$$W_k = -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{E}\left(\frac{D_k}{F_k} + \frac{D_{k+1}}{F_{k+1}}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

Comparând expresiile sarcinilor virtuale cu aceleași sarcini provenite din influența eforturilor din zăbrele asupra deformației unghiulare a lanțului, se poate vedea că ele sunt proporționale între ele, iar primele diferă de cele din urmă prin factorul $tg^2\alpha$. Prin urmare epura săgeților va fi asemănătoare, deosebindu-se numai prin factorul de proporționalitate, care este scara epurei.

Pentru grinda cu zăbrele considerată, $tg\ \alpha = 1{,}25$, iar $tg^2\ \alpha = 1{,}56$. De aceea toate ordonatele săgeților, care apar în urma deformațiilor longitudinale ale barelor lanțului, sunt de 1,56 ori mai mari decât ordonatele săgeților care apar din cauza deformațiilor unghiulare ale lanțului, provocate de eforturile din barele acelorași sisteme de zăbrele.

Ordonatele săgeții totale ale tălpii inferioare, în care sunt cuprinse toate influențele barelor asupra deformațiilor unghiulare, precum și influențele deformațiilor axiale din barele lanțului, se obțin prin adunarea ordonatelor celor două epure.

De exemplu ordonata în dreptul nodului 5 se va determina prin suma: $3{,}30 + 2{,}08 + 2{,}08 \cdot 1{,}56 = 8{,}65$ cm.

§ 94. Construirea epurelor deplasărilor în sistemele cu împingeri

Particularitatea caracteristică a sistemelor static determinate cu împingeri constă în existența unei articulații intermediare, care nu este legată prin condiții de rigiditate interioară, fapt care distruge continuitatea curbei de presiune. De aceea introducerea articulației intermediare este întotdeauna legată de păstrarea indeformabilității sistemului față de reazimele lui, de aci rezultă că deformația din această articulație nu poate fi arbitrară. De exemplu, într'un arc cu trei articulații, deformația unghiulară din articulația dela mijloc poate fi determinată din condiția ca variația distanței dintre articulațiile de reazim să fie egală cu zero.

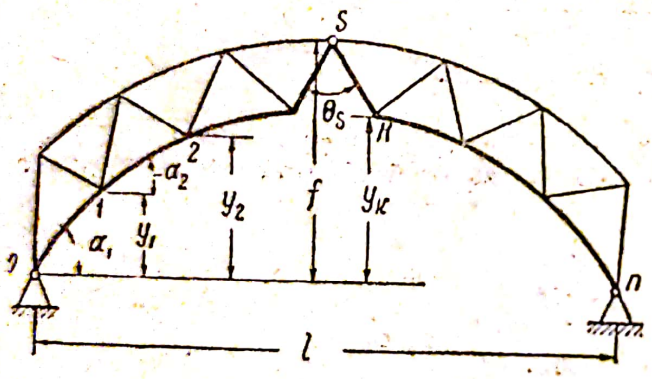


Fig. 388

Dacă notăm cu $\Delta\theta_s$ deformația virtuală a unghiului din articulația intermediară (fig. 388) și cu W valorile sarcinilor elastice, deplasarea orizontală a articulației de pe reazim a arcului poate fi determinată cu formula:

$$\Delta l = \sum_1^{n-1} Wy + \sum_1^{n} \frac{\Delta N}{\cos \alpha} + \Delta\theta_s f$$

în care Wy este deplasarea orizontală provocată de modificarea unghiului între barele lanțului;

$\frac{\Delta N}{\cos \alpha}$ lungirea fiecărei bare a lanțului;

$\Delta\theta_s f$ deplasarea orizontală provenită din cauza variației unghiului dela articulație.

In realitate, din cauză că articulațiile de pe reazime sunt fixe $l = 0$, ceea ce permite să determinăm valoarea deformației unghiulare:

$$\Delta\theta_s = -\frac{1}{f}\left[\sum_1^{n-1} Wy + \sum_1^{n} \frac{\Delta N}{\cos \alpha}\right] \qquad (187)$$

Scanned with OKEN Scanner

În sistemele de arce cu tirant, variația distanței între articulațiile de pe reazime este egală cu alungirea tirantului. În acest caz valoarea deformației unghiulare dela articulația intermediară se determină prin expresia:

$$\Delta\theta_s = \frac{-1}{f}\left[\sum_1^{n-1} Wy + \sum_1^{n}\frac{\Delta N}{\cos\alpha} - \frac{Hl}{EF}\right]$$

în care $\frac{Hl}{EF}$ este alungirea tirantului.

Valorile sarcinilor elastice care intră în aceste formule se calculează prin metodele obișnuite (§ 91).

Exercițiu

128. Să se construiască linia săgeților pentru talpa inferioară a unui arc cu zăbrele cu trei articulații (fig. 389), când asupra lui acționează o sarcină concentrată $P = 1000$ kg, aplicată în articulația intermediară. Deschiderea arcului 30 m — săgeata $f = 4$ m.

Lungimile și suprafețele secțiunilor barelor sunt date în tabloul de mai jos. In același tablou sunt trecute și eforturile din barele arcului provenite din sarcina P și stabilite cu epura lui Cremona.

Variația lungimii diferitelor bare s'a determinat fiind mărită de 10^6 ori, folosind următoarea formulă:

$$\Delta s = 10^6\,\frac{NS}{EF} = \frac{10^6}{2.10^6}\cdot\frac{Ns}{F} = \frac{Ns}{2F}$$

Rezultatele acestor calcule sunt trecute în tabloul următor.

N-rul elementului	Lungimea în cm	Suprafața secțiunii F în cm²	Efortul N în kg	$\frac{Ns}{2F}$	N-rul elementului	Lungimea în cm	Suprafața secțiunii F în cm²	Efortul N în kg	$\frac{Ns}{2F}$
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1-3	300	30	315	1575	1-2	485	37	—509	—3339
3-5	300	30	669	3345	3-4	403	30	—476	—3195
5-7	300	30	952	4760	5-6	355	26	—335	—2286
7-9	300	30	851	4255	7-8	331	22	+112	+ 846
0-2	333	74	—2080	—4690	9-10	325	30	+922	+4995
2-4	320	74	—2338	—5058	0-1	525	37	+400	+2835
4-6	310	74	—2633	—5517	2-3	381	30	+318	+2016
6-8	304	74	—2864	—5886	4-5	269	22	+179	+1098
8-10	300	74	—2730	—5534	6-7	189	22	— 48	— 207
					8-9	141	22	—355	—1134

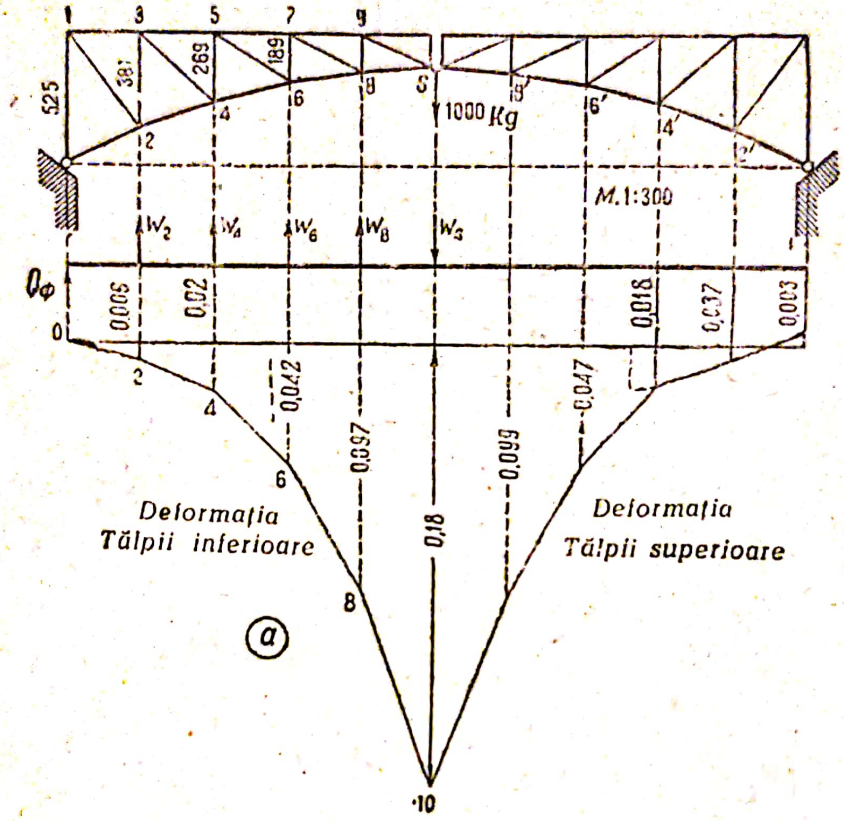
Sarcinile elastice pentru fiecare nod al arcului sunt calculate după formula (183).

$$W_m = \frac{1}{h_m}\left[\frac{\Delta U_{m+1}}{\cos\alpha_{m+1}} - \Delta O_m + \frac{\Delta D_m}{\cos\varphi_m} - \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos\varphi_{m+1}} - \Delta V_{m-1}\cdot\operatorname{tg}\varphi_m + \Delta V_m\operatorname{tg}\varphi_{m+1}\right]$$

Va'orile care intră în compunerea acestei expresii

$$\Delta' U_{m+1} = \frac{\Delta U_{m+1}}{\cos \alpha_{m+1}}\ ;\ \Delta' D_{m+1} = \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}}\ ;\ \Delta' D_m = \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m}\ ;$$

$$\Delta V_{m-1}\ \Delta V_m\ \mathrm{tg}\varphi_m\ ;\ \Delta' V_m = \Delta V_m\ \mathrm{tg}\ \varphi_{m+1}$$



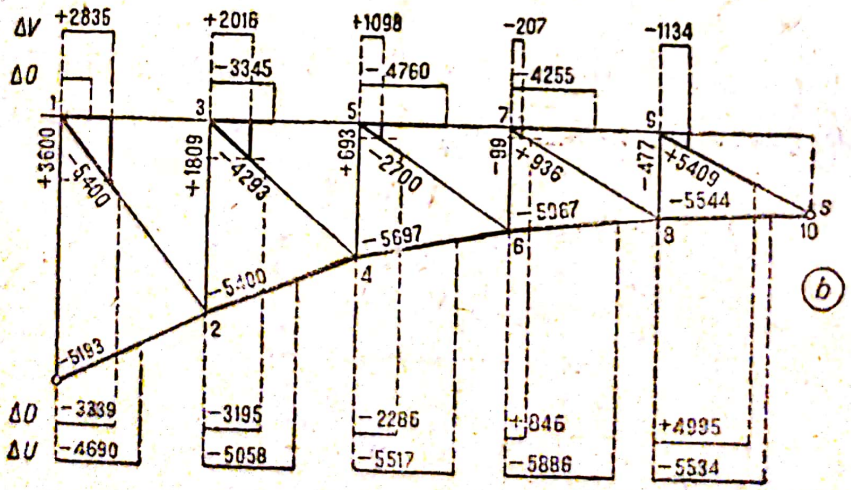


Fig. 389

s'nt determinate grafic, pentru care motiv în schema (fig. 389) în dreptul nodurilor respective pe direcția orizontală sunt măsurate valorile alungirilor fiecărei bare, calculate în tablou ; proiectând apoi aceste segmente pe direcția barei res-

pective se intersectează astfel segmentele care determină valorile $\Delta' U$ și $\Delta' D$. Segmentele $\Delta' V$ se determină în aceeași construcție grafică prin catetele triunghiurilor.

Valorile numerice ale mărimilor ΔO, ΔU, ΔD și ΔV sunt înscrise pe schemă (fig. 399 b).

După aceste date s'au calculat valorile sarcinilor elastice mărite de 10^6 ori.

$$W_2 = \frac{1}{381}[-1575 - 5400 - 5400 + 4293 - 3600 + 1809] = -26{,}1$$

$$W_4 = \frac{1}{269}[-3348 - 5697 - 4293 + 2700 - 1809 + 693] = -44.1$$

$$W_6 = \frac{1}{189}[-4761 - 5967 - 2700 - 936 - 693 - 99] = -80{,}6$$

$$W_8 = \frac{1}{141}]-4257 - 5544 - 936 - 5409 + 99 - 477] = -103{,}0$$

$$\sum W = -253{,}8$$

Sarcina elastică $EW_8 = \Delta\theta_8$ se calculează cu formula (187):

$$\Delta\theta_8 = -\frac{1}{f}\left[2\sum_{2}^{8} Wy + Wy + \sum_{0}^{12}\frac{\Delta U}{\cos\alpha}\right]$$

$$\sum_{2}^{8} Wy = -(26{,}1\cdot 144 + 44{,}1\cdot 256 + 80{,}1\cdot 336 + 103{,}5\cdot 3{,}84) = -81705{,}6.$$

$$\sum\frac{\Delta U}{\cos\alpha} = -2\left[5193 + 5400 + 5697 + 5967 + 5544\right] = -55602;$$

de unde:

$$\Delta\theta_8 = \frac{-1}{400}\left[-2\cdot 81705{,}6 - 55602\right] = +547{,}5$$

După calculul analitic valoarea săgeții din dreptul articulației intermediare mărită de 10 ori va fi:

$$\Delta_8 = (+\tfrac{1}{2}\,547.5 - 253{,}8)\cdot 5\cdot 300 + 26{,}1\cdot 4\cdot 300 + 44{,}1\cdot 3\cdot 300 + 80{,}1\cdot 2\cdot 300 + \\ + 103{,}5\cdot 1\cdot 300 = 598{,}9\cdot 300$$

Săgeata reală va fi:

$$\Delta_8 = \frac{1}{10^6}\,598{,}9\cdot 300 = 0{,}18\text{ cm}$$

In celelalte noduri săgețile au următoarele valori:

$$\Delta_2 = -0{,}0058 \qquad f_3 = 0{,}0195$$
$$\Delta_4 = 0{,}0464 \qquad f_5 = 0{,}0973$$

Cu aceste date este construită în fig. 389 epura săgeților tălpii inferioare a arcului cu zăbrele.

Linia săgeților tălpii superioare poate fi obținută din linia săgeților tălpii inferioare prin modificarea ordonatelor acesteia din urmă cu valoarea deformațiilor montanți'or. Epura săgeților acestei tălpi este reprezentată în partea din dreapta fig. 389 a.

Scanned with OKEN Scanner

§ 95. Concluzii asupra aplicării forţelor elastice

La sistemele cu secţiune plină, determinarea deplasărilor cu ajutorul sarcinilor elastice este mai avantajoasă decât determinarea analitică a deplasărilor cu metoda lui Mohr—Maxvell, numai în acele cazuri când expresiile momentelor nu pot fi uşor integrate, ceea ce se întâmplă, de exemplu, la barele cu axe trasate după curbe neregulate etc.

Adoptând metoda sarcinilor elastice pentru calculul sistemelor cu secţiune plină, trebue să avem în vedere că această metodă este aproximativă, deoarece se bazează pe rectificarea curbelor încărcărilor efective (§ 91). Este adevărat totuşi că la alegerea judicioasă a porţiunilor de rectificat, eroarea nu trece de 2%.

Eroarea poate fi eliminată complet ţinând seamă de întreaga suprafaţă a epurei dată de sarcinile reale, însă aceasta va complica mult calculul sarcinilor elastice.

Aplicată la grinzile cu zăbrele, metoda dă o soluţie precisă când se calculează deformaţiile din toate barele grinzii.

Folosirea sarcinilor elastice simplifică calculele, în cazurile când se cere să determinăm deplasările din câteva puncte, de exemplu la construirea epurei deplasărilor.

După ce sarcinile elastice sunt stabilite, se pot determina destul de uşor ordonatele acestei epure, putându-se totodată executa şi construcţia grafică.

De aceea, în mod curent, sarcinile elastice se întrebuinţează pentru construirea liniilor de influenţă ale deplasărilor (§ 87) precum şi a liniilor de influenţă ale necunoscutelor din sistemele static nedeterminate (vezi partea II-a), care — după cum se ştie — se determină din epurele de deformaţii provocate de sarcina unitară respectivă (§ 87).

De exemplu, epura săgeţilor din articulaţia S, provocată de acţiunea sarcinii P (fig. 389) poate fi considerată ca linie de influenţă a diformaţiei în articulaţie, dacă admitem că forţa P este egală cu unitatea. Aceasta rezultă din teorema reciprocităţii deplasărilor $\delta_{ps} = \delta_{sp}$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 19

REPREZENTAREA DEPLASĂRILOR CU AJUTORUL DIAGRAMEI LUI VILLIOT

§ 96. Motivarea construcţiei diagramei

Pentru a ne însuşi principiul determinării deplasărilor după metoda lui Villiot, să analizăm, dela început, cum se va construi deplasarea unui nod oarecare C, care se leagă prin barele s_a şi s_b de celelalte noduri A şi B (fig. 390). Vom porni dela ipoteza că ambele articulaţii A şi B vor primi unele deplasări Δ_a şi Δ_b şi ambele bare s_a şi s_b vor căpăta — din cauza unor acţiuni oarecare — deplasările Δs_a şi Δs_b.

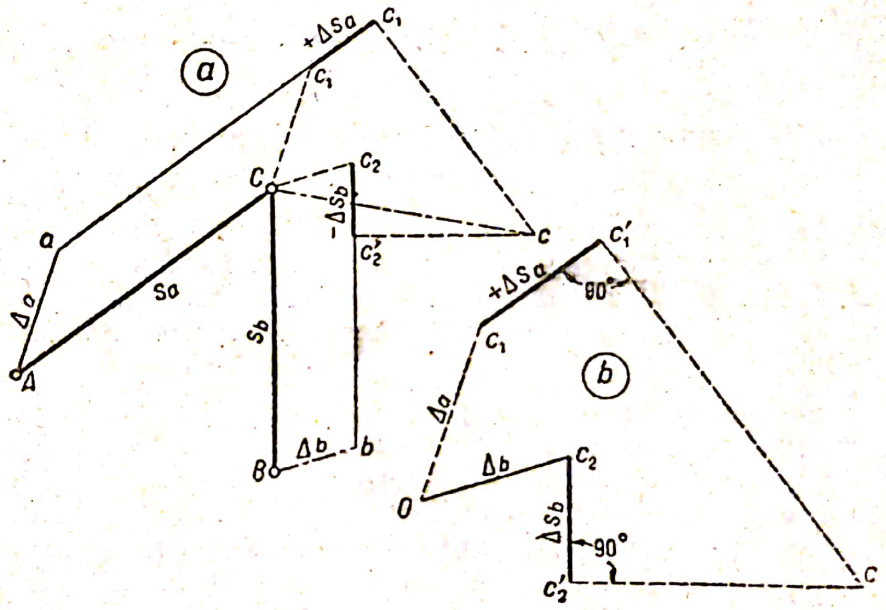


Fig. 390

Dacă nu ar exista articulaţia C, din cauza deplasărilor ce le capătă articulaţiile A şi B, barele s_a s'ar deplasa în poziţia ac_1 şi bc_2 paralel cu poziţia lor iniţială. Fiecare din barele s_a şi s_b, deformându-se, ar provoca după aceasta deplasarea punctelor c_1 şi c_2 în poziţiile c'_1 şi c'_2 care se determină prin măsurarea dela punctele c_1 şi c_2 — în direcţia axei barelor — a deformaţiilor $+\Delta s_a$ şi $-\Delta s_b$, ţinând seama de sensul deformaţiei. In realitate însă, din cauza existenţei legăturii indeformabile a articulaţiei C cu articulaţiile A şi B, poziţia finală a articulaţiei C nu poate fi determinată prin două puncte c'_1 şi c'_2, şi dacă am obţinut totuşi acest lucru, explicaţia se datoreşte numai ipotezei că articulaţia C este suprimată.

In realitate deformaţiile indicate mai sus vor provoca rotirea barelor s_a şi s_b în jurul articulaţiilor A şi B, iar extremităţile lor C_2 şi C_1 vor descrie anumite arce, care se vor intersecta într'un anumit punct c; acesta va reprezenta poziţia deplasării reale a articulaţiei C. Intru cât

aceste deformaţii unghiulare sunt foarte mici, în locul arcelor respective, se poate găsi poziţia punctului c prin trasarea a două perpendiculare pe axele barelor s_a şi s_b în punctele c'_1 şi c'_2.

Astfel, segmentul Cc reprezintă valoarea şi direcţia deplasării articulaţiei C, provocată de deformaţiile indicate mai înainte.

Diagrama poate fi construită independent de schema pentru care se determină deplasarea. Pentru aceasta dintr'un punct arbitrar O, — considerat ca origină — (fig. 390, b) măsurăm deplasările iniţiale Δ_a şi Δ_b ale nodurilor A şi B iar apoi plecând dela ele, raportăm în ordinea stabilită deformaţiile longitudinale ale barelor $c_1\ c'_1$ şi $c_2\ c'_2$ şi ducem liniile c_1 — c şi c_2-c perpendiculare pe segmentele $c_1\ c'_1$ şi $c_2\ c'_2$.

Intersecţia acestor linii defineşte punctul c, iar segmentul Oc reprezintă deplasarea reală a nodului c.

Această diagramă se poate construi la orice scară, însă se recomandă să fie făcută separat de schema sistemului.

§ 97. Construirea diagramei pentru grinzile simple cu zăbrele

După cum se cunoaşte, alcătuirea grinzilor simple cu zăbrele se face prin adăugirea succesivă la triunghiul de bază a câte unei articulaţii, prin intermediul a două bare. O astfel de alcătuire permite să se folosească acest principiu pentru construirea deplasărilor din toate nodurile grinzii cu zăbrele.

Construcţia se începe dela un nod oarecare, considerat fix. La grinzile cu zăbrele de deschideri mari, se recomandă să începem construcţia cu un nod oarecare dela mijloc, deoarece dacă începem diagrama în acest fel, ea se va obţine mai concentrată decât dacă construcţia ei ar fi începută dela unul din nodurile dela extremitate.

De exemplu, considerând nodul 3 (fig. 391) ca un punct fix, măsurăm dela acesta, în direcţia uneia din bare (de pildă pe direcţia barei s_8) deformaţia lui $+\Delta s_8$ şi obţinem punctul 5, care determină deplasarea articulaţiei 5 în raport cu punctul fix, socotind astfel bara 3—5 drept o bară fixă.

Cunoscând pe diagramă poziţia punctelor 3 şi 5, din deformaţiile barelor s_7 si s_9 se poate deduce poziţia punctului 4 care determină deplasarea articulaţiei 4. In acest scop măsurăm dela punctul 3 pe direcţia barei s_7 deformaţia (Δs_7) şi dela punctul 5 pe direcţia barei s deformaţia acestei bare (s) şi prin intersecţia perpendicularelor ridicate din capetele acestor segmente, se va determina poziţia punctului 4, iar segmentul 3—4 va reprezenta direcţia şi valoarea deplasării articulaţiei 4.

Mai departe, cunoscând pe diagramă poziţia punctelor 3 şi 4, se poate afla poziţia punctului 2, care se leagă de punctele 3 şi 4 prin condiţiile de deformaţie ale barelor s_5 şi s_6. In acest scop, dela punctul 3 se măsoară pe direcţia barei s_5 deformaţiile ei $+,\Delta s_5$ şi dela punctul 4 pe direcţia barei s_6 se măsoară deformaţia acestei bare:

Scanned with OKEN Scanner

$-\Delta s_6$; punctul de intersecţie al perpendicularelor ridicate din extremităţile acestor segmente va determina în diagramă poziţia punctului 2.

Din poziţia pe diagramă a punctelor 2 şi 3 şi din deformaţiile $-\Delta s_3$ şi $+\Delta s_4$ ale barelor s_3 şi s_4 se poate construi punctul 1, care determină în diagramă deplasarea articulaţiei 1. Continuând construcţia grafică, găsim poziţia punctului 0, care determină deplasarea nodului de pe reazimul 0. Executând o construcţie analoagă în cealaltă parte a barei, pornind din punctele diagramei 4 şi 5, se poate găsi cu ajutorul deformaţiilor $-\Delta s_{10}$ şi s_{11} ale barelor s_{10} şi s_{11}, poziţia punctului 6, care determină în diagramă deplasarea articulaţiei pe reazimul 6.

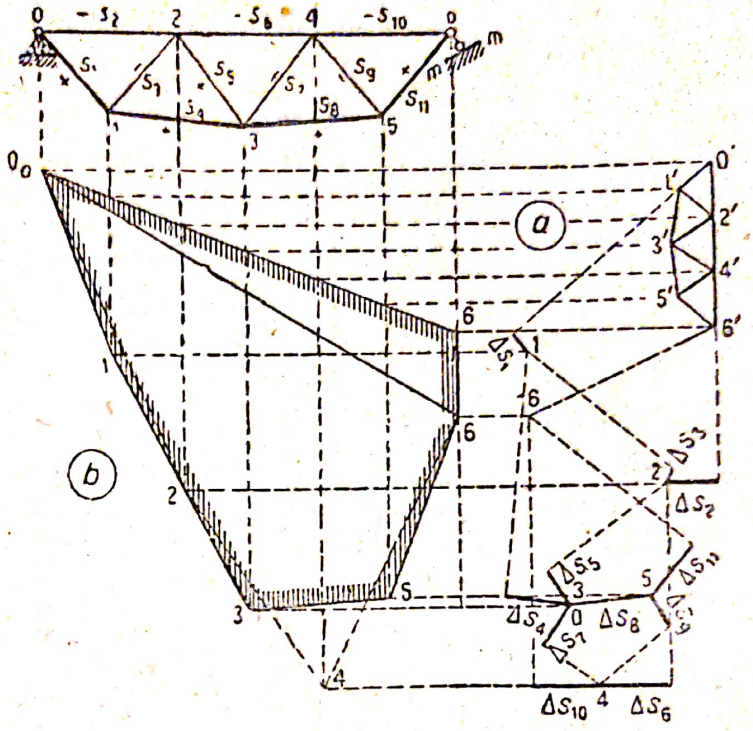


Fig. 391

In diagrama astfel construită segmentele 3—4, 3—2, 3—0′, 3—6 măsurate dela punctul de origină 3, vor determina direcţia şi valoarea deplasărilor fiecărei articulaţii ale grinzii cu zăbrele.

Dacă pe epura grinzii măsurăm dela fiecare nod deplasările respective rezultate din diagramă, vom obţine conturul deformat al grinzii cu zăbrele.

Este evident că în urma construirii diagramei, punctele de reazim 0 şi 6 ale grinzii cu zăbrele vor căpăta şi ele anumite deplasări, care nu corespund cu condiţiile de fixare ale acestor puncte. Aceste deplasări ale punctelor de pe reazim se datoresc ipotezei făcute dela început, în ce priveşte imobilitatea articulaţiei 3 şi a barei s_8. Această aproximaţie se poate remedia prin următorul procedeu: la început, printr'o mişcare de translaţie a întregei grinzi deformate ca un ansamblu, nodul *0* al reazimului fix se aduce în poziţia lui iniţială, pe urmă prin rotirea întregei grinzi deformate în jurul articulaţiei reazimului fix, nodul reazimului mobil se aduce în poziţia lui deplasată.

Deplasările nodurilor corespunzătoare celor două mişcări arătate mai sus trebue să fie adunate geometric cu deplasările obţinute în diagrama deplasărilor, iar ca rezultat al acestor totalizări se vor obţine deplasările reale ale nodurilor.

Mişcarea de translaţie pe care trebue să o dăm grinzii cu zăbrele, pentru a aduce articulaţia reazimului fix *0* în poziţia lui iniţială în

diagramă, este egală cu segmentul 3 (0) — 0 și întru cât această mișcare de translație se va comunica la toate nodurile, rezultă că deplasarea totală a fiecărui nod — ce se compune din deplasarea căpătată în diagramă și deplasarea prin mișcarea de translație — se va determina ca rezultanta vectorilor, care reprezintă aceste deplasări.

De exemplu, dep'asarea totală a nodului 4, care se compune din deplasarea 3—4 și deplasarea prin translație 0′—3 se va determina prin segmentul rezultantei 0′—4. Această deplasare va avea direcția dela punctul 0′ spre punctul 4, fiind rezultanta direcțiilor 0′—3 și 3′—4. O astfel de însumare a deplasărilor va fi valabilă pentru toate nodurile grinzii. Totodată punctul *0′* în diagramă trebue să fie considerat ca poziție fixă a articulației *0*.

A doua mișcare de rectificare prin rotirea întregei grinzi cu zăbrele în jurul articulației fixe, trebue să provoace descompunerea deplasării 0—6 a articulației reazimului mobil pe două direcții: după direcția planului de mișcare a reazimului și după aceea a arcului de rotație, adică pe direcția perpendiculară pe linia articulațiilor de reazim. In fig. 391 a, această descompunere a segmentului 0′—6 se va produce în direcția 6—6′, paralel cu planul de mișcare *m—m* și pe direcția 0′—6′, perpendicular pe linia articulațiilor 0 și 6.

Segmentul 0′—6′ reprezintă lungimea arcului, pe care îl va descrie nodul 6 rotindu-se în jurul articulației *0*. Prin această rotire celelalte articulații ale grinzii cu zăbrele vor descrie și ele arce de cerc, proporționale cu distanța lor dela articulația fixă *0′*. Lungimile acestor arce se obțin destul de ușor, dacă — pornind dela segmentul 0′—6′ al diagramei — construim o grindă cu zăbrele asemănătoare cu cea dată.

Cu rezultat, deplasările efective ale nodurilor, care se compun din toate deplasările arătate mai sus, se vor determina prin segmente măsurate între aceleași cifre ale diagramei. De exemplu, deplasarea reală a nodului 4 se determină prin segmentul 4′—4, a nodului 3 — cu segmentul 3′—3 etc.

Acest segment reprezintă rezultanta a două deplasări: cele de rotație 4′—0′, 3′—0′, . . . și deplasările căpătate anterior 0′—4′, 0′—3′ etc, iar aceste deplasări reale vor avea ca rezultante direcția dela cifrele cu indice la cifrele fără indice.

Diagramele de această natură pot fi utilizate la construcția epurelor deplasărilor în orice direcție.

Pentru această construcție se trasează, din toate nodurile lanțului separat din grinda cu zăbrele (fig. 391 a), linii parelele cu direcția dată, pe care se proiectează segmentele deplasărilor reale ale fiecărui nod în parte, obținute în diagrama deplasărilor (fig. 391 b). Intru cât distanța între nodurile lanțului și nodul origină 0 și distanțele între punctele inițiale 1′, 2′, 3′, . . . 6′ și punctul 0′ sunt legate între ele prin similitudine (asemănare) și proiecțiile lor pe direcțiile date se vor așeza pe aceeași dreaptă 0-6.

Punctele acestei drepte vor servi ca puncte de plecare pentru determinarea deplasărilor după direcția dată, iar celelalte extremități ale segmentelor acestor deplasări se vor determina prin proiecțiile puncte-

Scanned with OKEN Scanner

lor 1, 2, 3, . . . 6, pe liniile respective cu direcţia dată. Poligonul obţinut în urma acestei construcţii 0-1-3-5-6 *reprezintă epura deplasărilor nodurilor pe direcţia dată.*

In fig. 391 sunt construite epurele deformaţiilor tălpilor inferioare şi superioare ale grinzii cu zăbrele (deformaţia tălpii superioare este arătată cu linie punctată).

§ 98. Construirea diagramei la grinzile cu zăbrele suplimentare

La grinzile cu zăbrele suplimentare — alcătuite prin introducerea în sistemul principal de sisteme suplimentare de zăbrele în genul barelor suplimentare sau contrafişe cu zăbrele, precum şi prin introducerea de articulaţii, ca în sistemele cu arce (fig. 392) — construirea diagramei lui Villiot poate fi efectuată pornind dela acelaşi principiu ca şi la grinzile simple cu zăbrele.

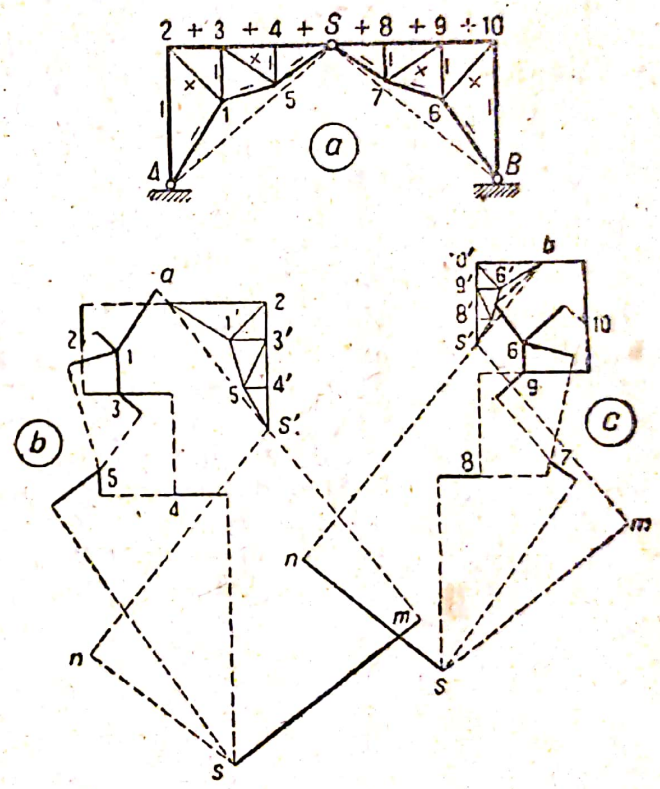


Fig. 392

In acest cazuri la construirea diagramei pentru întregul sistem trebue să folosim variaţia distanţei între articulaţiile principale, care formează sistemul. Variaţia acestor distanţe, între articulaţiile principale, poate fi obţinută prin construirea diagramei lui Villiot, pentru fiecare grindă auxiliară care intră în compunerea sistemului.

De exemplu, se cere să construim diagrama lui Villiot pentru sistemul cu arce reprezentat în fig. 392. Acest sistem este format din două grinzi auxiliare *AS* şi *BS* cu trei articulaţii principale *A*, *B* şi *S*.

Construim mai întâi diagrama deplasărilor pentru grinda *AS* ca şi în cazul unei grinzi simple cu zăbrele, din care obţinem punctele *a* şi *s* ale articulaţiilor extreme. Deoarece articulaţia *a* este fixă, vom măsura dela acest punct, considerat ca un pol, deplasările tuturor nodurilor. Din această diagramă, variaţia distanţei între articulaţiile *A* şi *S* se obţine, când pe direcţia *AS* se proiectează punctele *a* şi *s* ale diagramei. In fig. 392 b, această valoare este obţinută sub forma segmentului *sm* paralel cu linia *AS*, pe care se duce perpendiculara *am* din punctul *a*.

Pentru determinarea variaţiei distanţei între articulaţiile *B* şi *S* construim o diagramă similară pentru deplasările grinzii auxiliare *BS*,

considerând-o tot ca o grindă simplă cu zăbrele (fig. 392 c), obţinând pe ea punctele b şi s ale articulaţiilor dela extremităţi. In această figură, valoarea variaţiei distanţei între articulaţiile B şi S s'a obţinut prin segmentul sn, paralel cu linia articulaţiilor B şi S şi pe care s'a proiectat punctul b, acest punct — ca o articulaţie fixă a grinzii — este punctul de plecare pentru această diagramă.

Cunoscând variaţia lungimilor AS şi BS, pe baza aceluiaşi principiu de indeformabilitate a întregului sistem, se poate găsi pe diagramă poziţia punctului s', corespunzătoare cu deplasarea efectivă a articulaţiei S. In diagrama grinzii auxiliare AS, poziţia punctului s se va determina, dacă prin punctul s al diagramei ducem o linie paralelă cu linia articulaţiilor BS şi măsurăm pe ea segmentul sn' egal cu segmentul sn, care reprezintă variaţia distanţei dintre articulaţiile B şi S.

Liniile perpendiculare ridicate din punctele n' şi m, dela extremităţile segmentelor sn' şi sm, se vor intersecta în punctul s' care va servi pentru diagrama AS ca punct de plecare pentru stabilirea deplasării articulaţiei.

Mai departe rămâne numai — ca folosind drept bază linia punctelor as' — să construim o grindă cu zăbrele asemănătoare cu cea dată, ale cărei noduri vor servi ca puncte de plecare pentru determinarea deplasărilor nodurilor respective.

Poziţia punctului s' în diagramă, referitoare la grinda cu zăbrele, se determină printr'o construcţie similară, pentru care motiv dela punctul s al acestei diagrame se duce o linie paralelă cu linia AS, pe care se măsoară segmentul sm' egal cu segmentul sm din diagrama respectivă. Din extremităţile segmentelor sn şi sm' se duc linii perpendiculare, a căror intersecţie va determina poziţia punctului s, care va servi ca punct de plecare pentru determinarea în această diagramă a deplasării articulaţiei s. Construind linia bs', considerată ca bară a unei grinzi cu zăbrele asemănătoare cu cea dată BS, determinăm poziţia punctelor de plecare pentru măsurarea deplasărilor articulaţiilor acestei grinzi cu zăbrele.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 20

CALCULUL SISTEMELOR IN SPAȚIU STATIC DETERMINATE, FORMATE DIN BARE ARTICULATE

§ 99. Sistemele în spațiu și fixarea lor

Sistemele plane, în special grinzile plane cu zăbrele, se întrebuințează în mod frecvent în practica construcțiilor, atunci când este posibil să se reducă într'un plan sarcinile care solicită sistemul. Necesitatea de a asigura rigiditatea și stabilitatea acestor construcții, implică însă îmbinarea grinzilor plane cu zăbrele câte trei și chiar mai multe, ceea ce conduce la alcătuirea sistemelor în spațiu.

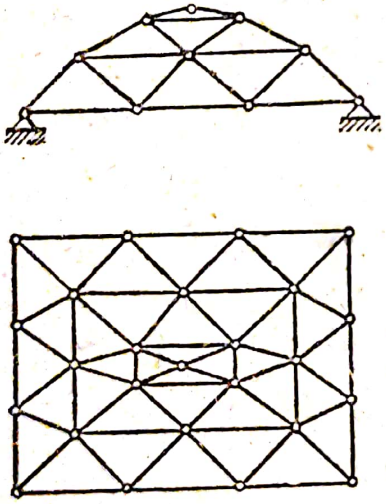


Fig. 393

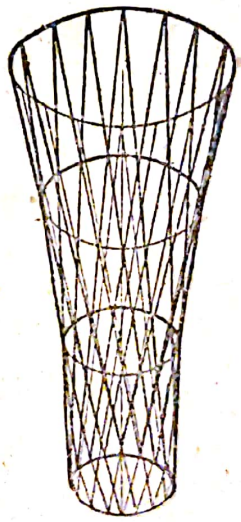


Fig. 394

In afară de acest gen de construcții, există încă și alte sisteme: cupole (fig. 393), turnuri (fig. 394)*) etc. care lucrând ca un ansamblu, nu pot fi descompuse în sisteme plane și lucrează la sarcini cu direcții oarecare în spațiu. Sistemele de genul celor arătate mai sus au un caracter specific de rezemare, precum și de alcătuire a pieselor.

Fixarea unui sistem indeformabil în spațiu înseamnă reducerea

*) **Notă.** Aceste turnuri cu generatoare drepte au fost propuse de academicianul *V. G. Șuhov* în anul 1896.

posibilităţilor acestuia de deplasare pe direcţia celor trei axe şi de rotire a lui în jurul aceloraşi axe.

In alt mod se poate spune că, prin introducerea a şase legături corespunzătoare sau a şase bare de reazim, sistemul în spaţiu va fi lipsit de cele şase grade de libertate a mişcărilor.

Valoarea eforturilor din aceste şase bare se determină din condiţiunile de echilibru static:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X = 0;\ \sum Y = 0;\ \sum Z = 0 \\ &\sum M_x = 0;\ \sum M_y = 0 \text{ şi } \sum M_z = 0 \end{aligned}\right| \qquad (188)$$

Legarea sistemelor în spaţiu, de pământ sau de alte sisteme indeformabile în spaţiu, se realizează cu ajutorul:

1. articulaţiei fixe sferice;
2. articulaţiei mobile sferice pe rulmenţi cilindrici;
3. articulaţiei mobile sferice cu posibilităţi de mişcare multilaterală.

Reazimul sferic fix se poate reprezenta printr'o sferă introdusă într'o scobitură sferică (fig. 395, a) sau în mod schematic sub forma unei articulaţii care reazimă pe bare cu direcţii oarecare în spaţiu. In acest fel de reazim, reacţiunea trece prin centrul articulaţiei şi se descompune pe trei direcţii, după direcţiile barelor.

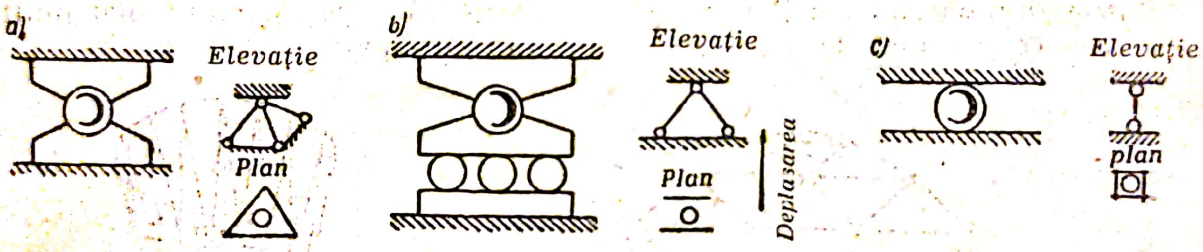


Fig. 395

Reazimul sferic mobil pe rulmenţi cilindrici poate fi reprezentat ca o sferă semi-înnecată într'o piesă care se găseşte pe rulmenţi cilindrici (fig. 395, b).

In mod schematic un astfel de reazim poate fi reprezentat ca o articulaţie rezemată pe două bare, care se găsesc în planul de mişcare a rulmenţilor. La un asemenea reazim, reacţiunea ce trece prin centrul articulaţiei se va găsi numai în planul perpendicular pe planul de mişcare şi se descompune după cele două direcţiuni ale barelor.

Articulaţia sferică cu posibilităţi multilaterale de mişcare poate fi reprezentată sub forma unei sfere ce se găseşte între două planuri (fig. 395, c) sau schematic, sub forma unei bare cu articulaţii sferice la extremităţile ei. In astfel de reazime forţa trece prin centrul articulaţiei şi se dirijează perpendicular pe planul de mişcare.

Intr'un sistem în spaţiu static determinat, numărul punctelor de reazim nu poate fi mai mic decât trei (fig. 396); unul din acestea trebue să fie fix, unul trebue să aibă posibilităţi de deplasare analoage cu cilindrul (bilaterale), iar ultimul posibilităţi de mişcare multilaterală (pe trei direcţii sferice).

Scanned with OKEN Scanner

Numărul punctelor de reazim poate fi sporit până la 6, însă în acest caz toate reazimele trebue să posede posibilităţi multilaterale de mişcare sau să fie formate din bare articulate la extremităţile lor (fig. 397).

Aşezarea lor în spaţiu trebue să asigure indeformabilitatea întregului sistem de fixare (§ 100).

Dacă în reazime există mai mult de şase legături, condiţia de determinare statică poate fi menţinută numai dacă din alcătuirea schemei care formează sistemul, se îndepărtează un număr de bare egal cu numărul legăturilor de reazim care este în plus peste cele şase necesare. Aceste legături de reazim suplimentare sunt considerate ca în-

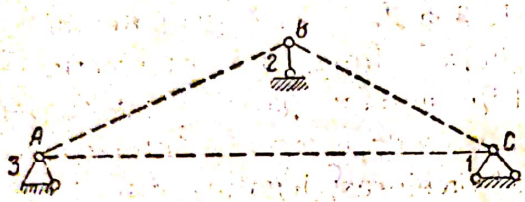


Fig. 396

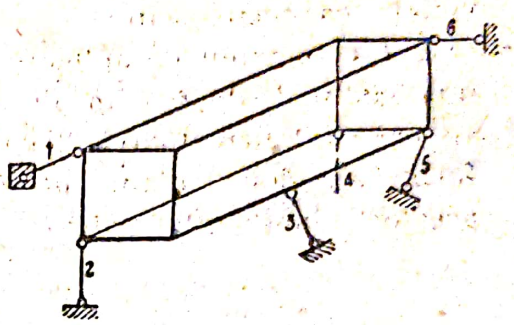


Fig. 397

locuitoare în raport cu legăturile interioare înlăturate, iar dacă nu se produce această îndepărtare a barelor, sistemul cu un număr mai mare de şase legături de reazim devine static nedeterminat faţă de legăturile de rezemare.

Determinarea eforturilor din legăturile de reazim şi în barele sistemelor în spaţiu, este legată de descompunerea rezultantei după şase direcţii, îndreptate arbitrar în spaţiu şi de descompunerea forţelor, după direcţia barelor care converg în aceste noduri.

§ 100. Descompunerea forţelor după şase direcţii

Orice sistem de forţe aplicat la un sistem în spaţiu, poate fi redus la o singură rezultantă şi un moment*) care se echilibrează cu eforturile din cele şase legături de reazim, ceea ce asigură şi condiţia de indeformabilitate şi determinare statică a legăturilor de reazim a unui sistem în spaţiu.

Eforturile din cele şase legături de reazim se pot determina analitic sub forma lor generală prin rezolvarea comună a celor şase ecuaţii, alcătuite după condiţiile de echilibru în spaţiu în raport cu trei axe (188). Totuşi o astfel de rezolvare este legată de multe calcule.

Calculul se simplifică simţitor, dacă eforturile din diferitele legături se determină prin compunerea ecuaţiei de echilibru după momentele luate faţă de o axă, care intersectează cât mai multe din cele şase bare; în acest caz suma momentelor date de eforturile din aceste legături, faţă de axa menţionată (inclusiv şi eforturile din barele paralele cu aceste axe) sunt egale cu zero.

---

*) **Notă.** *E. L. Nicolai.* Conferinţe despre „Mecanica teoretică statică" cap. VII ONTI, M-L, 1937; *A. F. Maslov.* „Mecanica teoretică", Moscova 1933.

Scanned with OKEN Scanner

Este dovedit că dacă avem șase legături (bare) dispuse într'un mod oarecare, se pot duce totdeauna *două drepte*, care să intersecteze patru legături.

Așa dar, combinând câte patru direcțiile date ale legăturilor, se pot alcătui două ecuații de momente față de dreptele care întretaie aceste legături și din rezolvarea comună a acestor ecuații se pot determina și valorile eforturilor din cele două legături, care intră în ecuații ca necunoscute.

Ca exemplu de aplicare a acestui procedeu, să determinăm efortul din legăturile de reazim ale sistemului reprezentat în fig. 398. In acest sistem sunt următoarele legături: 1, 3 și 2, 4, care grupate câte două formează două plane *abcd* și *bcfg*; linia de intersecție *bc* a acestor plane intersectează direcțiile acestor patru legături, iar altă linie, care de asemenea intersectează direcțiile acelorași legături, este linia care unește punctul de intersecție *k* al legăturilor 2 și 4 cu punctul de intersecție *d* al legăturilor 1 și 3. Formând ecuația momentelor față de dreptele *bc* și *kd*, se pot determina eforturile din barele 5 și 6.

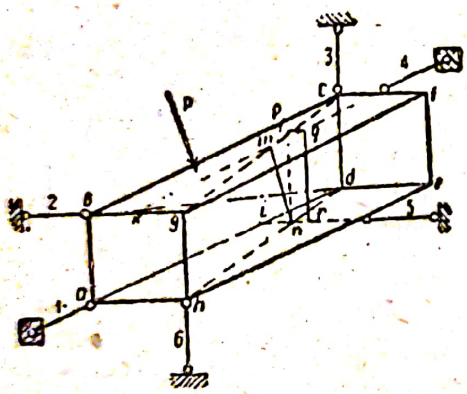


Fig. 389

Același procedeu poate fi întrebuințat pentru determinarea eforturilor din legăturile 4 și 3. Legăturile 1,5 și 2,6 se găsesc în două plane care se intersectează pe linia *ah* și care conțin dreapta *gi*, ce intersectează direcțiile lor; din ecuația momentelor formate față de dreptele *ah* și *gi*, se determina eforturile în legăturile 3 și 4.

Pentru determinarea eforturilor din legăturile 1 și 2, trebue să excludem influența celorlalte legături, din care în planul *hgcd* se găsesc numai legăturile 3 și 6, iar legăturile 4 și 5 nu se găsesc într'un același plan. Una din liniile care intersectează direcțiile legăturilor 3, 6, 4 și 5 este dreapta *mn*, care unește punctele de intersecție ale direcțiilor legăturilor 4 și 5 cu planul legăturilor 3 și 6. Pentru a găsi cealaltă dreptă, care să satisfacă aceeași condiție, executăm următoarea construcție: din punctul *n* ducem linia *np*, care este linia de intersecție a planului 5 (paralel cu legăturile 3 și 6) cu planul legăturilor 3 și 6 și după ea determinăm linia de intersecție *qr* a planelor legăturilor 4 și 5. Această linie *qr* este paralelă cu direcția legăturilor 6 și 3 și este acea dreaptă față de care eforturile din barele 6, 3, 4 și 5 sunt egale cu zero. Ecuația momentelor formate față de dreptele *mn* și *qr* permite determinarea eforturilor din legăturile 1 și 2.

Scanned with OKEN Scanner

Se poate indica un şir de cazuri ce se întâlnesc în practica construcţiilor, când determinarea eforturilor din cele şase legături se rezumă la rezolvarea unei ecuaţii cu o singură necunoscută.

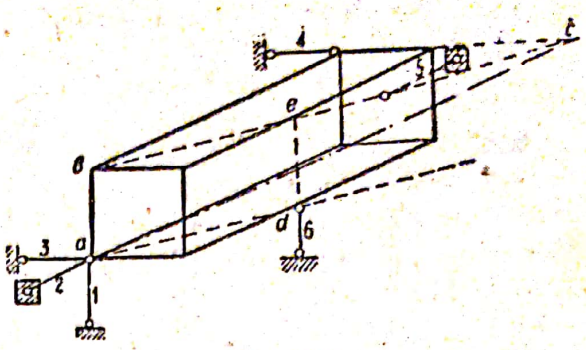


Fig. 399

1. Dacă trei dintre direcţiile date ale legăturilor se intersectează într'un singur punct (fig. 399, punct. *a*), atunci prin acest punct se poate duce întotdeauna o dreaptă care intersectează direcţia celorlalte două legături. De exemplu în fig. 399, planul *abde* trece prin punctul *a* şi legătura 6; punctul de intersecţie *c* al legăturii 4 cu direcţia acestui plan determină dreapta *ac*, care intersectează direcţiile legăturilor 6 şi 4.

2. Dacă trei din direcţiile date se găsesc într'un singur plan (în fig. 400 legăturile 1,3 şi 4) atunci prin intersecţia acestui plan cu direcţia celorlalte legături se determină dreptele *AB*, *AC*, care permit alcătuirea ecuaţiei momentelor cu un singur efort necunoscut dintr'una din legăturile rămase.

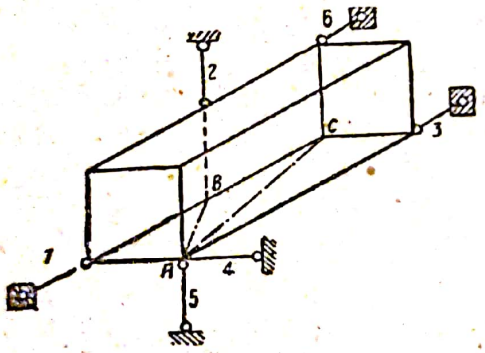


Fig. 400

3. Dacă patru din direcţiile date se găsesc în două plane, a căror linie de intersecţie este paralelă cu direcţia legăturii a cincea, efortul în legătura a şasea se determină din expresia momentelor luate faţă de linia de intersecţie a celor două plane.

4. Dacă planele, în care se găsesc cinci din direcţiile date ale legăturilor, sunt paralele între ele (în fig. 401 planele *abcd* şi *efgh*), efortul ultimei legături se determină din ecuaţia proiecţiei pe axa perpendiculară pe acele plane.

Cele şase direcţii, date pentru legăturile de reazim, trebue să asigure sistemelor în spaţiu indeformabilitatea geometrică şi prin aceasta posibilitatea de a determina eforturile în barele legăturilor. In acest scop este necesar ca determinantul coeficienţilor din eforturile legăturilor în ecuaţiile de echilibru să fie diferit de zero. In cazuri particulare se poate prevedea, fără să calculăm determinantul, că pentru anumite direcţii ale legăturilor, determinarea eforturilor din ele sau este imposibilă sau duce la rezultate nedeterminate. Aceasta se întâmplă în

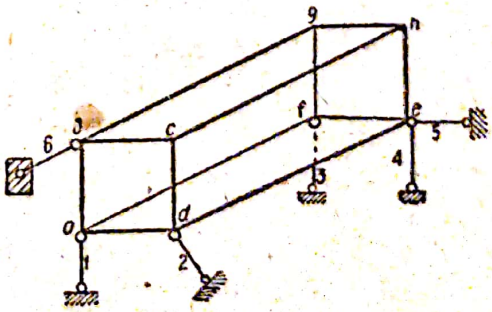


Fig. 401

următoarele patru cazuri, când suma momentelor tuturor celor șase eforturi, luate față cu o dreaptă oarecare, este egală cu zero și anume:

1. Dacă cele șase direcții ale legăturilor se intersectează pe o singură dreaptă; aceasta se întâmplă când direcțiile a trei legături sunt paralele, iar celelalte se intersectează într'un singur punct (fig. 402).

2. Când mai multe decât trei din direcțiile date se intersectează într'un singur punct; în acest caz se poate duce întotdeauna prin acest punct o dreaptă, care să intersecteze celelalte două direcții; în special aceasta are loc atunci când patru din direcțiile date sunt paralele între ele.

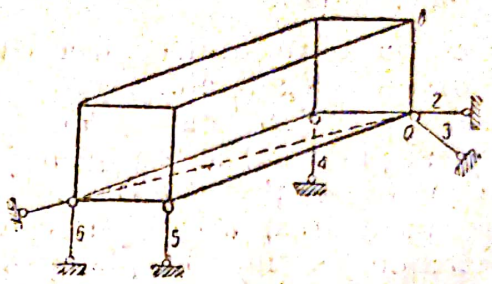


Fig. 402

3. Dacă patru din direcțiile date se găsesc în același plan (fig. 403); în acest caz dreapta care unește punctul de intersecție al acestui plan cu direcția celor două legături intersectează direcțiile tuturor legăturilor (în fig. 403, dreapta mn).

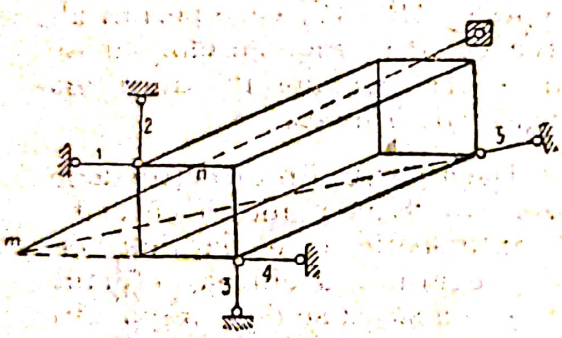


Fig. 403

4. In cazul când cinci dintre direcțiile legăturilor date se găsesc în două plane, a căror linie de intersecție este paralelă cu direcția legăturii a șasea.

In toate cazurile enumerate mai sus, legarea sistemului în spațiu, de pământ sau de un alt sistem indeformabil, este fixă.

§ 101. Descompunerea unei forțe după trei direcții date

In cazul când barele sunt legate prin articulații fără frecare și sarcinile sunt aplicate în noduri, determinarea eforturilor în barele care converg în nod se rezumă la studiul echilibrului forțelor aplicate într'un punct din spațiu. In acest caz, condițiunile de echilibru ale staticii permit să scriem trei ecuații:

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum Z = 0$$

Prin urmare, în barele care se întâlnesc într'un nod, se pot determina eforturile numai atunci, când se cunosc eforturile numai în trei din aceste bare; în acest caz însă este necesară condiția ca aceste trei bare să nu se găsească în același plan; în caz contrar problema nu se poate rezolva.

Eforturile din bare pot fi determinate întotdeauna prin alcătuirea ecuațiilor proiecțiilor barelor pe cele trei axe de coordonate și prin rezolvarea comună a acestor ecuații. Acest procedeu este legat — în general — de calcule complicate, care pot fi însă simplificate în unele cazuri.

Așa, de exemplu, rezolvarea se simplifică în cazul când axa pro-

iecției se consideră normală pe planul care trece prin două bare (fig. 404). Aceasta duce la rezolvarea unei ecuații de genul

$$S_1 \cos \alpha + P \cos \beta = 0$$

Cazul de mai sus permite să stabilim următoarele proprietăți caracteristice:

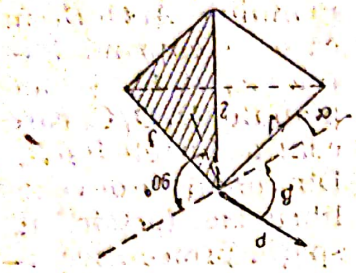


Fig. 404

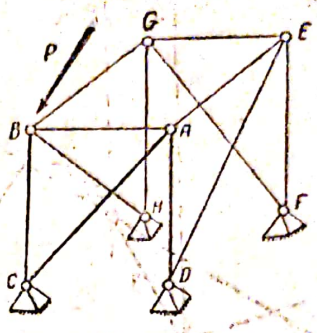


Fig. 405

Dacă într'un nod în spațiu, format de trei bare, nu se aplică nicio forță, eforturile din toate barele lui sunt egale cu zero.

In cazul când toate barele care formează un nod în spațiu (afară de una) se găsesc în același plan, iar nodul nu are nicio sarcină exterioară îndreptată sub un unghiu oarecare față de acest plan, atunci efortul din bara care nu se găsește în acest plan este egal cu zero.

Pornind dela această proprietate, se poate spune că în schema reprezentată în fig. 405 barele *AE*, *EG* și *GB* nu lucrează, iar eforturi se produc numai în barele *BA*, *BC*, *BH*, *AC* și *AD*.

Pentru determinarea eforturilor în aceste trei bare, care formează un nod în spațiu, se poate întrebuința de asemenea condiția de echilibru al momentelor. In acest caz ca axă față de care se formează ecuația momentelor, trebue să considerăm o dreaptă oarecare, care intersectează două din barele considerate (în fig. 406 este dreapta *AB*).

Pentru alcătuirea ecuației momentelor trebue să descompunem efortul necunoscut din bara a treia, precum și încărcarea aplicată la nod, în componentele normale pe axa aleasă pentru momente și în componentele care intersectează această axă.

In fig. 406 este arătat procedeul de compunere a ecuației momentelor, prin descompunerea efortului necunoscut și al sarcinii P în componente verticale V_p și V_1, normale pe planul axei AB și în componente orizontale care se găsesc în același plan.

Ecuația momentelor în acest caz se va scrie astfel:

$$V_p r_p - V_1 r_1 = 0,$$

în care r_p și r_1 sunt brațele de pârghie ale componentelor verticale față de axa AB.

Eforturile din trei bare, care converg într'un nod, pot fi determinate și pe cale grafică. Această determinare se efectuează pe două plane de proiecție (metoda lui Culmann).

De exemplu, se cere să se descompună forța P după trei direcții (fig. 407). Mai întâi determinăm linia Ok de intersecție a planelor forțelor P, S_3 și S_2, S_1. Direcția acestei linii se determină prin punctul de intersecție k_1 a urmelor orizontale ale planului $A_1 O_1 B_1$ în care se cuprind forțele S_1 și S_2 și ale planului $D_1 O_1 C_1$ care conține forțele P și S_3. Din condițiile de echilibru ale forțelor în spațiu, proiecțiile forțelor care converg într'un nod pe unul din plane trebue să formeze un poligon închis, iar rezultantele fiecărei perechi de forțe P, S_3 și S_1, S_2 trebue să fie egale și opuse ca sens. Cea din urmă condiție este posibilă numai atunci când direcția rezultantelor coincide cu linia de intersecție Ok a planului P, S_3 cu planul forțelor S_1, S_2.

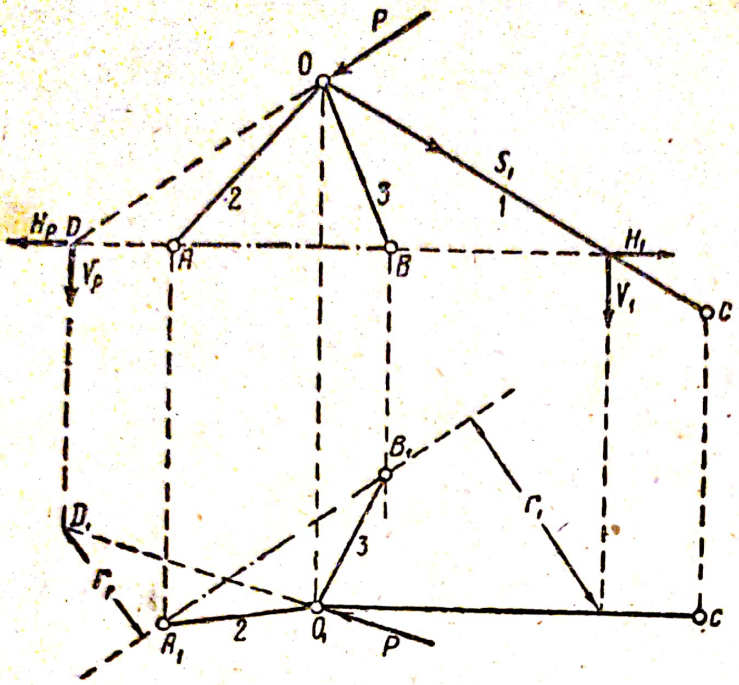


Fig. 406

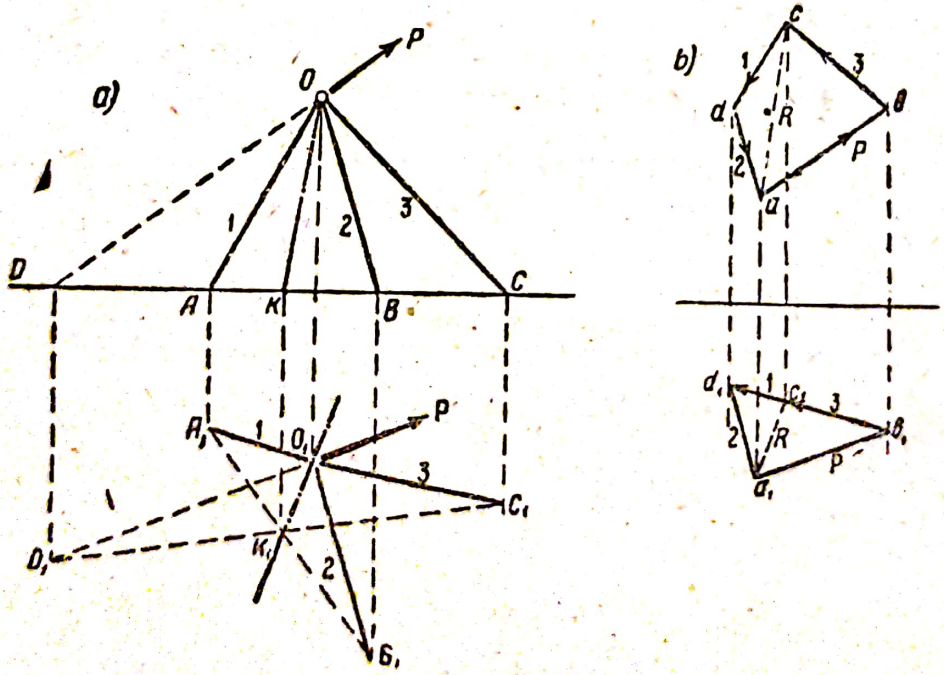


Fig. 407

Față de aceste considerente, descompunem în fiecare plan de proiecție forța P (fig. 407, b) în direcția liniei S_3 și Ok, parcurgând nodul 0 în sensul mersului acelor unui ceasornic, iar apoi descompunem segmentul obținut ac al rezultantei forțelor P și S_3 pe direcția forțelor S_1 și S_2.

Semnul efortului din bare se determină prin efortul necesar pentru închiderea poligoanelor. *)

Problema descompunerii se simplifică, când două din barele considerate se găsesc în același plan. In acest caz (fig. 408) într'una din proiecții se obține direct triunghiul forțelor OAF, ceea ce determină poziția punctului k. Direcția rezultantei forțelor P și S_1, O_1k_1 din cealaltă proiecție se determină prin intersecția dreptei F_1k_1, — dusă paralel cu O_1A_1 — cu verticala care trece prin punctul k. Direcția obținută a rezultantei O_1k_1 se descompune după direcțiile O_1C_1 și O_1B_1 ale proiecțiilor forțelor S_2 și S_3, în rezultat obținându-se patrulaterul închis $O_1F_1k_1G_1O_1$.

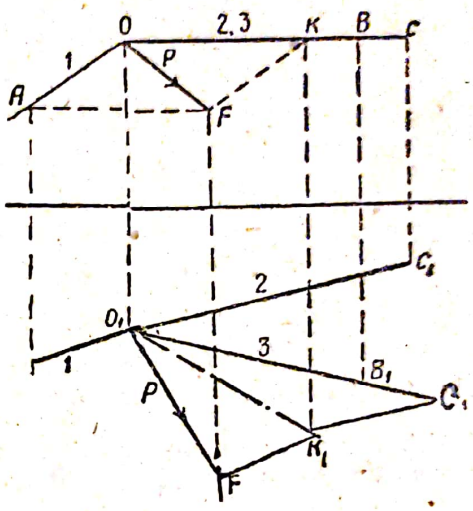


Fig. 408

Procedeele expuse pentru descompunerea forței după trei direcții, care se intersectează într'un singur punct, are o importanță considerabilă pentru determinarea indeformabilității sistemelor în spațiu, precum și pentru determinarea eforturilor în barele acestor sisteme.

Probleme și exerciții

129. Să se determine valoarea efortului în legăturile de reazim ale sistemului, reprezentat în fig. 409 și încărcat cu sarcina Q.

Indicație. Eforturile S_3, S_6, S_2 se pot determina ușor din ecuațiile cu două necunoscute ale momentelor.

Eforturile S_1, S_5 și S_3 se determină ușor din ecuațiile proiecțiilor.

Se recomandă să determinăm efortul S_5 din ecuația momentelor, alcătuită pentru acest efort și pentru efortul S_1.

130. Să se alcătuiască ecuația pentru determinarea eforturilor din legăturile de reazim ale sistemului reprezentat în fig. 410, care se găsește sub acțiunea forței P, îndreptată înafara planelor de coordonate.

Indicații. Trebue să cercetăm mai întâi dacă avem o soluție determinată a problemei (§ 100). Apoi trebue să descompunem direcțiile date ale forței P și ale eforturilor S_1, S_3 și S_4 (care nu se găsesc în planele axelor de coordonate) după direcțiile axelor.

Această descompunere va ușura formarea ecuațiilor pentru calcul. Eforturile S_1, S_4 și S_5 se determină din ecuațiile cu două necunoscute ale momentelor.

---

*) **Notă.** Celelalte metode de descompunere a forțelor după trei direcții se găsesc în cartea prof. *I. S. Podoloschi.* „Sisteme în spațiu", M. L. ediția 1931, precum și în tratatul lui *P. V. Rabtevin:* „Culegere de probleme asupra sistemelor în spațiu" Kiev, 1911.

Scanned with OKEN Scanner

131. Să se determine valorile eforturilor din legăturile de reazim reprezentate în fig. 411 a și b.

Indicație. Mai întâi trebue să se stabilească posibilitatea de determinare a eforturilor din aceste legături.

132. Să se determine eforturile din legăturile de reazim ale sistemului din fig. 412

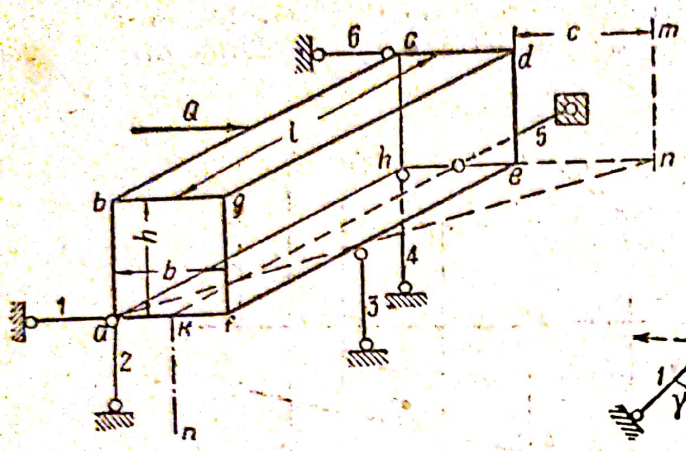


Fig. 409

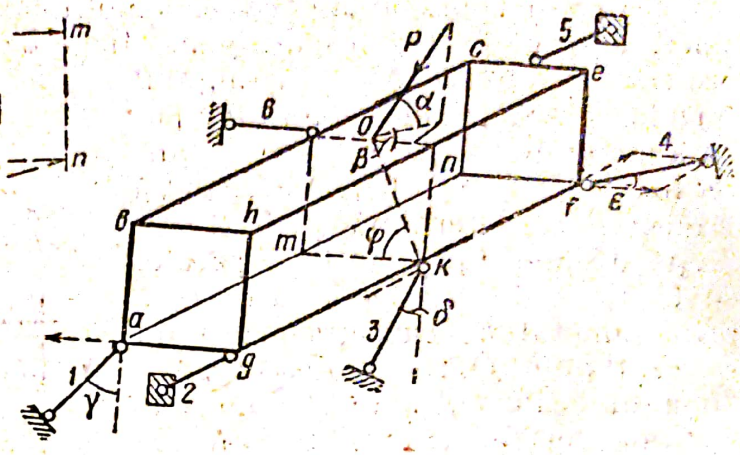


Fig. 410

133. Să se determine eforturile care apar în barele sistemului reprezentat în fig. 413 și care se găsește sub acțiunea forței P.

Indicații. Problema se rezolvă folosind descompunerea grafică pe două proiecții. Linia de intersecție a planelor forțelor S_1 și S_3 cu planul forțelor P și S_2 se determină prin intersecția în plan a dreptelor $A_1 C_1$ și $B_1 O_1$; direcția în plan este $O_1 K_1$, iar în proiecție verticală OK. Descompunerea forțelor P în proiecție pe verticală ne dă poligonul forțelor $a_1\ d_1\ c_1\ b_1$ (fig. 413).

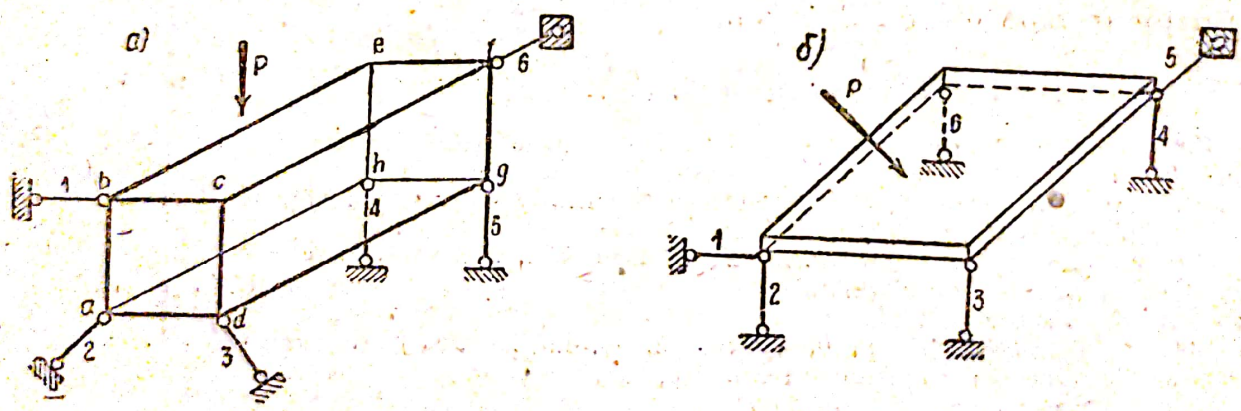


Fig. 411

Cu ajutorul acestui poligon se poate construi poligonul forțelor în plan; în acest poligon direcția forței P, a rezultantei $O_1 K_1$ și a efortului $O_1 B_1$ se confundă într'o singură dreaptă; valorile lor se determină prin punctele a_2, b_2, d_2, care sunt proiecțiile punctelor a_1, b_1 d_1.

Eforturile din bare se determină după proiecțiile poligoanelor forțelor:

$$\overline{d_1\ c_1} = P\ \mathrm{tg}\ \alpha;\ S_1 = -\frac{P}{\cos\alpha};$$

$$\overline{d_2\ c_2} = S_1 \cos\alpha = P;\ \overline{b_2\ d_2} = (\overline{d_2\ c_2})\ \mathrm{ctg}\ \beta$$

etc.

Determinarea aceloraşi eforturi poate fi făcută fără construirea poligoanelor forţelor, prin următoarea ordine de descompunere a forţelor.

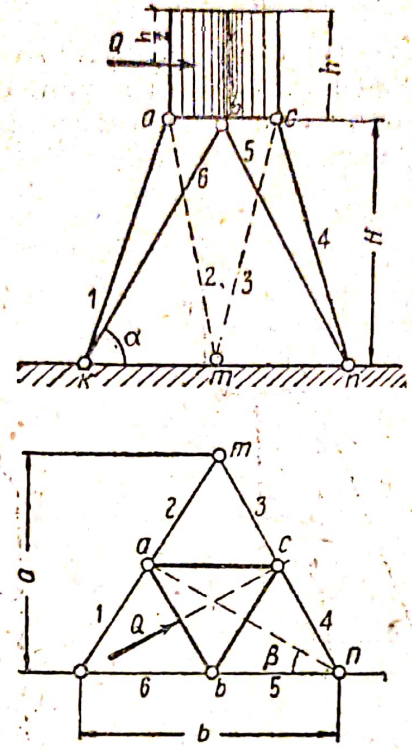


Fig. 412

Mai întâi se descompune forţa P în planul BOC, pe direcţia verticalei V şi pe a barei S_2 (fig. 413); mai departe forţa V se descompune în planul $A_2\ O_2\ C_2$ pe direcţiile S_1 şi R; în sfârşit forţa R se descompune în planul $A_1\ O_1\ C_1$ pe direcţiile AO_1 şi O_1B_1.

134. După datele problemei precedente, să se determine efortul din bara S_1, după ecuaţia momentelor.

Indicaţie. Pentru alcătuirea ecuaţiei momentelor, trebue să luăm o dreaptă care intersectează două bare.

Este indicat să descompunem efortul în componente perpendiculare şi paralele cu axa.

135. Să se determine efortul din barele sistemului înfăţişat în fig. 414 a. Barele 1,2 se găsesc în acelaşi plan, înclinat cu unghiul γ faţă de verticală.

Indicaţii. Pentru uşurarea calculelor, sistemul trebue să fie reprezentat în două plane de proiecţie (fig. 414 b). La determinarea analitică, trebue să descompunem forţa P după direcţia axelor cu coordonatele P_x, P_y, P_z şi să cercetăm separat influenţa fiecărei componente. La descompunerea forţelor în planul ABC, unghiurile trebue să fie determinate după dimensiunile date.

Să se arate barele ale căror eforturi se determină mai uşor din expresia momentelor.

§ 102. Sisteme static determinate în spaţiu, alcătuite din bare

In studiul sistemelor în spaţiu cu bare articulate, *vom păşi dela ipoteza că, toate barele care alcătuesc sistemul sunt legate între ele cu articulaţii fără frecare, iar toate sarcinile exterioare sunt aplicate numai în noduri. In această ipoteză, toate barele vor fi solicitate numai de eforturi axiale, dirijate dela un nod la altul.*

Sistemele în spaţiu cu bare articulate vor fi static determinate atunci când între numărul lor de bare m şi numărul de articulaţii din noduri n există următoarea relaţie:

$$m = 3n - 6 \qquad (189)$$

Într'adevăr separând fiecare nod, proiectându-l pe trei axe şi formând pentru el cele trei ecuaţii de echilibru, vom obţine un sistem de $3n$ ecuaţii, care permite să determinăm acelaşi număr de eforturi necunoscute.

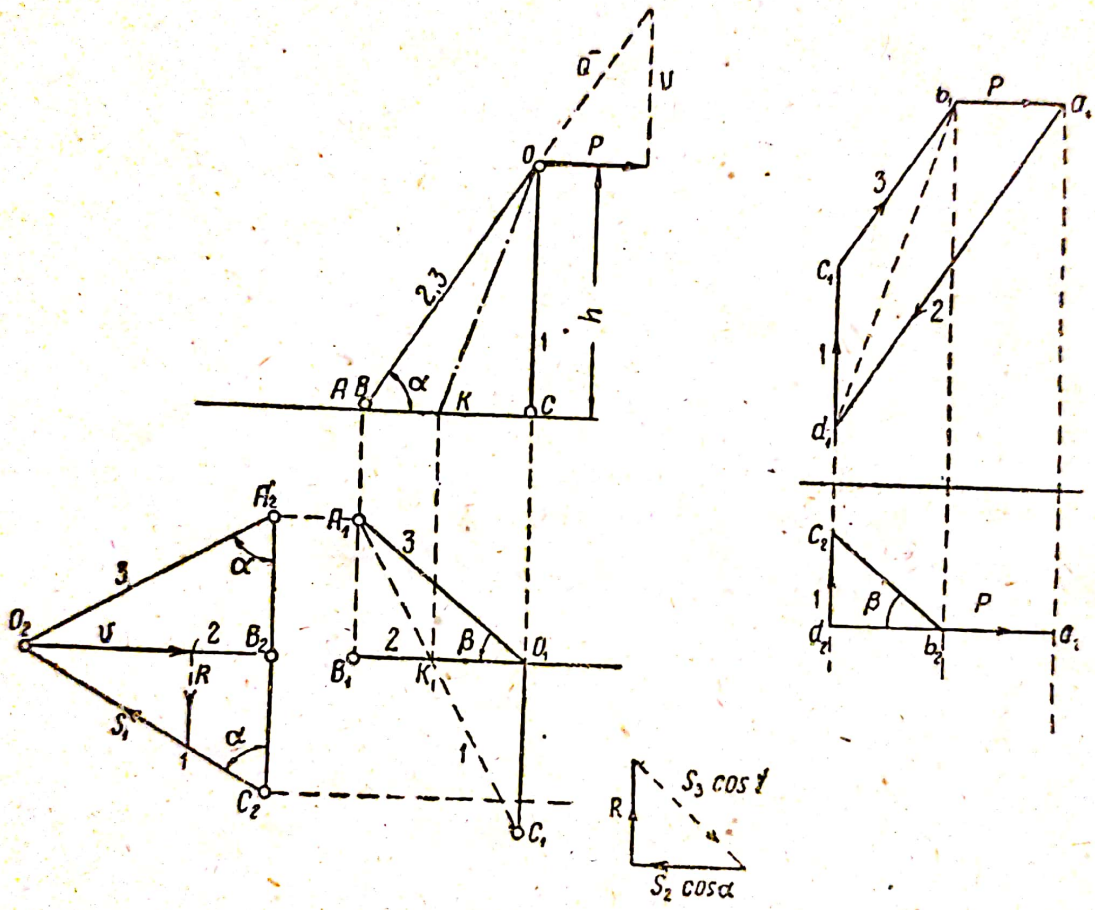


Fig. 413

Însă, deoarece numărul ecuaţiilor trebue să asigure totodată şi determinarea eforturilor din cele şase legături de reazim, pentru a putea determina eforturile din m bare ale sistemului propriu zis, trebue să se utilizeze $(3n - 6)$ ecuaţii.

Dacă $m > 3n - 6$, sistemul este static determinat.

Când $m < 3n - 6$ sistemul este deformabil.

Condiţia $m \geq 3n - 6$ este necesară, dar insuficientă, întru cât aceasta nu stabileşte indeformabilitatea sistemului. Indeformabilitatea trebue să fie verificată separat, cercetând alcătuirea sistemului.

Cel mai simplu *procedeu de alcătuire a sistemelor indeformabile constă în adăugarea la un triunghiu plan a câte unui nod prin inter-*

mediul a trei bare, care nu se găsesc în același plan. La această alcătuire a sistemului, numărul barelor este determinat prin:

$$3 + 3\ (n - 3) = 3n - 6.$$

ceea ce satisface condiția (189). Sistemele formate cu aceste procedee se numesc *sisteme simple.*

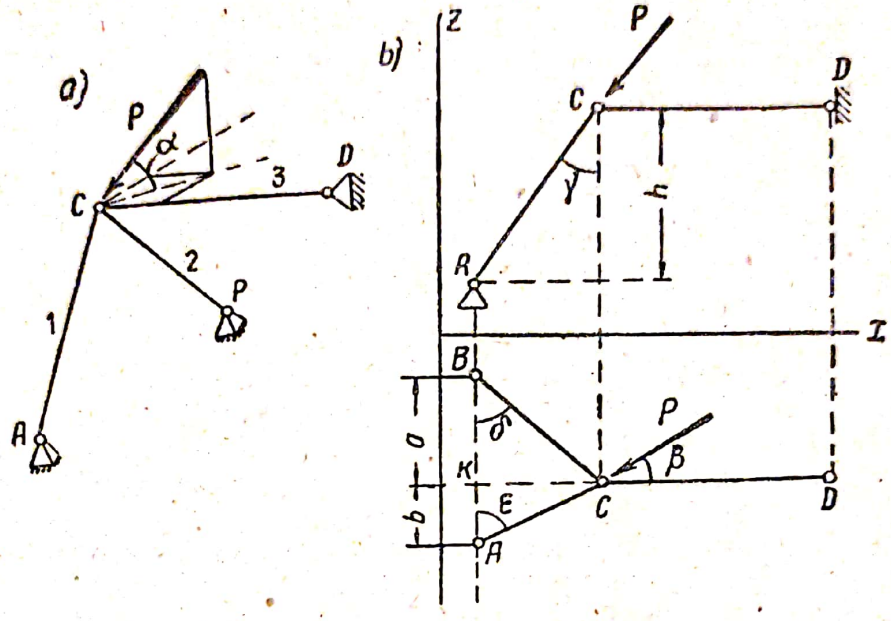


Fig. 414

Procedeul invers, adică *eliminarea dintr'un sistem a câte unui nod cu trei bare, servește ca verificare a condițiilor de indeformabilitate a sistemului simplu.*

In aceeași categorie de sistem simplu trebue să se introducă și două sisteme indeformabile, legate cu șase bare, constituind un ansambu. Acest mod de legătură nu este contrar condiției (189) de determinare statică a noului sistem.

Intr'adevăr, numărul barelor în noul sistem este determinat prin suma

$$m_1 + m_2 + 6 = 3\ (n_1 + n_2)$$

ceea ce satisface condiția (189). Ca exemplu de alcătuire a unui astfel de sistem poate fi acela reprezentat în fig. 415, în care părțile *abcd* și *efgh* sunt sisteme indeformabile, iar îmbinarea lor într'un singur tot s'a făcut cu ajutorul a șase bare *bc, bg, ec, gd, dh, hc,* care trebue să asigure indeformabilitatea noului sistem (§ 103).

Prin transformarea sistemelor simple se pot obține o serie de sisteme diferite ca formă și ca legături de reazim. Această transformare constă în aceea că în locul barei suprimate din compunerea sistemului, se introduc între legăturile de reazim o bară suplimentară înlocuitoare. Inlocuirea barelor trebue să se facă în așa fel, încât indeformabilitatea sistemului să fie asigurată.

Sistemele obținute prin aceste procedee, spre deosebire de sistemele simple, se numesc *sisteme transformate*.

In fig. 416 este înfățișat un sistem, în care bara *gc* este înlocuitoare în raport cu bara *ah* a sistemului din fig. 415. Intr'adevăr, suprimând bara *dh* și înlăturând apoi succesiv nodurile *f*, *h* și *ec*, cu toate barele care se intersectează în aceste noduri, obținem sistemul *abcdg* care este deformabil. Pentru ca acest sistem să devină indeformabil, tre-

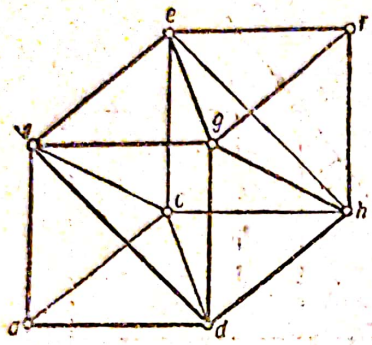


Fig. 415

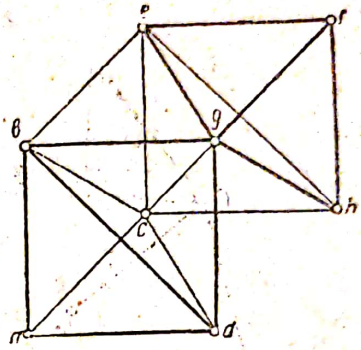


Fig. 416

bue să introducem bara *cg*, care va fi astfel înlocuitoare față de bara *dh*.

În fig 417 a, este reprezentat un sistem static determinat indeformabil după modul lui de alcătuire și fixat în mod invariabil de pământ. Acesta s'a format prin înlocuirea barei *Bc* prin bara *ab*. Oricare

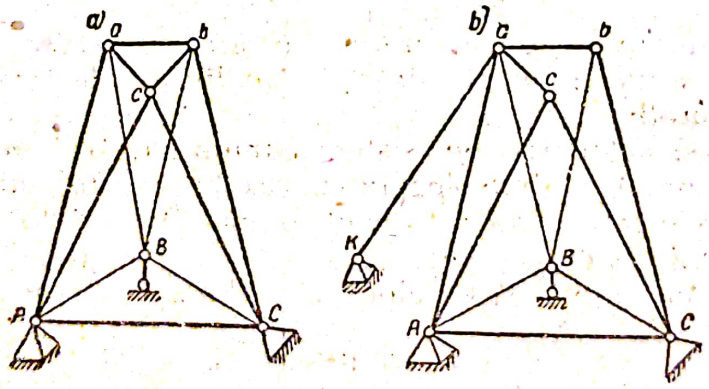


Fig. 417

din barele acestui sistem poate fi suprimată și înlocuită cu bara suplimentară înlocuitoare pe reazim. De exemplu bara *bc* poate fi înlocuită prin tirantul de reazim *ak* (fig. 417, b). In noul sistem transformat, nodul *a* este legat de triunghiul de bază *ABC* și de pământ prin trei legături, iar alăturarea ulterioară a nodurilor *b* și *c* este făcută cu trei bare.

O formă foarte răspândită de sisteme în spațiu sunt sistemele denumite *sisteme în carcasă*.

Scanned with OKEN Scanner

Sub această denumire se înțelege un poliedru compus din sisteme plane indeformabile cu zăbrele, care nu are astfel nevoie de legături intermediare. Aceste poliedre sunt înfățișate în fig. 418.

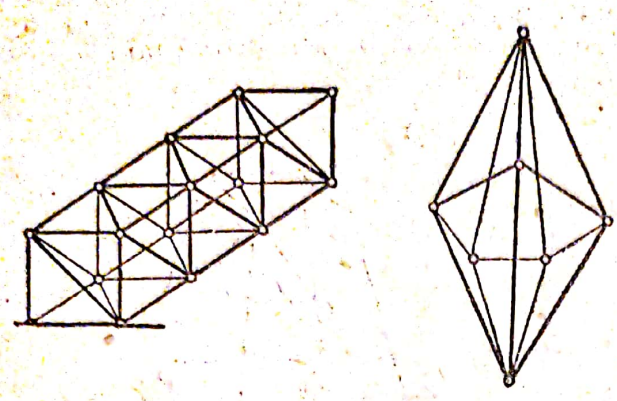


Fig. 418

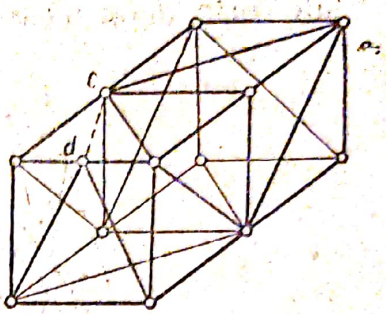


Fig. 419

Trăsătura caracteristică a sistemelor în carcasă constă în aceea că suprafețele exterioare ale acestor sisteme sunt alcătuite din triunghiuri formate din bare, ale căror vârfuri sunt comune pentru toate triunghiurile vecine. Sistemele în carcasă, formate astfel, sunt static determinate și indeformabile.

După cum se știe, într'un poliedru, numărul laturilor (muchiilor) m este egal cu suma numărului nodurilor n și al fețelor k minus 2. (Teorema lui Euler) :

$$m = n + k - 2 \qquad (190)$$

Insă, întru cât fiecare față după condițiile de alcătuire se compune din trei bare, iar fiecare bară intră în compunerea a două fețe, vom avea între numărul barelor și numărul forțelor următoarea relație :

$$m = \frac{3k}{2} \text{ sau } k = \frac{2}{3} m$$

Substituind valoarea lui k în formula (190), după reducerea termenilor asemenea, obținem :

$$m = 3n - 6,$$

ceea ce satisface condiția principală (189) de determinare statică și de indeformabilitate a sistemelor în spațiu.

In fig. 419 este reprezentat un sistem care nu satisface cerințele impuse sistemelor în carcasă, cu toate că laturile sistemului sunt alcătuite din grinzi cu zăbrele, formate din triunghiuri, însă nodul d nu este comun pentru triunghiurile vecine și totodată poate să se deplaseze în planul orizontal. Printr'un calcul simplu ne putem convinge că în acest sistem, numărul barelor și al nodurilor nu satisfac condiția (189).

$$3.13 - 6 = 33 > 32$$

adică în sistem lipsește bara care ar fi legat nodul d cu nodul c.

Sistemele în carcasă ca şi cele simple pot fi transformate în sisteme noi, prin întroducerea de bare înlocuitoare. De exemplu sistemul reprezentat în fig. 420 a, este transformat într'un sistem nou, arătat în fig. 420 b, prin înlocuirea legăturilor diagonale din planele orizontale, prin două legături de reazim în plus.

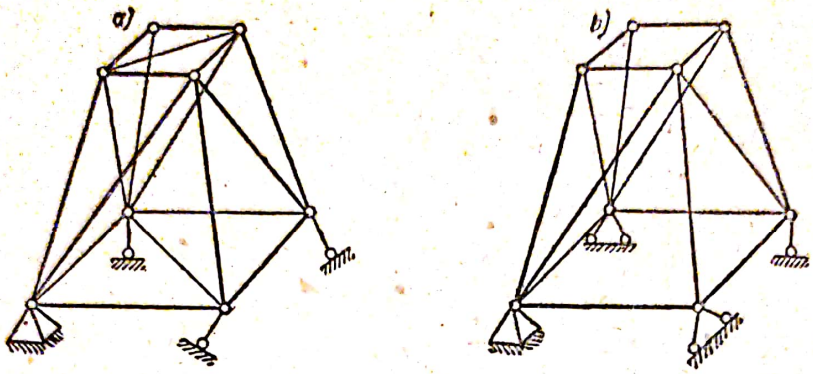


Fig. 420

In sistemul arătat în fig. 421, întroducerea în legăturile de reazim a 12 bare în plus permite suprimarea a 6 bare din centura inferioară şi a câte 3 diagonale din planul superior şi inferior. Astfel s'a putut păstra indeformabilitatea sistemului.

Indeformabilitatea sistemelor în carcasă se verifică cel mai simplu prin metoda sarcinilor nule. După cum se ştie, la fiecare încărcare, eforturile din barele unui sistem indeformabil au valori determinate. Dacă încărcarea este egală cu zero, atunci şi toate eforturile din bare vor fi egale cu zero. Prin urmare, dacă se va demonstra că în lipsa încărcării, eforturile din toate barele sunt egale cu zero, înseamnă că sistemul este indeformabil (metoda sarcinilor nule).

De exemplu, se cere să se dovedească indeformabilitatea sistemelor reprezentate în fig. 421 şi 422.

Considerând nodurile superioare *a*, *b*, *c*, *d*, *e* şi *f* ale sistemului din fig. 421, constatăm că din patru bare care se întâlnesc într'un nod, trei se găsesc în planul unei feţe. Aceasta permite să tragem concluzia că eforturile din barele *ab* (nodul *a*), *bc* (nodul *b*), *cd* (nodul *c*) etc. care nu se află în planul feţelor în care sunt cuprinse celelalte trei bare ale aceluiaşi nod, sunt egale cu zero (§ 102).

Inlăturând toate barele centurii superioare, ne vom convinge că în feţele superioare rămân câte două bare care nu au nicio încărcare, deci eforturile din ele sunt egale cu zero ceea ce permite să înlăturăm din sistem şi aceste bare.

Repetând acelaşi raţionament pentru barele etajului inferior, ne vom convinge că şi în ele eforturile sunt egale cu zero. Aceasta duce la concluzia că sistemul este indeformabil.

Analizând sistemul reprezentat în fig. 422, se ajunge la concluzia că în barle înclinate *ae*, *de*, *be* şi *ce*, care converg la nodurile *a*, *b*, *c* şi *d*, pot să existe eforturi, însă toate sunt de acelaşi semn, deoarece toate aceste noduri se găsesc în aceleaşi condiţiuni. Toate

aceste bare concură în vârful *e* și întru cât eforturile din bare sunt de același semn, rezultă că nodul *e* nu poate fi în stare de echilibru.

Intru cât această situație este imposibilă, trebue să tragem deci concluzia că în toate barele indicate eforturile sunt egale cu zero.

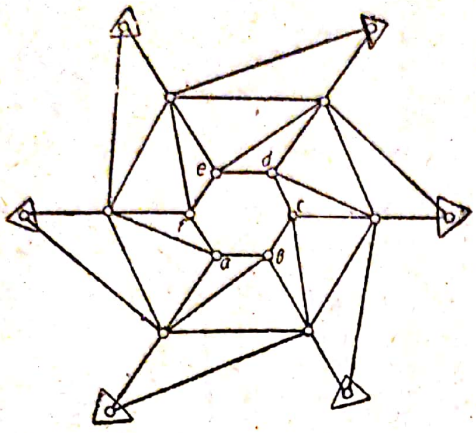
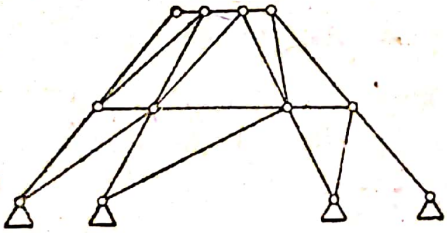


Fig. 421



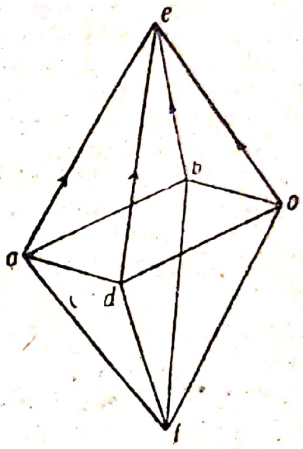


Fig. 422

Probleme și exerciții

136. Să se demonstreze dacă sistemele reprezentate în fig. 423 sunt static determinate și indeformabile. Să se indice triunghiul care stă la baza alcătuirii acestui sistem.

Să se demonstreze că sistemul (fig. 423 b) poate fi considerat ca format din două sisteme simple, legate între ele în mod indeformabil.

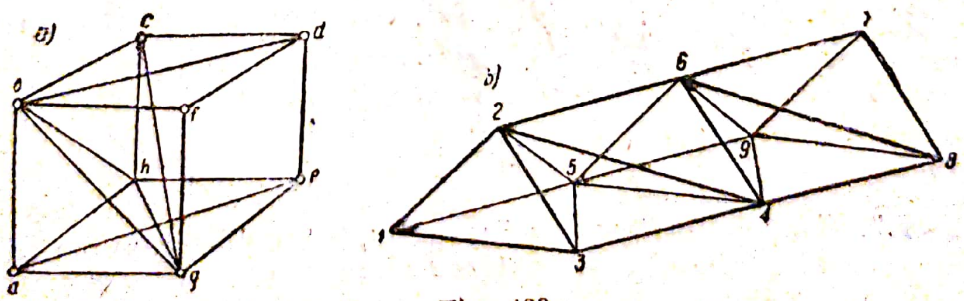


Fig. 423

137. Să se arate care bază poate să servească ca înlocuitoare față de bara 6—4 a sistemului reprezentat în fig. 423 b.

138. Folosind metoda sarcinilor nule, să se dovedească indeformabilitatea sistemului reprezentat în fig. 424 și 425 b.

Indicații. Determinarea eforturilor în sistemul reprezentat în fig. 424, trebue să înceapă cu nodurile 5 — 8, 7 și 6. Demonstrând că barele 8 — 9, 7 — 9, 6 — 9 și 5 — 9 lucrează în condiții identice, ne vom convinge că echilibrul nodului 9 este imposibil, deci eforturile din aceste bare trebue să fie nule.

Din acest raționament rezultă că eforturile din barele 5 — 8, 8 — 7 7 — 6 și 6 — 5 sunt egale cu zero.

Mai rezultă că și eforturile în diagonalele și montanții din fețele verticale sunt egale cu zero.

In sistemul arătat în fig. 423 b, toate eforturile sunt egale cu zero, constatare la care se ajunge prin analizarea succesivă a tuturor nodurilor, începând cu nodurile 3 și 7.

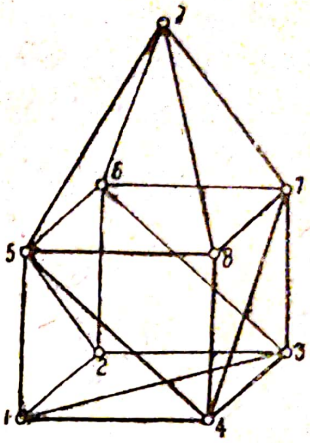


Fig. 424

139. Să se arate procedeul de alcătuire și să se demonstreze indeformabilitatea sistemelor reprezentate în fig. 425.

Indicații. Ambele sisteme reprezintă sisteme în carcasă transformate și trebue să determinăm care anume bare aduc aceste sisteme la sisteme simple în carcasă. Determinarea statică se stabilește prin condiția (189), la care toate legăturile de rezemare — neapărat șase și cele suplimentare — trebue să fie introduse în numărul de legături ale sistemului ; numărul lor trebue să fie egal cu numărul nodurilor înmulțit cu trei. Indeformabilitatea sistemului trebue să fie determinată cu ajutorul sarcinilor nule.

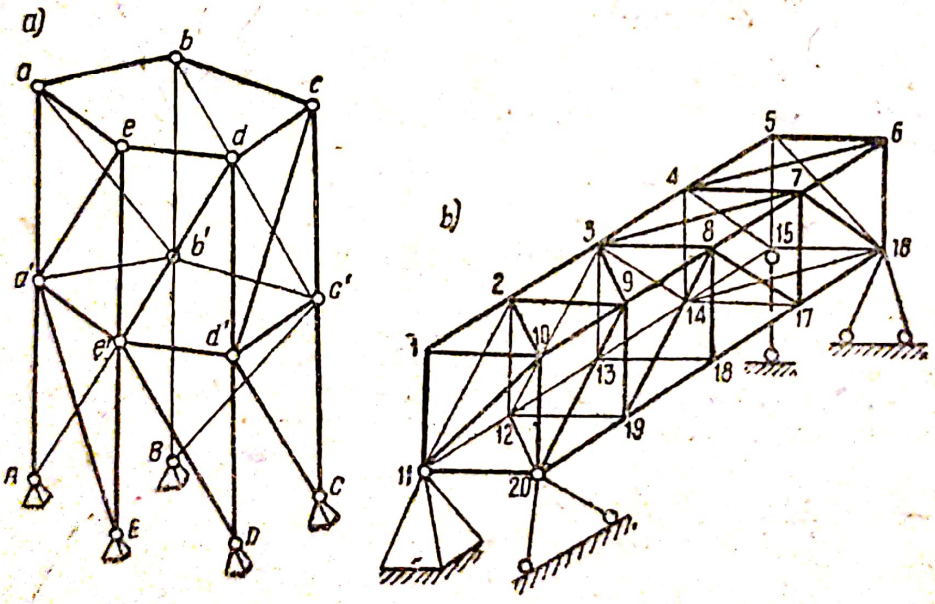


Fig. 425

§ 103. Calculul sistemelor în spațiu, prin descompunerea lor în sisteme plane

Particularitatea caracteristică a sistemelor în carcasă și totodată a sistemelor obținute prin transformarea sistemelor în carcasă, este întruchipată în fețele grinzilor cu zăbrele plane, compuse din triunghiuri. Fiind separate prin secțiuni făcute în sistemul în spațiu, aceste

grinzi cu zăbrele rămân indeformabile și pot prelua sarcinile care acționează în planul lor, transmițându-le reazimelor sau grinzilor vecine.

De aci rezultă că dacă încărcarea ce acționează asupra unui sistem în spațiu se găsește în planul uneia din grinzile plane care formează sistemul, atunci numai acea grindă va lucra la această sarcină, iar eforturile din celelalte bare ale sistemului, care nu sunt reazimele acelei grinzi, vor fi egale cu zero.

Intru cât orice încărcare aplicată în nodurile din muchiile sistemului în carcasă poate fi întotdeauna descompusă în componente, care să se găsească în planul fețelor și în lungul muchiilor, această proprietate poate fi folosită în calculul sistemelor în carcasă.

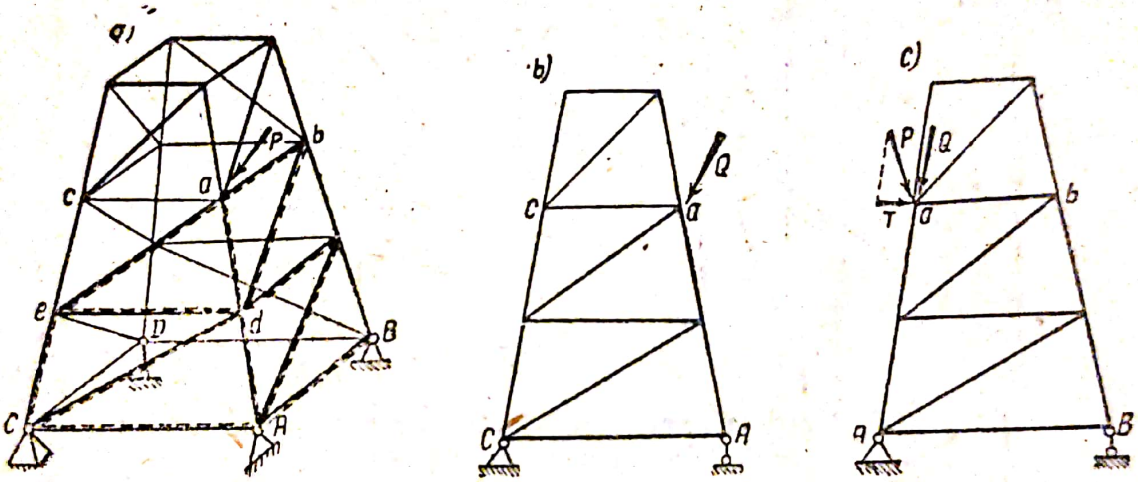


Fig. 426

De exemplu în sistemul reprezentat în fig. 426, alcătuit din patru grinzi cu zăbrele plane, care formează fețele figurii, încărcarea dintr'un nod oarecare se descompune (fig. 426-b) în forța Q, care acționează pe latura $ACca$ și în forța T care acționează pe direcția barei ab, în planul $ab\ AB$ (fig. 426-c). In cazul când avem numai forța P (fig. 426-a), vor lucra în sistem numai barele arătate în figură cu linii duble.

Sistemul reprezentat în fig. 427 se compune dintr'o prismă inferioară dreptunghiulară și dintr'un trunchiu de piramidă dreptunghiulară. Partea superioară poate fi descompusă în patru grinzi cu zăbrele, care formează fețele laterale, punctele de rezemare ale acestor grinzi sunt nodurile c, e, f, g. Partea inferioară a sistemului poate fi descompusă în patru grinzi verticale, asupra cărora sarcinile din porțiunea superioară se transmit în nodurile c, e, f, g și se descompun în planele fețelor (fig. 427-b).

În fig. 427-a, sunt arătate, cu linii duble, barele care lucrează sub acţiunea încărcării.

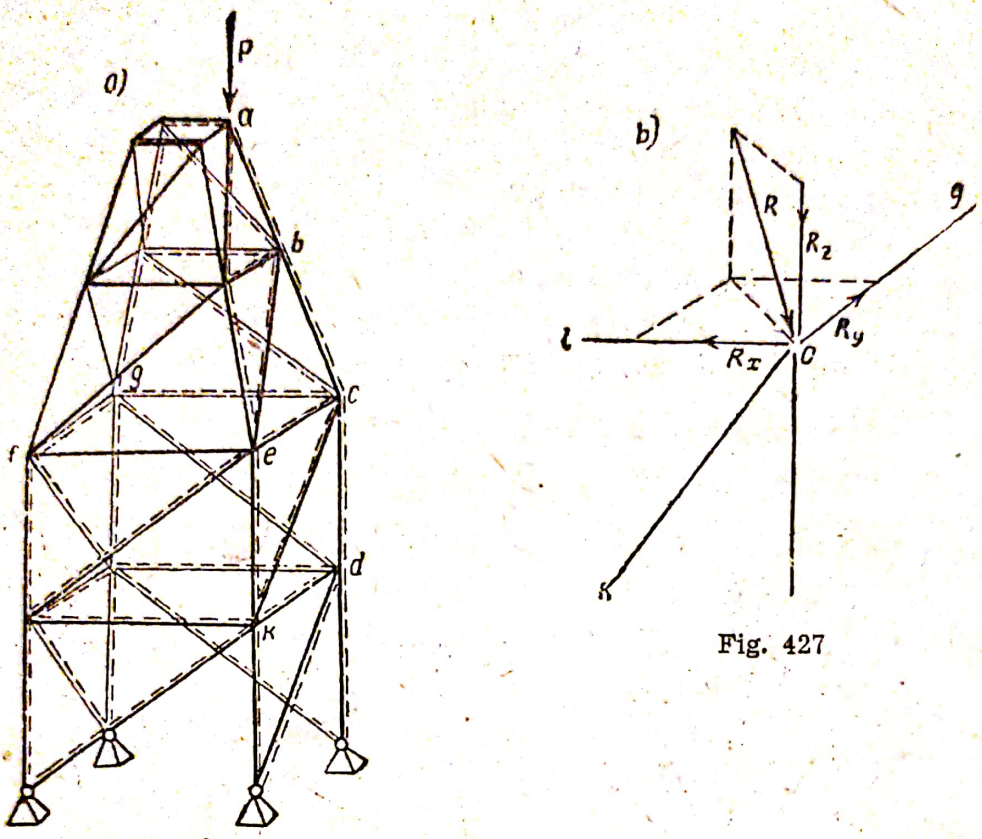


Fig. 427

§ 104. Determinarea eforturilor prin separarea nodurilor şi prin secţionare

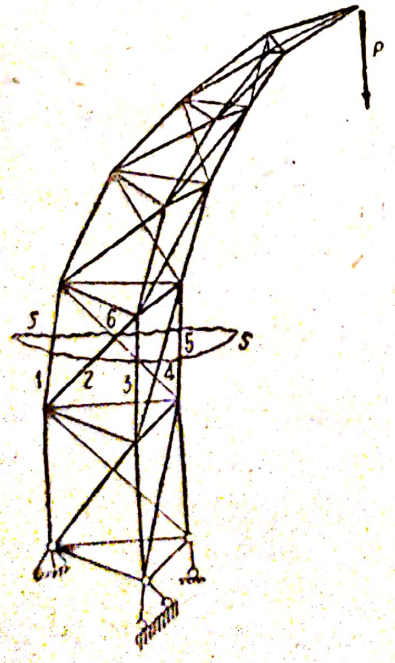


Fig. 428

Dacă un sistem în spaţiu este astfel alcătuit, încât nu poate fi descompus în sisteme plane, atunci cea mai simplă metodă pentru determinarea eforturilor din acest sistem constă în aplicarea legilor staticii, folosind separarea nodurilor sau secţionarea sistemului. De asemenea este posibilă şi aplicarea metodelor cinematice.

In sistemele simple, alcătuite prin adăugarea succesivă a câte unui nod prin intermediul a trei bare, eforturile din bare se determină destul de simplu, prin separarea rând pe rând a nodurilor, începând cu nodul în care se unesc numai trei bare. Astfel, folosind indicaţiile dela § 101, se pot determina eforturile din barele acestui nod. După aceasta se trece la nodul următor, în care urmează să rămână numai trei bare cu eforturi necunoscute, iar eforturile cunoscute din două bare ale nodului se adună într'o singură rezultantă, drept sarcină.

Această rezultantă se descompune după direcţiile celor trei eforturi necunoscute (§ 101). Trecând succesiv dela un nod la altul, se determină eforturile din toate barele, ceea ce — în general — se reduce la descompunerea forţei după trei direcţii în spaţiu sau în două direcţii în plan.

In acele sisteme unde este posibil să se ducă o secţiune prin şase bare (după cum s'a făcut, de exemplu, în sistemul reprezentat în fig. 428), eforturile se pot determina din condiţia de echilibru a uneia sau a celeilalte din părţile separate prin secţiune. In acest caz, pentru formarea ecuaţiilor de echilibru, se folosesc procedeele arătate în § 101.

§ 105. Determinarea eforturilor cu ajutorul metodei înlocuirii barelor

Procedeele de determinare a eforturilor, expuse în § 102, nu pot fi folosite în cazul sistemelor în care nu se pot duce secţiuni ce ar trece numai prin şase bare şi în care nu sunt noduri cu care s'ar putea începe descompunerea pe trei direcţii. De aceea în asemenea sisteme, pentru determinarea eforturilor, suntem nevoiţi să aplicăm metoda înlocuirii barelor, care este asemănătoare cu metoda întrebuinţată în calculul grinzilor cu zăbrele plane.

Presupunem, de exemplu, că avem sistemul reprezentat în fig. 429. In acest sistem nu găsim noduri cu care s'ar putea începe descompunerea forţelor şi pentru a obţine această posibilitate, suprimăm din sistem o bară oarecare, de exemplu bara *bf* şi o înlocuim cu bara *bd*. Sistemul astfel alcătuit este static determinat, însă pentru ca să lucreze la fel ca şi cel dat, trebue să aplicăm în locul barei înlăturate un efort X, însă necunoscut.

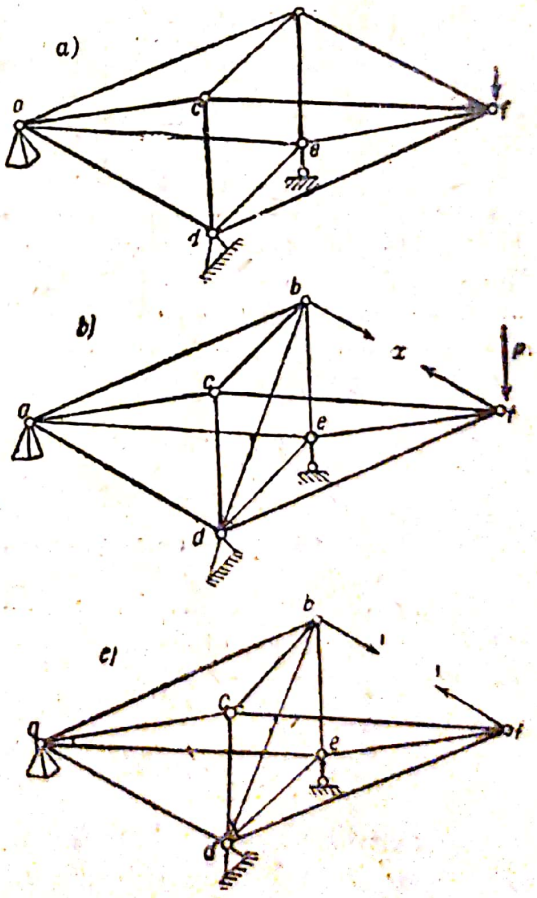


Fig. 429

O asemenea transformare a sistemului va permite să determinăm eforturile din barele acestui sistem, în ipoteza încărcării, în primul rând, cu sarcina dată P şi în al doilea rând cu efortul necunoscut X, considerat ca o sarcină. Insă deoarece valoarea lui X nu este cunoscută, pentru ca să determinăm eforturile provocate de această forţă, o înlocuim cu o forţă unitară (fig. 429-c) şi determinăm în toate barele eforturile N_x din această încărcare unitară, reprezentând astfel, într'o bară oarecare, efortul provenit din forţa X sub forma produsului XN_x. Astfel efortul într'o bară oarecare a sis-

temului, provocat de acțiunea simultană a sarcinilor, poate fi exprimat prin suma:

$$N = N_p + X\bar{N}_x \qquad (191)$$

In mod analog se determină efortul în bara bd:

$$N_a = N_{bp} + X\bar{N}_{bx}$$

Insă deoarece sistemul dat, care conține efortul X, nu conține și bara bd, rezultă că această bară nu lucrează, iar efortul ei provenit din sarcinile P și X în realitate este egal cu zero, adică

$$N_{bp} + XN_{bx} = 0;$$

de unde se poate determina efortul căutat:

$$X = -\frac{N_{bp}}{N_{bx}}$$

Introducând valoarea acestui efort în expresia (191), determinăm eforturile din toate barele.

In sistemele în spațiu suntem nevoiți foarte des să înlocuim mai multe bare, considerând astfel sistemul sub acțiunea sarcinilor P și a eforturilor X, Y, Z...

Valoarea eforturilor dintr'o bară oarecare k se va determina prin suma:

$$N_k = N_{kp} + X\bar{N}_{kx} + Y\bar{N}_{ky} + Z\bar{N}_{kz}$$

în care $\bar{N}_x$, $\bar{N}_y$, $\bar{N}_z$, sunt eforturile provocate în bară de forța unitară, aplicată pe direcția barei înlăturate corespunzătoare.

Întru cât în raport cu numărul barelor înlăturate, se va introduce în sistem același număr de bare înlocuitoare, ale căror eforturi, potrivit sistemului dat, sunt egale cu zero, atunci pentru determinarea eforturilor necunoscute, numărul ecuațiilor urmează să fie egal cu numărul necunoscutelor, de exemplu:

$$N_p + \bar{N}_{1x} X + \bar{N}_y Y + \bar{N}_{1z} Z + \ldots = 0$$

§ 106. Determinarea deplasărilor

Determinarea deplasărilor la sistemele în spațiu se face în același fel ca și în sistemele plane, utilizând formula lui Mohr-Maxwell, care pentru aplicare la sisteme cu bare articulate are următoarea formă:

$$\Delta_{km} = \sum \frac{\bar{N}_k \cdot N_m}{EF} s.$$

Această sumă se referă la toate barele sistemului în spațiu; $\bar{N}_k$ este efortul în barele întregului sistem provenit din încărcarea unitară, iar $\bar{N}_m$ efortul din bare provenit din sarcinile care solicită sistemul.

Desfășurarea calculului deplasărilor nu cere explicații speciale, deoarece este asemănător cu cel indicat la sistemele plane.

Scanned with OKEN Scanner

1. Linia de influență a momentului și a forței tăietoare dintr'o grindă cu axa înclinată se determină prin ecuațiile:

$$M = \frac{l - x}{l} a; \qquad Q = \frac{l - x}{l} \cos \alpha.$$

2. Linia de influență a forței axiale se determină prin ecuațiile:

$$N = \frac{l - a}{l} \sin \alpha \quad \text{și} \quad N = -\frac{x}{l} \sin \alpha.$$

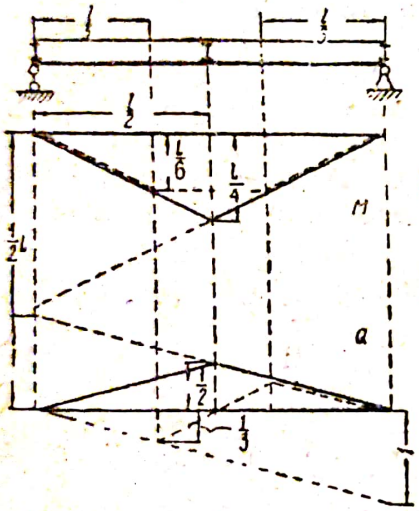


Fig. A

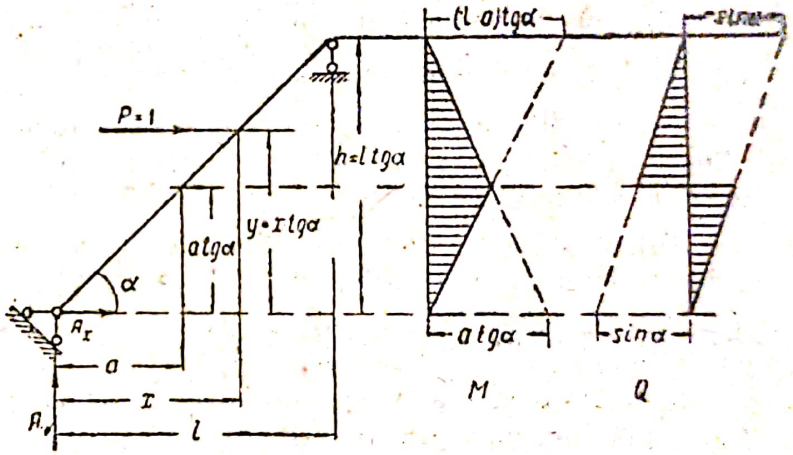


Fig. B

Conturul acestei linii de influență este similar cu acela al liniei de influență a forței tăietoare (fig. A).

3. Când antretoaza se găsește în mijlocul deschiderii

$$M = \frac{ql^2}{8} \text{ și } Q = \frac{ql}{4}$$

iar când se află la treimea deschiderii

$$M = \frac{ql^2}{9}, \; Q = 0$$

In fig. *A* este notat cu linie plină conturul liniei de influență a momentului și forței tăietoare în secțiunea din mijlocul deschiderii, când antretoaza se găsește în mijlocul deschiderii, iar cu linii punctate sunt indicate liniile de influență, în cazul când antretoazele se află la treimea deschiderii.

4. Ecuația componentei reacției de pe reazim este : $A_x = -1$.

Ecuația componentei : $A_y = -B_y = -\frac{y}{l}$.

5. Pentru poziția sarcinii $P = 1$ (fig. B) mai sus de secțiune, ecuația liniei de influență este : $M = a\frac{l-x}{l}$ tg α și a forței tăietoare $Q = \frac{l-x}{l}$ sin α.

6. Ecuația lucrului mecanic care determină linia de influență a legăturii de reazim A_x este :

$$A_x \delta + \delta = 0$$
$$A_x = -1.$$

Ecuația lucrului mecanic, care determină linia de influență a legăturii A_y, se obține din condiția rotirii virtuale a grinzii față de centrul instantaneu k.

$$A_y \vartheta l + 1 \vartheta y = 0$$

8. a). In fig. *C* se arată construirea curbei momentelor ;

b). Se cunoaște relația $Q = \frac{dM}{dx}$; dacă momentele cresc, atunci Q este pozitiv, dacă scad este negativ.

9. a). Sistemul este indeformabil ; elementul *ABE* este legat de pământ cu trei bare *A*, *B* și *EC*, elementul *FH* este fixat prin articulația *F* și legătura *D*.

b). Rezultanta forțelor, din dreapta articulației *E*, trebue să treacă prin articulație și să aibă direcția verticală.

c). Reacțiunea $D = \frac{2}{3} ql$.

Construirea curbei momentelor pe lungimea elementului *FH* se face stabilind mai multe puncte.

$$M = -\frac{q x^2}{2} + \frac{2}{3} ql \left(x - \frac{1}{4} l \right)$$

In secțiunea din dreptul articulației *C* avem :

$$M_c = -\frac{1}{12} ql^2$$

10. Trebue să construim poligonul funicular pentru încărcarea continuă, considerând porțiunea *CD* ca o grindă cu consola *DH*. Latura extremă din dreapta acestui poligon va intersecta, pe verticala din dreptul reazimului *D*, o ordonată egală cu necunoscuta din secțiunea în dreptul acestui reazim ; linia de închidere dusă prin vârful acestei ordonate și prin proiecția articulației *F* pe poligonul funicular, va intersecta pe verticala dusă prin articulația *C* o ordonată, care determină momentul în secțiunea deasupra acestei articulații. Pe deschiderea *ABC*, curba momentelor se construește având ca bază o dreaptă, care se obține prelungind latura extremă din stânga poligonului funicular.

Scanned with OKEN Scanner

12. Articulațiile intermediare se găsesc în punctele de momente zero, deci pe verticalele coborîte din punctele *c*, *e* și *k*. Articulațiile de pe reazime trebue să se găsească în dreptul vârfurilor curbei, ceea ce indică acțiunea forțelor concentrate. Ordonata din dreptul punctului *n* nu poate fi atribuită reacțiunii, deoarece are semnul pozitiv și, deci, indică poziția sarcinii verticale îndreptată în jos. Este evident că articulațiile de reazim ale grinzii se referă la punctele *b*, *f* și *g*. Grinda se găsește sub acțiunea a două sarcini concentrate, care se află în punctele *d* și *n*.

13. Reacțiunea *D* se produce numai în cazul încărcării porțiunii *FH*. Reacțiunea C intră în acțiune numai în cazul când încărcarea se găsește în dreapta articulației *E*. Când sarcina $P = 1$ se găsește în dreapta reazimului C, la distanța x dela *d*, avem:

$$-C\frac{1}{2}l + 1\left(x + \frac{l}{2}\right) = 0$$

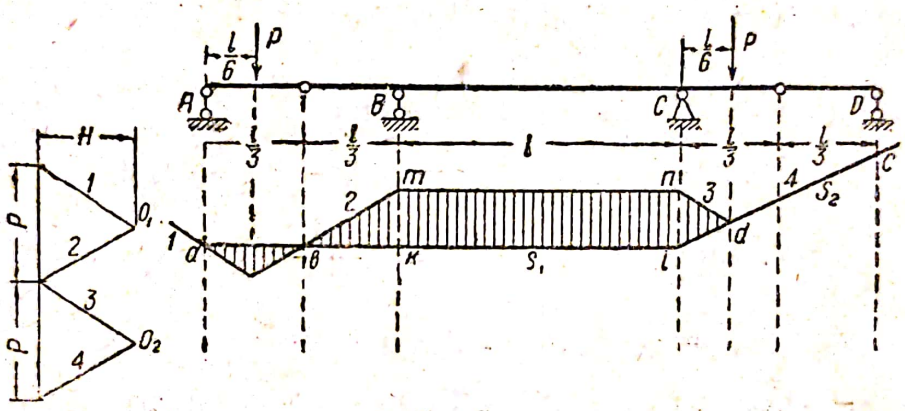


Fig. C

Ecuația liniei de influență a momentului din secțiunea *k*: când sarcina se găsește în stânga articulației *E*, reacțiunile $C = D = 0$, deci $M_k = 0$; când sarcina $P = 1$ se află în porțiunea *EK*, avem $M_k = C\frac{l}{4}$; Prin aceasta se determină ordonata din dreptul secțiunii; ea este egală cu $\frac{l}{8}$; pornind din vârful acestei ordonate, conturul liniei de influență trece prin zero în dreptul reazimului C. Porțiunea *EF* reprezintă un braț de pârghie, care are articulația în punctul *E*.

14. Grinda cu zăbrele este indeformabilă dacă:

a) este alcătuită prin legarea fiecărei articulații cu ajutorul a două bare;

b) două tronsoane indeformab le sunt legate între ele cu o articulație și cu o bară, care nu trece prin această articulație;

c) tronsoanele indeformabile sunt legate între ele cu trei bare, care nu sunt concurente.

Schema 1 este indeformabilă după condiția „*a*”
„ 2 „ „ „ „ „*a*” sau „*a*” și „*b*”
„ 3, 4 și 5 „ „ „ „*a*” și „*b*”

Schema 6 este indeformabilă după condiția „a" și „b"; partea de grindă va fi considerată drept o șaibă.

Schema 7 este indeformabilă după condiția „a" și „c"

„ 8 „ „ „ „ „a" și „b"

„ 9 „ „ „ „ „a" și „c"

15. Direcția barei *ab* trebue să fie schimbată în așa fel, încât să intersecteze direcția elementelor de talpă ale grinzii cu zăbrele.

16. Reacțiunea *A* trebue să treacă prin articulația față de care se determină efortul barei și să se intersecteze cu direcția forței *P* într'un punct comun cu forța *B*.

17. Efortul din elementele tălpilor crește dela stânga spre dreapta, proporțional cu ordonatele curbei momentelor. Eforturile din diagonale sunt egale și își schimbă semnul la mijlocul deschiderii.

18. Pentru barele din jumătatea din stânga grinzii:

$$U_n = -Q_n = \frac{qd^2}{4h}(n-1)\cdot(11-2n);$$

$$D_n = -D'_n = \frac{qd}{8\sin\varphi}(11-4n);$$

$$V_n = -D_n\sin\varphi = \frac{qd}{8}(11-4n);$$

$$V'_n = D_n\sin\varphi - qd = \frac{qd}{8}(3-4n);$$

$$V_3 = -(D_3 - D_4)\sin\varphi = -\frac{qd}{4}.$$

19. Lucrează barele V_3, D_4, V_4, celelalte nu lucrează:

$$V_3 = P;$$

$$D_4 = -\frac{P\cdot\cos\alpha}{\sin(\alpha+\varphi)}$$

$$V_4 = 2\frac{M_4}{h}\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}P$$

în care α și φ sunt unghiurile de înclinare a tălpii superioare și a diagonalei față de orizontală.

20. Valorile eforturilor sunt:

$$U_{6,5} = \frac{P}{\sin\alpha};$$

$$S_{7,8} = -\frac{P(a-d)}{h}$$

$$O_{1,2} = \frac{P(b-d)}{h}$$

$$U_{5,4} = \frac{P(a+2d)}{2h}$$

$$D_{8,3} = D_{8,4} = -\frac{P(a-d)}{2h\sin\varphi}$$

Scanned with OKEN Scanner

21. Barele triunghiului interior nu lucrează când nodurile de pe conturul exterior sunt încărcate. Aceasta rezultă din cercetarea echilibrului triunghiului din mijloc, prin separarea lui prin ajutorul unei secţiuni închise.

22. Sarcinile din noduri sunt : $\frac{1}{6}\ d^2,\ d^2,\ 2d^2,\ \frac{8}{6}\ d^2$.

Pentru construirea epurei lui Cremona nu este necesar să determinăm reacţiunile, însă construcţia trebue verificată după valoarea componentei orizontale a reacţiunii.

23. Incărcările în noduri sunt :

$$\frac{1}{2}\ qd,\ qd,\ qd,\ \frac{1}{2}\ qd,\ A = \frac{9}{4}\ qd$$

Eforturile sunt :

$$O_{3,4} = -\frac{5}{3}\ qd\ ;$$

$$O_{4,5} = -\ qd$$

24. Bara *mn* nu lucrează, aceasta permite suprimarea ei. Efortul din bară se determină uşor din condiţiile de echilibru, în raport cu nodul dela mijloc al tălpii inferioare.

25. Ecuaţia ambelor linii de influenţă se alcătueşte după condiţiile de echilibru faţă de punctele momentelor şi sunt exacte în cazul când se încarcă nodurile inferioare.

26. Construirea liniei de influenţă este făcută după ecuaţia momentelor faţă de punctul de intersecţie a direcţiei tălpii superioare cu cea inferioară.

Ramurile din dreapta şi din stânga liniei de influenţă se intersectează în dreptul punctului momentelor ; ramura din stânga trece prin zero la reazimul din stânga. Nodurile, care suportă încărcarea, se proiectează respectiv pe ramurile din dreapta şi din stânga.

Diagonala nu va lucra când sarcina se găseşte în nodul 5, dacă elementele tălpilor 4 — 5 şi 4′ — 5′ se vor intersecta sub reazimul *A*.

27. In toate barele consolei eforturile din sarcina aşezată în partea din spre reazim sunt egale cu zero.

Când sarcina $P = 1$ se găseşte în partea capătului liber al consolei, ecuaţiile liniilor de influenţă vor fi următoarele :

$$O_3 = \frac{x}{h}\ ;$$

$$D_3 = -\frac{x}{r_3}\ ;$$

$$D_6 = \frac{x}{r_6}\ ;$$

$$D_2 = \frac{1}{\sin\ \varphi}\ ,$$

în care x este distanţa sarcinii unitare dela punctul momentelor.

Scanned with OKEN Scanner

28. Aplicând sarcina P în dreapta secțiunii, ecuația liniei de influență a efortului din montant este

$$V_2 = \frac{x}{2d}$$

în care x este distanța dela sarcina $P = 1$ până la reazim. Când sarcina se găsește în afara părții din stânga, $V_2 = 0$.

Ecuația liniei de influență a efortului din montantul V_3 se determină din condiția de echilibru a nodului superior ; când sarcina se găsește deasupra nodului, ecuația efortului are forma următoare :

$$V_3 = 2 \frac{M_3}{h_3} \operatorname{tg} \alpha - 1$$

în care $\frac{M_3}{h_3}$ este efortul în fiecare element al tălpii superioare, secționat la separarea nodului. Primul termen al ecuației reprezintă linia de influență modificată a elementului din talpă ; al doilea termen se introduce prin scăderea ordonatei egale cu unitatea.

Incărcând nodurile inferioare, linia de influență a efortului din montant se va mări cu lungimea unui panou, iar din linia de influență a efortului în montantul V_3 nu se va mai scădea ordonata unitară.

29. Ecuațiile liniilor de influență ale efortului din barele U_2 și D_2, când sarcina $P = 1$ este aplicată în dreapta nodului 2, vor fi :

$$U_2 = \frac{l - x}{l} \cdot \frac{3d}{2h}$$

$$D_2 = \frac{l - x}{l} \cdot \frac{1}{\sin \varphi}$$

Poziția dreptelor care determină aceste ecuații se găsește pe calea obișnuită. Când sarcinile se transmit numai în nodurile 0, 3 și 6, conturul liniei de influență se schimbă, luând forma unui triunghiu.

30. Linia de influență a efortului din talpă U_4 se determină din ecuația momentelor în raport cu nodul superior.

$$U_4 = \frac{l - x}{l} \cdot \frac{4,5\ d}{h}$$

La construirea ei, nodul 4 trebue să fie proiectat pe linia din dreapta, iar nodul 3 pe linia din stânga (fig. E). Efortul din diagonala D_4 se determină prin ecuația :

$$D_4 = \frac{l - x}{l} \cdot \frac{1}{\sin \varphi}$$

și se construește în mod obișnuit (fig. E). Efortul D_5 se determină prin ecuația :

$$D_5 = \frac{1}{\sin \varphi}$$

31. Incărcând nodurile inferioare ale grinzii cu zăbrele și aplicând sarcina unitară la dreapta secțiunii, liniile de influență se determină prin următoarele ecuații :

$$D_2 = \frac{l - x}{l} \cdot \frac{1}{2 \sin \varphi}$$

$$V_2 = -\frac{1}{2} A + 1$$

$$V'_2 = \frac{1}{2} A.$$

Pentru construirea liniei de influență a efortului D_2, în dreptul reazimului din stânga, trebue să măsurăm ordonata la scara $\frac{1}{2 \sin \varphi}$.

Pentru construirea liniei de influență a efortului V_2, trebue să măsurăm în dreptul reazimului ordonata $-\frac{1}{2}$; în dreptul nodului 2, conturul liniei de influență trebue să fie modificat prin scăderea ordonatei unitare.

Linia de influență a montantului V_0 se determină separând nodul inferior. Când sarcina se găsește înafara nodului de reazim,

$$V_0 = -\frac{l - x}{l},$$

deci, ea se construește în același mod ca și linia de influență a reacțiunii, când sarcina se găsește în nodul de pe reazim:

$$V_0 = -A + 1 = 0.$$

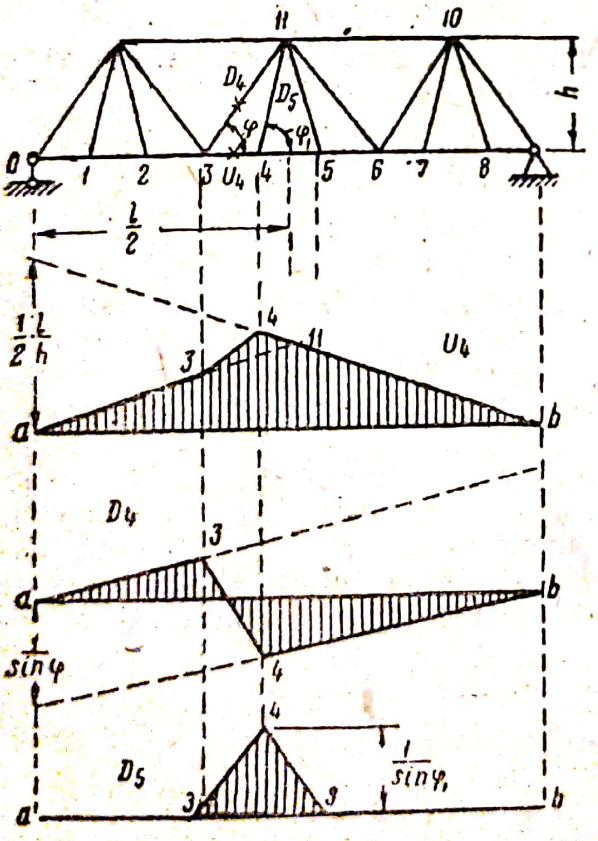


Fig. E

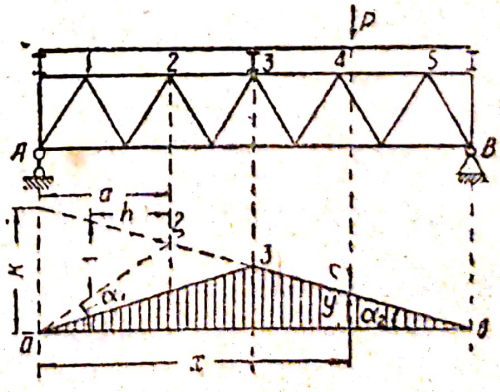


Fig. F

Când transmiterea sarcinilor se face în nodurile superioare, linia de influență a eforturilor din diagonale va rămâne neschimbată, iar

eforturile din montanții V_2 și V'_2 se vor determina prin ecuațiile:

$$V_2 = -\frac{1}{2} A$$

$$V'_2 = \frac{1}{2} A - 1$$

ceea ce are ca urmare schimbarea contururilor și a liniilor de influență, după cum s'a indicat cu linii punctate în fig. F.

Când încărcarea trece în nodul superior, ecuația liniei de influență a montantului V_3 se va scrie astfel:

$$V_3 = -(D'_3 + D'_4) \sin \varphi - 1$$

față de care se va schimba și semnul liniei de influență, însă conturul ei va rămâne același ca și în cazul încărcării nodurilor inferioare.

32. Aplicând sarcina egală cu unitatea la dreapta nodului 9, ecuația liniei de influență a efortului se va scrie astfel:

$$U_{0,1} = A \frac{1}{\sin \alpha};$$

$$O_{10,9} = A \frac{(h - h_0)}{h \operatorname{tg} \alpha};$$

$$S_{12,13} = -A \frac{h_0}{h \operatorname{tg} \alpha}$$

Pentru construirea ramurii din dreapta, trebue să măsurăm în dreptul reazimului din stânga următoarele ordonate:

$$U_{0,1} = \frac{1}{\sin \varphi} \qquad O_{10,9} = \frac{h_0 - h}{h \operatorname{tg} \alpha}$$

$$S_{12,13} = -\frac{h_0}{h \operatorname{tg} \alpha}$$

iar în dreptul reazimului din dreapta, ordonatele vor fi egale cu zero.

In linia de influență $U_{0,1}$ ramura din stânga este paralelă cu cea din dreapta. In liniile de influență $O_{10,9}$ și $S_{12,13}$ ramurile din dreapta se intersectează cu cele din stânga, pe verticalele din dreptul punctelor momentelor.

33. Suprimând o bară oarecare din jumătatea din stânga grinzii, deplasarea liniei de încărcare se va caracteriza printr'o frângere, lângă antretoaza dela mijloc; diagramele deplasărilor vor fi asemănătoare, scările lor însă trebue să se determine după liniile inițiale de influență. De exemplu, scara liniei de influență a efortului U_2 se determină prin condiția (fig. F):

$$-U_2 \delta + Py = O$$

$$U_2 = \frac{Py}{h (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2)}$$

34. Considerând ca poziție inițială dreapta care caracterizează deplasarea elementului *I* și care trece prin punctul *e* 1, găsim poziția dreptei care caracterizează deplasarea elementului *II* după punctele de proiecție *I* — 2 și *e*2; dintre acestea primul punct se determină fiind

proiecția centrului ce se găsește la intersecția elementelor *III* și *IV*. Poziția centrului *eIII* se determină prin procedeul arătat în fig. 153, deci cu ajutorul unei construcții auxiliare, prin care se determină poziția centrelor 3 — 4 și *E*4 (primul din aceste centre se determină după poziția elementelor *III* și *IV*, iar al doilea după poziția centrelor *EI*, *I* — *IV* și *EII*, *II* — *IV*).

35. Linia dreaptă care caracterizează deplasarea elementului *I* se duce arbitrar prin punctul *e*1, care se găsește pe abscisă; proiecțiile centrelor *e*2 și *e*3 se află pe axa absciselor. Dreapta care caracterizează deplasarea elementului *II* se confundă cu axa absciselor, care se determină prin condiția:

$$Dr\ \alpha + 1\ x\ \alpha = 0 \qquad D = -\frac{x}{r}$$

în care α este unghiul de înclinare al dreptei, care caracterizează deplasarea elementului *I*; r — brațul de pârghie al diagonalei față de polul *IE* și x — brațul de pârghie al forței $P = 1$, considerat față de același centru.

36. Poziția centrului *I* — *IV* se stabilește prin intersecția dreptelor *af* și *bc*, iar centrele *II* — *III* se determină prin întretăierea dreptelor *EI* — *I* — *IV* și *EII* — *II* — *IV*. Poziția centrului *EIV* se determină prin intersecția dreptelor *EI* — *I* — *IV* și *EII* — *II* — *IV*. In mod analog se stabilește și poziția centrului *EIII*. Scara liniei de influență în acest caz se determină cel mai simplu din condiția ca la poziția sarcinii $P = 1$ în nodul *f*, deformația montantului, provocată numai de presiunea acestei sarcini, se determină pe epura liniei de influență prin ordonata 1 — 2 — 3 — 4 egală cu unitatea scării liniei de influență.

37. In această grindă cu zăbrele, proiecțiile centrelor *EI* și *I*—*II* coincid; de asemenea coincid și proiecțiile centrelor *II* — *III* și *E* — *III*; ele se găsesc toate pe axa absciselor. Construcția trebue începută pornind dela poziția dreptei care caracterizează deplasarea elementului 1 și trece prin punctul 1 — 2.

38. Montantul V_2 intră în compunerea grinzilor auxiliare în nodurile principale 0, 2 și 4.

Incărcarea trebue să fie raportată la aceste noduri; $V_2 = 2\ qd$.

Elementul din talpă $O_{3,4}$ intră în compunerea schemei principale 0 — 8 — 4 și a grinzii auxiliare 0 — 4 — 2. In nodurile 0,4 și 8 ale grinzii principale, încărcările se transmit cu ajutorul grinzilor auxiliare din toate celelalte noduri, iar grinzile auxiliare primesc încărcarea din toate nodurile ei.

$$O_{3,4} = -\frac{q}{h}(4d - 2d)\ 4d -$$

$$-\frac{2q}{h}\left[(2d = \frac{1}{2}d)\ 3d - 2d^2 - d^2\right] = -11\frac{qd^2}{h}$$

Se poate proceda și în alt mod, descompunând sarcina din grinda auxiliară în așa fel, încât să se concentreze în nodurile 0,2 și 4.

$$O_{3\ 4} = -\frac{q}{h}\left[(4d - 2d)\ 4d - (2d - d)\ 2d\right] = -11\frac{qd^2}{h}$$

Elementul din talpă U_{0-4} intră numai în compunerea grinzii principale: toată sarcina ei se transmite în nodurile 0, 4 și 8:

$$U_{0\,4} \cos \alpha = \frac{1}{h}\, 8qd^2$$

39. Cu toate că elementele O_6 și D_5 intră în alcătuirea grinzii auxiliare, liniile lor de influență se determină prin ecuația de echilibru, după secționarea a trei bare ale grinzii cu zăbrele:

$$O_6 = \frac{-M_6}{h} = \frac{l-x}{l\ h}$$

$$D_5 = \frac{Q}{\sin \varphi} = \frac{l-x}{l \cdot \sin \varphi}$$

Ambele linii de influență se construesc pe cale obișnuită, extinzând însă ramura din dreapta până la nodul încărcat 5.

Elementul diagonalei D_5 intră numai în compunerea schemei principale, pentru care nodurile de încărcare sunt nodurile cu soț. Ecuația liniei de influență este

$$D_6 = \frac{l-x}{l \cdot \sin \varphi}$$

Dreptele care formează linia de influență se limitează prin nodurile 4 și 6.

Montantul V_4 intră numai în compunerea schemei principale. Construind prin metodele obișnuite conturul liniei de influență a montantului, ca și pentru un element de grindă cu zăbrele cu tălpi paralele, acest contur trebue corectat prin proiectarea asupra lui a nodurilor de încărcare 3 și 5.

Efortul în montantul V_6 se determină din ecuația:

$$V_6 = (S_6 + S_7) \sin \alpha .$$

Ambele eforturi S_6 și S_7 se produc numai când nodurile 5 și 7 sunt încărcate.

40. Elementul U_{4-5} al tălpii inferioare intră în compunerea schemei principale și a grinzii auxiliare.

1. Prin separarea grinzilor auxiliare și transmiterea sarcinilor din ele asupra nodurilor cu soț 0,2,4,6 etc.

$$U_{4-5} = \frac{qd}{h}\left[8 \cdot 6d - 6d - 2 \cdot 4d - 2 \cdot 2d\right] + \frac{1}{2}\, qd^2\, \frac{2}{h} = 31\, \frac{qd^2}{h}$$

2. Intru cât secțiunea taie elemente ale grinzii, grinda auxiliară poate să nu fie suprimată, considerând tot sistemul ca un sistem simplu, încărcat în toate nodurile.

$$U_{4-5} = \frac{qd}{h}\left[8 \cdot 6d - \left(\frac{1}{2} \cdot 6d + 5d + 4d + 3d + 2d\right)\right] = 31\, \frac{qd^2}{h}$$

Elementul de diagonală D_{4-5} intrând în compunerea schemei principale și a grinzii auxiliare, se pot întrebuința ambele metode de mai sus.

Scanned with OKEN Scanner

In cazul când încărcarea este împărțită la toate nodurile

$$D_{4-5'} \sin \varphi = -\left(8 - \frac{1}{2} - 4\right) qd = -3{,}5\, qd\,.$$

Diagonala $D_{5'-6'}$ intră numai în compunerea schemei principale; încărcarea trebue să fie raportată la nodurile schemei principale.

$$D_{5'-6'} \sin \varphi = -(8 - 1 - 2 \cdot 2)\, qd = -3\, qd.$$

Suprafața liniei de influență va fi:

$$D_{5'-6'} \sin \varphi = -\left(\frac{1}{2} \cdot 16\, d \cdot \frac{10}{16} - \frac{1}{2} \cdot 6\, d \cdot \frac{4}{6}\right) = -3d\,.$$

41. Elementul diagonalei D_4 intră în compunerea schemei principale și a grinzii auxiliare 2-3-5. Prin separarea grinzii auxiliare, linia de influență se va determina prin ramurile principale limitate de nodurile 2 și 5 și cu o linie de trecere între aceleași noduri. Existența grinzilor auxiliare impune rectificarea conturului prin proiectarea nodului 3 pe ramura principală din stânga, iar nodul 4 care se găsește la dreapta secțiunii va rămâne pe conturul grinzii principale.

Elementul D_5 al diagonalei intră în compunerea schemei principale și a două grinzi auxiliare 2-3-5 și 2-4-5 și din această cauză același contur principal al liniei de influență trebue să fie rectificat prin proiectarea pe ramura din stânga a nodurilor 3 și 4.

Montantul V_6 intră numai în alcătuirea grinzii principale având nodurile de încărcare 0,2,5,8 etc; grinda auxiliară 5-6-7-8 este un fel de grindă de transmitere la nodurile 5 și 8. Linia de influență se construește pe calea obișnuită, limitând ramurile principale prin nodurile 5 și 8.

42. Dacă nu era triunghiul suplimentar, linia de influență a efortului din bara O_3 ar fi fost de formă triunghiulară cu vârful retezat în dreptul proiecțiilor nodurilor 2 și 4; însă existând acest triunghiu suplimentar se creează un nod de încărcare în dreptul punctului de momente al efortului O_3, de aceea linia de influență a acestui efort va avea forma triunghiulară cu vârful în dreptul nodului 3.

In cazul când nu ar fi existat triunghiul suplimentar, linia de influență a diagonalei D_5 s'ar fi compus din două triunghiuri cu vârfurile în dreptul nodurilor 2 și 4. Existența acestui triunghiu suplimentar creează nodul de încărcare 3 și linia de influență a diagonalei va fi alcătuită din două triunghiuri cu vârfurile în dreptul nodurilor 2 și 3.

Bara S lucrează numai atunci când sarcina se găsește în nodul 3, de aceea linia ei de influență se extinde numai pe lungimea a două panouri și are forma triunghiulară cu ordonata maximă $S = \frac{d}{h}$ în dreptul nodului 3 (h fiind înălțimea grinzii cu zăbrele).

43. Suprafețele liniilor de influență ale eforturilor din bara U_4 variază în următoarele raporturi.

$$F_4 : F_2 : F_1 = 2 : 3 : 3{,}5$$

F_1 este suprafața secțiunii atunci când în sistem nu sunt grinz auxiliare.

Suprafețele liniei de influență din montanți variază în următoarele raporturi.

$$F_4 : F_2 : F = 4 : 2 : 1.$$

44. Bara U_4 este o bară mixtă (complexă). Dacă nu era grinda auxiliară, care alcătuește această bară, linia de influență s'ar fi determinat prin expresia $U_4 = M_4 : h$ și ar fi fost trasată după un triunghiu cu vârful retezat. Același element considerat ca element al grinzii auxiliare, la încărcare va suporta un efort determinat prin ecuația

$$U_4 = M' \cdot h_1 ;$$

și linia de influență a acestui efort are un contur triunghiular cu vârful n în dreptul nodului respectiv al grinzii auxiliare.

Efortul total din bară va fi:

$$U_4 = \frac{M_4}{h} - \frac{M'}{h_1}$$

ceea ce va aduce în linia principală de influență scăderea din ea a triunghiului suplimentar cu ordonata mn.

45. Suprimând bara 9-8 din grinda cu zăbrele, reprezentată în fig. 193 a, barele înlocuitoare pot fi barele 5-3; 5-7; 5-2, dacă vom îndepărta succesiv nodurile: 8, 9, 4, 0.

Dacă suprimăm bara 8-9 din grinda cu zăbrele, înfățișată în fig. 193 b, barele înlocuitoare pot fi barele 1-8; 0-8; 0-5 și altele. Trebue să ținem seama că nodurile 3 și 6 sunt duble.

46. Eforturile din barele suprimate sunt:

$$S_{2-3} = \frac{P \cdot \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$$

$$S_{4-5} = \frac{S_{2-3}}{2 \sin \alpha}$$

$$S_{0-3} = \frac{-S_{2-3}}{2 \sin \alpha}$$

47. Efortul din bara suprimată va fi

$$S_{1-8} = \frac{\frac{20}{6} P}{-\frac{1}{6}\left(12 + \frac{3}{8} 10\right)} = \frac{-80}{63} P.$$

48. Indeformabilitatea schemelor a și b fig. 196 se stabilește ușor prin metoda înlocuirii barelor. Exagonul din mijloc din schema a este asemenea cu exagonul din problema 44, iar exagonul 1-2-3-4-5-6 din schema b este asemenea cu conturul exagonal din problema 45.

Indeformabilitatea acelorași scheme și a schemei a din fig. 193, se determină ușor din poziția celor trei centre; în schema a fig. 193 ca unul din elementele indeformabile trebue să considerăm bara 4-8; în schema b fig. 196 urmează ca unul din elementele indeformabile să fie considerată bara 3-6; în schema c fig. 196, va fi considerată bara 3-7.

Indeformabilitatea schemei b din fig. 193 și a schemei d din fig. 196 se stabilește ușor examinând diagrama viteselor.

Scanned with OKEN Scanner

In schema c fig. 196 se vede conturul diagramei viteselor virtuale, construită față de triunghiul 0-1-8, considerat ca fix.

Dacă în schema b fig. 196, barele 2-3 și 3-4 sunt paralele cu barele 1-7 și 7-5, grinda va fi deformabilă.

49. Schema *a* fig. 197 este indeformabilă.

Schema *b* este deformabilă, ceea ce se determină ușor prin metoda înlocuirii barelor. Dacă suprimăm bara 1-5 și o înlocuim cu bara 6—4 din sistemul inițial, efortul în această bară, când încărcarea acționează pe direcția barei 1-5, este egal cu zero.

50. Dacă considerăm că bara 0-5 este un element fix și alegem vitesa virtuală pentru nodul 4-4′ aceea a nodului 4, atunci efortul în bara S_{3-2} va fi determinat prin expresia:

$$S_{3\ 2} = \frac{P\ (4\text{-}4')\ \cos\alpha - \frac{1}{2} P\ (2\text{-}2')\ \cos\alpha}{[\ (3\text{-}3') - (2\text{-}2')\ ]\ \cos\alpha}$$

51. Dacă construim diagrama viteselor virtuale, considerând tronsonul 3-4-10-2 drept un element fix și alegând vitesa I-II, efortul din bara 7-8 va fi determinat prin expresia:

$$S_{7-8} = \frac{\frac{2}{3} P\ (0\text{-}0') + P\ (1—1')}{Z'_8 - Z'_7}$$

52. Incărcarea se transmite la nodurile inferioare. Linia de influență a eforturilor în montantul V_3 se determină astfel:

a) când sarcina se găsește în partea din dreapta: $V_3 = -A$; de aceea $mn = 1$ în dreptul articulației de reazim;

b) încărcând partea din stânga, $V_3 = -B$, iar ordonatele în reazimul din stânga și în cel din dreapta sunt egale cu zero.

Linia de influență a montantului V_{11} se determină precum urmează:

a) când sarcina este aplicată în partea din dreapta $V_{11} = 1 - g$ (g fiind o valoare constantă);

b) pentru încărcarea în partea din stânga $V_{11} = 0$.

Transferarea sarcinilor din nodurile superioare în nodurile inferioare va schimba conturul numai prin proiectarea pe el a altor noduri.

Linia de influență a diagonalei D_{11} se determină prin ecuația:

$$D_{11} = -\frac{Q}{\sin\varphi}$$

și în general este reprezentată ca de obiceiu prin două drepte paralele.

54. In fig. G sunt reprezentate liniile de influență ale eforturilor D_6, U_4 și D_{15}.

Efortul în montantul V_3 se determină prin separarea nodului:

$$V_3 = -A + \frac{M_3}{h}\ (\text{ctg}\ \beta + \text{ctg}\ \alpha)$$

Atât timp cât sarcina se găsește în partea din dreapta, elementele din talpă U_3 și U_4 nu lucrează și efortul $V_3 = -A$ și $ik = 1$. Când

sarcina trece în consolă, efortul în montant se determină prin ecuația de mai sus; când $x = l$, ordonata:

$$mn = -\frac{l + l_1}{l} + \frac{l}{h}(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha)$$

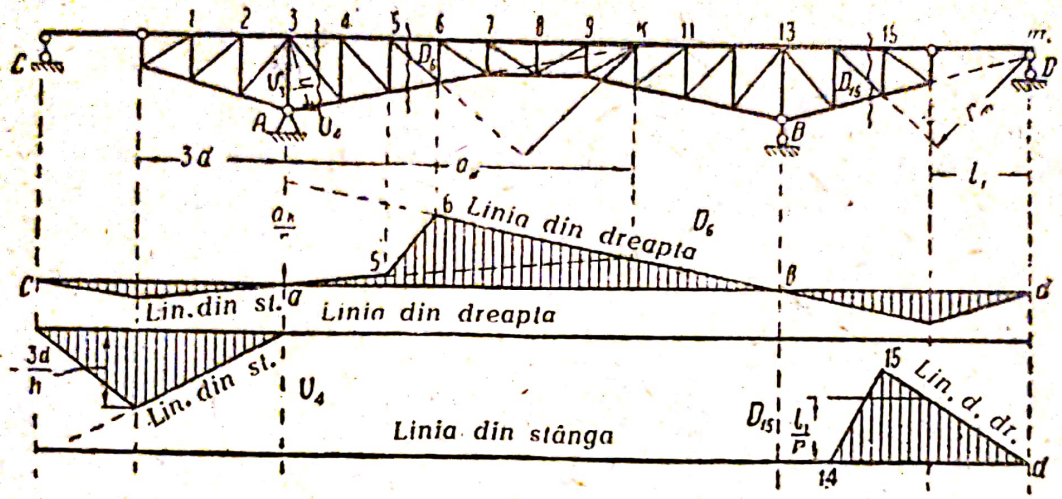


Fig. G

55. Efortul în montantul V_3 se determină din echilibrul nodului de pe reazim; când sarcina unitară se găsește în afara nodului de reazim, efortul în montantul $V_3 = -A$; cu aceasta se determină conturul liniei de influență care are în dreptul reazimului din stânga ordonata: $bf = 1$. Când sarcina calcă pe reazim, efortul în montantul $V_3 = -A + 1$; în această situație ordonata din reazimul din stânga devine egală cu zero.

Linia de influență a efortului în montantul V_2 se determină prin ecuația:

$$V_2 = -2\frac{M_2}{h}(\operatorname{tg}\beta_1 - \operatorname{tg}\beta_2)$$

Intru cât efortul în montant se determină prin momentul din secțiunea consolei, linia de influență a efortului din montant se extinde pe porțiunea 0 — 2 a consolei.

56. Reacțiunea din reazimul C lucrează numai atunci când sarcina se găsește în dreapta articulației E; față de aceasta, sarcina care se găsește în stânga articulației E, nu provoacă niciun efort în montantul V_n.

Când sarcina se găsește între montantul V_k și articulația F, efortul în montant este constant $V_k = 1$ și $ik = 1$; în dreptul reazimelor C și D ordonatele liniei de influență sunt egale cu zero.

Ordonata $$mn = -1\frac{l}{2\,l_1}$$

Linia de influență a efortului în montantul V_n se determină astfel:

a) când sarcina se găsește între articulația E și montant, rezultă din condițiile de echilibru ale părții din dreapta că $V_n = -C$;

b) dacă sarcina se află în dreapta secţiunii, atunci din echilibrul aceleiaşi părţi rezultă că

$$V_n = -C + 1.$$

Din ambele expresii se vede că linia de influenţă este compusă din două linii paralele, dintre care cea din stânga trece prin zero în dreptul articulaţiei F şi are ordonata egală cu 1 sub reazimul C.

Ordonata $$mn = -1 \cdot \frac{l}{2\,l_1}$$

58. Sistemul reprezentat în fig. 221 este indeformabil, deoarece legătura din reazimul al treilea este înlocuitoare faţă de diagonală suprimată. Sistemul din fig. 222 este îndeformabil, întru cât în fiecare din reazimele dela mijloc există o bară înlocuitoare faţă de bara respectivă suprimată din conturul în formă de patrulater din interiorul grinzii.

59. Centrul AB de deplasare virtuală a elementului din stânga faţă de pământ se găseşte la întretăierea lui A cu B_1 iar centrul BC al deplasării virtuale a elementului din stânga faţă de pământ se află la intersecţia dreptei AB — S cu direcţia barei B_2. Dacă direcţia legăturii C va trece prin pol, atunci sistemul va fi deformabil (trei articulaţii în linie dreaptă).

60. In fig. 224 este reprezentată schema incompletă de construire a diagramei viteselor pentru deplasarea separată a părţii din stânga şi din dreapta a sistemului; punctele răbătute obţinute III' şi III'' s'au deplăsat de pe verticala punctului III, ceea ce arată că sistemul este indeformabil.

62. Suprimăm legătura de reazim B. Polul $E\,IV$ se găseşte la intersecţia dreptei IE — I — IV cu verticala reazimului C; iar polul EII la intersecţia dreptelor EI — I — II şi EIV — II — IV. Proiectând polul EII se stabileşte punctul zero al liniei de influenţă pentru reacţia B (vezi fig. 230); scara acestei linii de influenţă se determină prin ordonata egală cu unitatea în dreptul reazimului B.

63. Articulaţiile S_1 şi S_2 fiind aşezate simetric, sistemul va fi deformabil, întru cât un număr de trei legături vor trece printr'un punct comun.

64. Aceasta va avea loc atunci, când elementele, din talpă din panoul unde s'a suprimat diagonala se intersectează pe linia articulaţiilor reazimelor.

65. Sistemul compus din trei arce, reprezentat în fig. 241 poate fi făcut static determinat introducând cinci articulaţii, dintre care în arcele extreme pot fi aşezate câte două sau o singură articulaţie. Să se explice ce fel de arce se vor obţine în acest caz.

66. Latura mijlocie a poligonului trebue să treacă prin articulaţia din mijloc; poziţia celorlalte laturi se determină prin punctele de intersecţie ale acestor laturi cu forţele şi punctele de reazim.

67. Impingerea este:

$$H = \frac{q\,l^2}{16\,f};$$

Scanned with OKEN Scanner

iar momentul în sfertul deschiderii :

$$M = \frac{q\,l^2}{64}\,.$$

Poziţia curbei de presiune se determină prin următoarele segmente :

în sfertul din stânga : $\eta = \frac{1}{4} f$;

iar în sfertul din dreapta : $\eta = -\frac{1}{4} f$

68. Înclinarea tangentei în secţiunea din sfertul deschiderii este :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\,f}{l}$$

Momentul M şi forţa normală N din aceeaşi secţiune sunt :

$$M = \frac{ql^2}{64} \text{ şi } N = \frac{q\,l}{8 \sin \varphi}\,;$$

Poziţia curbei de presiune din secţiune este :

$$\eta = \frac{l}{8} \sin \varphi\,.$$

69. Reacţiunile din reazim ale arcului sunt :

$$V_a = p\,r \sin \varphi_0\,; \qquad H = p\,r \cos \varphi\,.$$

Momentul într'o secţiune oarecare a arcului este :

$$M = p\,r^2 \sin \varphi_0\,(\sin \varphi_0 - \sin \varphi) - p\,r^2 \cos \varphi_0\,(\cos \varphi - \cos \varphi_0) - \int_0^{\varphi_0} p\,r^2 \sin (\alpha - \varphi)\,dx = 0.$$

Eforturile interioare în toate secţiunile sunt :

$$N = pr\,;\ Q = 0.$$

70. Asupra arcului acţionează o sarcină $P = 2t$

71. In schema *a* (fig. 253) ordonata este : $m\,n = -\frac{1}{8}\,p\,b$

In schema *b* avem ordonatele :

$$m\,n = -\frac{1}{4}\,q\,h^2 \text{ şi } ki = \frac{q\,h^2}{4}$$

In schema *c* ordonatele sunt :

$$mn = -\frac{M}{3} \text{ şi } ki = -\frac{M}{6}$$

Pentru schema *a* se poate construi epura cunoscând numai ordonata *mn* ; în acest scop trebue să determinăm poziţia punctului zero. Existenţa punctului zero se explică prin faptul că rezultanta componentelor reacţiunii din reazimul din stânga trece prin acest punct.

72. Din schemele cadrelor fig. 254 b, avem:
ordonatele în epura lui Q:

$$mn = \frac{1}{4} qh \; ; \qquad m\,k = -\frac{qh^2}{2\,b}$$

ordonatele în epura lui N:

$$ki = \frac{q\,h^2}{2b} \; ; \qquad k\,l = -\frac{qh}{4}$$

Din schemele cadrelor fig. 254, c:
ordonatele în epura lui Q:

$$mn = -\left(\frac{M\,\cos\alpha}{b} + \frac{M\,\sin\alpha}{3h}\right) \; ;$$

$$ki = -\left(\frac{M\,\cos\alpha}{b} - \frac{M\,\sin\alpha}{3\,h}\right) \; ;$$

ordonatele în epura lui N:

$$mn = \left(\frac{M\,\sin\alpha}{b} - \frac{M\,\cos\alpha}{3\,h}\right) \; ;$$

$$ki = -\left(\frac{M\,\sin\alpha}{b} + \frac{M\,\cos\alpha}{3\,h}\right) \; .$$

73. Linia de influenţă a împingerii este un triunghiu simetric, cu vârful în dreptul articulaţiei din mijloc; suprafaţa lui se împarte în două jumătăţi egale F.

74. Linia de influenţă a momentului are întotdeauna o frângere în dreptul secţiunii alese, iar linia de influenţă Q are o discontinuitate (salt) în acest punct; de aci rezultă că liniile de influenţă construite se referă la secţiunea care se găseşte în dreptul vârfului din dreapta liniei de influenţă a momentului $M = B_a - Hy_k$

Scara liniei de influenţă se determină prin ordonatele ei în dreptul reazimului din dreapta şi este egală cu abscisa a reprezentând distanţa dela secţiune până la reazimul din dreapta.

Forţa tăietoare din secţiune este:

$$Q = -(V_B \cos\varphi - H \sin\varphi)$$

Scara ei se determină prin ordonata din dreptul reazimului din dreapta, egală cu: $\cos\varphi$.

75. Linia de influenţă este bine construită; poziţia punctului zero se determină prin intersecţia dreptei BS cu dreapta $AS \parallel mn$ şi coincide cu articulaţia S'; de aceea, ramura din dreapta a liniei de influenţă se confundă cu axa absciselor.

76. Linia de influenţă este construită corect. Din figură rezultă că linia BS este paralelă cu secţiunea transversală a arcului. Când sarcina $P = 1$ se găseşte în stânga secţiunii, reacţiunea B este îndreptată după direcţia BS şi proiecţia ei pe normala faţă de secţiunea arcului este egală cu zero.

Când sarcina se găseşte pe porţiunea kS, atunci:

$$N_k = V_B \sin\varphi - H \cos\varphi - 1 \sin\varphi = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ordonata liniei de influență în această porțiune este constantă și egală cu $-1 \cdot \sin \varphi$.

77. Ambele linii de influență M și Q sunt reprezentate în fig. H.

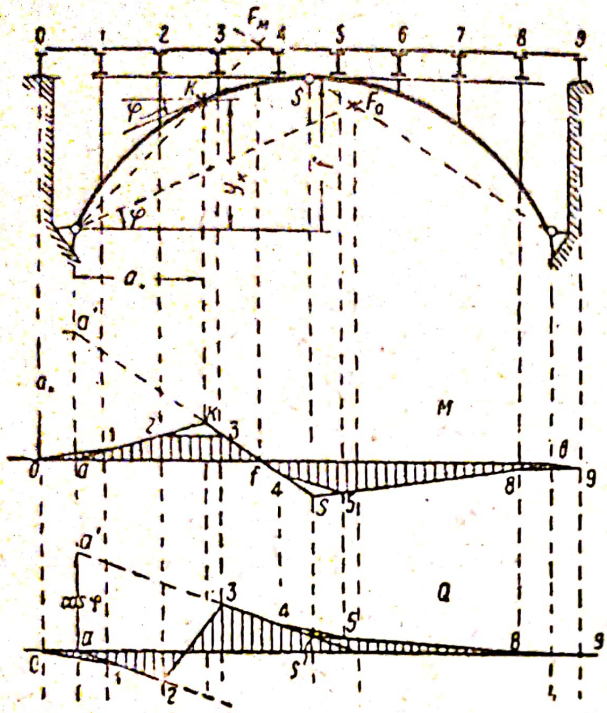


Fig. H

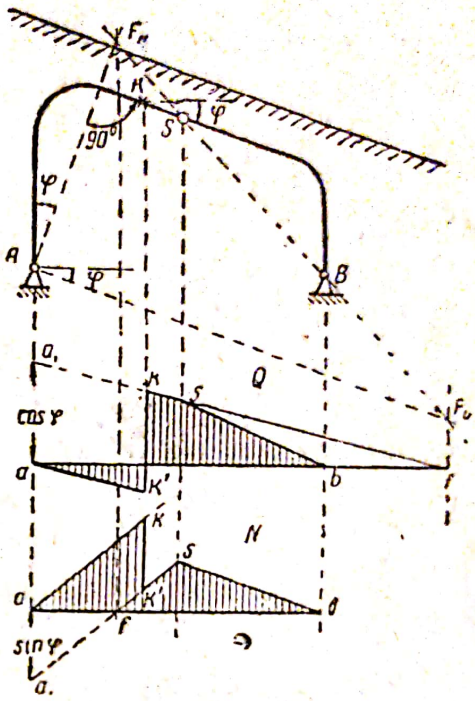


Fig. J

78. Impingerea arcului este:

$$H = \frac{M_8}{f - \operatorname{ctg} \alpha}$$

Curba momentului din secțiunea m este:

$$M_m = M^0_m - H\,(y_m - a_m \operatorname{tg} \alpha)$$

Poziția punctului zero se determină din raportul

$$\frac{l - u_m}{u_m} \cdot \frac{(f - \operatorname{ctg} \alpha)}{l_2} = \frac{y_m - a_m \operatorname{tg} \alpha}{a_m}$$

Pentru determinarea poziției punctului zero, trebue să măsurăm dela bara $A_1 B_1$ o ordonată egală cu $m'n' = mn = y_m - a_m \operatorname{tg} \alpha$.

Prin vârful acestei ordonate m' și prin punctul A se duce o dreaptă până la intersecția cu direcția $B_1 S$, prin care se determină punctul F, a cărui proiecție va indica poziția punctului zero.

79. Construcția liniei de influență Q și N se vede în fig. J.

80. Toată sarcina se transmite prin talpa orizontală a nodului de lângă articulația intermediară.

Impingerile sunt:

$$H_A = -\frac{1}{6} T\,l\,; \quad H_B = \frac{1}{3} T\,l\,, \quad V_A = -\frac{2}{3} T\,f$$

iar eforturile:

$$U_{3-4} = \frac{1}{h}\left[-\frac{2}{3} T \frac{l^2}{4} + \frac{1}{6} T \, lf\right]$$

$$D_{3-3'} = \frac{1}{\sin \varphi} \left(\frac{2}{3} T \, f \cos \alpha - T \cdot \frac{l \sin \alpha}{6}\right);$$

81. Incărcând jumătatea din stânga:

$$D_5 \cdot r = \frac{3}{8} q \, l \, \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{16} - q \, d^2 \left(\frac{1}{2} 6 + 5 + 4 + 3\right) = \frac{1}{48} ql^2$$

$$D'_5 = 0.$$

în care r este brațul de pârghie față de articulația S.

82. Separând nodul $1'$ al tălpii superioare rezultă că diagonala D_2 lucrează numai la transmiterea sarcinilor asupra acestui nod. Efortul în diagonala D_3 se determină din expresia momentului față de intersecția elementelor din talpă, secționate; acest punct se găsește în limitele punctului $0 - 1'$:

$$D_3 = \frac{1}{r}(V_a - H_y).$$

Poziția punctului zero al liniei de influență se determină prin intersecția dreptelor $O - 1'$ și $B - S$. Ordonata ramurii din dreapta în dreptul reazimului din stânga este egală cu $\frac{a}{r}$.

Efortul în diagonala D_4 se determină din momentul în raport cu punctul k (intersecția tălpilor secționate) care se găsește în limitele panoului $3 - 4$, ceea ce face ca ramura din stânga a liniei de influență să aibă același semn.

Efortul din diagonala D_3 se determină din expresia momentului față de articulația S. In cazul de față poziția punctului zero al liniei de influență se confundă cu proiecția punctului momentelor și cu poziția articulației S; din această cauză partea din stânga a liniei de influență dela 0 până la 3 și partea din dreapta dela S până la B se confundă cu axa absciselor.

83. Conturul liniei de influență arată că efortul caracterizat de această linie se exprimă în funcție de moment față de nodul 6, deoarece în dreptul acestui nod se intersectează ramura din dreapta și din stânga a liniei de influență. Linia de influență determină efortul din al șaptelea element al tălpii superioare.

Scara ei se determină prin ordonata din dreptul reazimului din dreapta:

$$y = \frac{2}{2{,}5\left(1 - 0{,}3\frac{f}{d}\right)}.$$

Intru cât talpa inferioară este o parabolă, suma suprafețelor părții negative și a celor pozitive trebue să fie egală cu zero.

84. Trebue să construim mai întâi linia de influență a efortului O_3 în ipoteza că încărcarea se transmite la toate nodurile; în acest caz

ramurile din dreapta și din stânga se vor intersecta în dreptul nodului 3; poziția punctului zero al liniei de influență va fi determinată ca proiecția punctului de intersecție al dreptelor 0-3 și *B-S*. După ce vom construi linia de influență în această ipoteză trebue să o transformăm, proiectând nodurile pe dreptele respective, care formează conturul liniei de influență.

85. Prin mutarea tirantului dela nivelul reazimului la nivelul nodurilor 1 și 9, împingerea crește de 1,5 ori. In fig. *K* sunt reprezentate în comparație liniile de influență ale eforturilor din barele O_2 și V_2. Cu linii pline este arătat conturul liniei de influență când tirantul se găsește la nivelul nodurilor 1 și 9, iar cu linii punctate, când se află la nivelul reazimelor. Când tirantul se găsește la nivelul nodurilor 1 și 9, bara 0-1 a tălpii inferioare, bara 0'-1' a tălpii superioare precum și simetricele acestor bare, vor lucra ca și barele unei grinzi simple cu zăbrele.

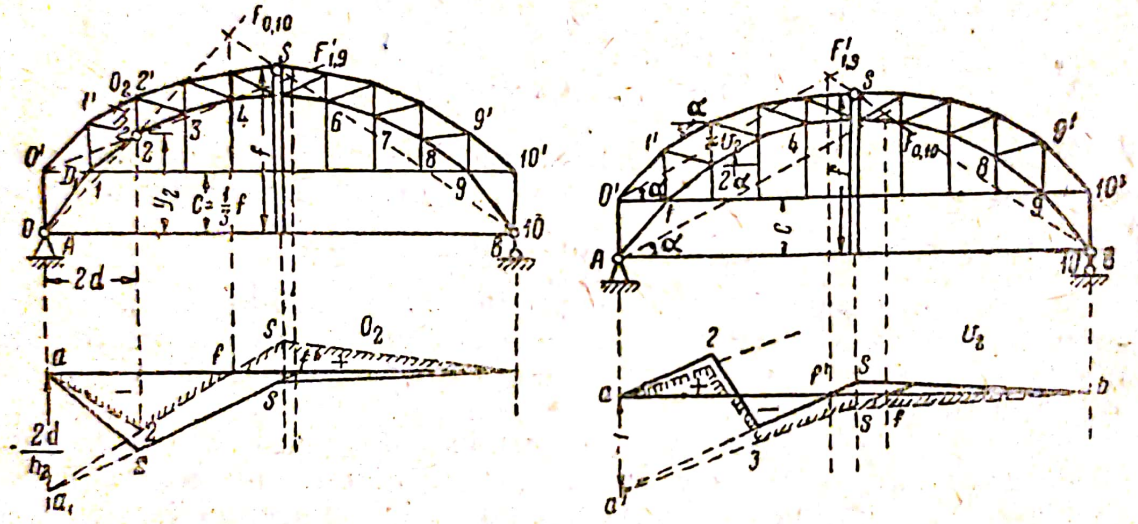


Fig. K

86 Intru cât elementele tălpii sunt parelele și orizontale, efortul din diagonale se determină prin ecuația:

$$D = \frac{Q}{\sin \varphi}$$

în care φ este unghiul de înclinare al diagonalei față de orizontală. Linia de influență a eforturilor se construește în același mod ca și în cazul unei grinzi simple.

87. In calcule, întreg sistemul trebue să fie considerat ca două cadre cu trei articulații, având fiecare câte o consolă, pe care reazimă al treilea cadru prin trei articulații.

Reacțiunile din reazim ale cadrului superior cu trei articulații sunt:

$$A' = \frac{3}{8} q\, b, \qquad B' = \frac{1}{8} q\, b, \qquad H' = \frac{1}{4} q\, b.$$

Reacţiunile din cadrul din stânga cu trei articulaţii sunt:

$$V_a = \frac{21}{32} qb, \qquad V_b = \frac{31}{32} qb,$$

$$H_a = \frac{13}{48} qb, \qquad H_b = \frac{-1}{48} qb.$$

Reacţiunile din cadrul din dreapta cu trei articulaţii sunt:

$$V_c = -\frac{1}{8} q\ b, \qquad V_d = \frac{1}{4} q\ b,$$

$$H_c = -\frac{1}{12} q\ b \qquad H_d = \frac{-1}{6} q\ b.$$

Momentele din secţiunile din vârful montanţilor:

$$M_1 = -\frac{13}{96} q\ b^2, \qquad M_3 = \frac{1}{12} q\ b^2,$$

$$M_2 = -\frac{1}{48} q\ b^2, \quad M_4 = -\frac{1}{12} q\ b^2.$$

Lângă nodul 2 în secţiunea barei (riglei) din stânga:

$$M = -\frac{11}{96} q\ b^2$$

Lângă nodul 2 în secţiunea barei din dreapta:

$$M = \frac{9}{96} q\ b^2.$$

In porţiunea dela articulaţia S până la nodul 3 momentele în cadru sunt egale cu zero.

88. Sarcina $P = 1$ poate să se deplaseze numai pe talpa superioară. Independent de poziţia sarcinii, momentul şi forţa tăietoare din secţiunea k şi efortul normal în secţiunea m se vor exprima numai în funcţie de împingere; de aceea liniile lor de influenţă vor fi asemănătoare, însă scările lor vor fi diferite şi se vor determina din expresiile:

$$M_k = Hy_k, \qquad Q_k = H; \qquad \text{şi} \qquad N_k = -H$$

în care y_k este distanţa dintre secţiunea k şi articulaţia de reazim.

Forţa tăietoare Q în secţiunea m a sistemului se determină prin ecuaţia $Q_m = A$; de aceea, linia de influenţă are aceeaşi formă ca şi linia de influenţă într'o secţiune a unei grinzi cu console.

89. Când sarcina $P = 1$ se găseşte pe porţiunea dintre secţiune şi articulaţia dela cheie, ecuaţiile liniei de influenţă ale barelor indicate în problemă se vor scrie astfel:

$$O_1 = -V_a \cdot \frac{d}{h}.$$

$$O_2 = \frac{-1}{h_2}(V_a \cdot 2d - Hy_2)$$

$$D_1 = V_a \operatorname{ctg} \alpha$$

în care h_1 şi h_2 sunt braţele de pârghie ale efortului.

Contururile acestor linii de influență se văd în fig. L.

90. Sarcina care se găsește în jumătatea din stânga a arcului $C\,S_2\,D$, se descompune în două reacțiuni: cea din dreapta este neapărat îndreptată după linia DS_2, iar cea din stânga își schimbă direcția în raport cu poziția sarcinii. Intr'un caz particular, ea poate fi îndreptată după linia articulațiilor BC; pentru această direcție a sarcinii corespunzătoare poziției reacțiunilor se determină punctul zero f_2 al liniei de influență.

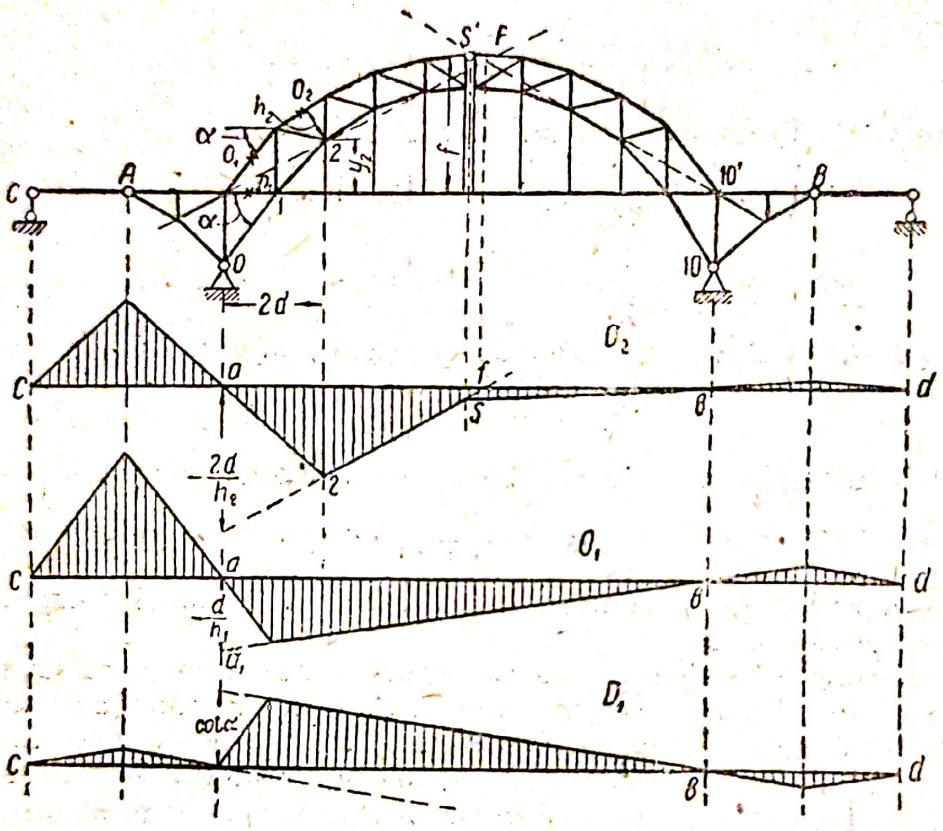


Fig. L

Linia de influență pentru secțiunea arcului se construește ca și pentru un arc obișnuit cu trei articulații. Linia care o reprezintă în partea din dreapta se prelungește, trecând prin zero pe verticala în dreptul reazimului B pe lungimea consolei. Apoi, prin vârful ordonatei care corespunde cu extremitatea consolei, se duce o dreaptă prin proiecția punctului zero f_2 și se continuă până la verticala de sub articulația S_2. Dela vârful ordonatei astfel obținute, linia de influență variază liniar până la zero în dreptul articulației D.

Se recomandă să se construiască linia de influență a efortului normal pentru o secțiune oarecare a arcului principal.

91. Impingerea se determină cu ecuația:

$$H = \frac{M_8}{h + f}$$

Când sarcina $P = 1$ se găseşte pe porţiunea între secţiune şi articulaţia S, ecuaţiile liniilor de influenţă ale eforturilor din barele tălpilor se vor scrie astfel:

$$Q_m = \frac{-1}{h}\left[V_a \cdot a_m - H(y_m + h)\right]$$

$$U_m = \frac{1}{h}\left[V_a a_m - H y_m\right]$$

Dreapta AB trebue să servească drept bază pentru determinarea punctelor zero.

Punctul zero al liniei de influenţă U_m este determinat de intersecţia dreptei BS cu dreapta care trece prin articulaţia A şi vârful ordonatei egale cu y_m măsurată în dreptul nodurilor m dela linia de bază AB.

92. Impingerea se determină prin ecuaţia:

$$H = \frac{M_{s'}}{f}$$

deci ca bază pentru stabilirea punctelor zero ale liniilor de influenţă trebue să servească dreapta $A_o S B$.

Din ecuaţia efortului O_n rezultă că pentru a găsi punctul zero al liniei de influenţă, trebue să aflăm intersecţia dreptei BS' cu dreapta care trece prin articulaţia A şi vârful ordonatei $(y_n + h)$ măsurată dela linia de bază. După ce se va găsi poziţia punctului zero, linia de influenţă se construeşte pe calea obişnuită pentru sistemele cu arce.

Eforturile din diagonala D se determină din expresia momentului faţă de punctul k. Poziţia punctului zero al liniei de influenţă se determină prin intersecţia dreptei BS cu dreapta care trece prin articulaţia A şi vârful ordonatei, determinată din relaţia $(y_n - b \operatorname{tg} \beta)$, deci prin punctul k'; punctul F' se găseşte în dreapta reazimului B.

93. Linia de influenţă a reacţiunii V_a se determină prin ecuaţia:

$$V_{a'} = V_a - H \operatorname{tg} \varphi;$$

punctul zero este proiecţia punctului de intersecţie al dreptei DS_1 şi al dreptei care trece prin punctul C, sub un unghiu φ faţă de orizontală; prin el trece dreapta care reprezintă linia de influenţă, având ordonata

$$V_{a'} = V_a = 1$$

în dreptul reazimului din stânga.

Momentul în secţiunea grinzii este:

$$M_k = M_k^o - H y_k;$$

Punctul zero al liniei de influenţă se determină prin proiecţia punctului de intersecţie al dreptei DS_1 cu dreapta C_k.

Forţa tăietoare într'o secţiune se determină prin ecuaţia:

$$Q_k = Q_k^o - H \operatorname{tg} \beta.$$

Punctul zero al liniei de influenţă se determină prin proiecţia punctului F_q, intersecţia liniilor DS_1 cu CF_q, ultima linie fiind înclinată cu unghiul β faţă de orizontală.

Scanned with OKEN Scanner

94. După condițiile problemei, valoarea energiei potențiale din grindă se determină prin expresia:

$$U = \frac{P^2}{2l^2 EI}\left[\int_0^a (l-a)^2 x^2\, dx + \int_0^{l-a} a^2 (l-x)^2\, dx\right] +$$

$$+ \frac{k P^2}{2l^2 GF}\left[\int_0^a (l-a)^2\, dx - \int_0^{l-a} a^2\, dx\right];$$

$$U = \frac{P^2 (l-a) a}{2l}\left[\frac{(l-a) a}{3 EI} + \frac{k}{GF}\right]$$

Influența forței tăietoare asupra valorii energiei potențiale, în comparație cu influența momentului se apreciază prin următoarea relație:

$$m = \frac{3}{(l-a) a} \cdot k \cdot \frac{EI}{GF};$$

ea crește odată cu apropierea sarcinii de reazime și cu creșterea valorii razei de giratie.

95. Din datele problemei avem:

$$U = \frac{1}{EF} \cdot \left[\int_0^8 \frac{P^2}{4}\, dy + \int_0^5 \left(\frac{49}{110} P\right)^2 ds\right] +$$

$$+ \frac{1}{EF}\left[\int_0^3 \frac{(2 Py)^2}{11}\, dy + \int_0^5 \left(\frac{16}{35} PS'\right)^2 ds'\right]$$

$$U = \left[\frac{2{,}992}{EF} + \frac{256 \cdot 13}{3 \cdot 121 \cdot EI}\right] P^2$$

Influența forței axiale asupra valorii energiei potențiale se mărește cu creșterea raportului $\frac{I}{F}$, deci cu pătratul razei de giratie.

96. După completarea tabloului indicat în text obținem:

$$U = 2\,(256 + 256 + 1000 + 111{,}1 + 96 + 455{,}11)\,\frac{q^2}{2\,EF} =$$

$$= 2174\,\frac{q^2}{EF}$$

97. Unghiul de rotire al secțiunii provocat de acțiunea momentului considerat este:

$$\varphi = \frac{M}{EI} l$$

98. Din condițiile problemei rezultă:

$$U = \frac{P^2 d}{F}\left(\frac{1}{F \cos^3 \alpha} + \frac{\operatorname{tg}^3 \alpha}{F} + \frac{3}{2F} + \frac{5}{6}\frac{d^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{I}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

99. Înainte de a aplica forţa P, se găseşte acumulată în grindă următoarea cantitate de energie potenţială:

$$U_2 = \frac{1}{2\,EI}\int_0^l \frac{q^2\,x^2\,(l-x)^2}{4}\,dx = \frac{1}{240}\,\frac{q^2\,l^5}{EI}$$

Datorită forţei ce se aplică în plus, se va mai adăuga în grindă următoarea cantitate de energie potenţială:

$$\Delta U = 2\left[-\int_0^{\frac{1}{2}l} M_q\,\frac{P\,x}{2\,EI}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}l}\frac{P^2\,x^2}{4\,EI}\,dx\right] = \frac{P\,l^3}{48\,EI}\left(-\frac{5}{8}\,ql + \frac{P}{2}\right)$$

Incărcând simultan grinda cu ambele sarcini, cantitatea de energie potenţială acumulată va fi:

$$U = \frac{2}{EI}\int_0^{\frac{1}{2}l}\left[\frac{q\,x\,(l-x)}{2} - \frac{P}{1}\,x\right]^2 dx =$$

$$= \frac{q^2\,l^5}{240\,EI} - \frac{5}{384}\cdot P\cdot\frac{q\,l^4}{EI} + \frac{1}{96}\cdot P\cdot\frac{l^3}{EI}$$

100. Din alcătuirea fermei rezultă că, efortul în tirant provenit din sarcina Q este egal cu zero; eforturile din celelalte bare simetrice ori antisimetrice sunt:

$$\Delta U = \frac{1}{2}\,\frac{PQd}{EF\,\mathrm{tg}\,\alpha}$$

101. Din datele problemei rezultă:

$$\varphi_{cq} = \frac{q}{24\,EI}\,(l-2a)\,(l^2+2\,al-2\,a^2)$$

când $a = 0$, atunci: $\varphi_{oq} = \dfrac{ql^3}{24\,EI}$

când $a = \dfrac{l}{2}$, atunci $\varphi_{0,5\,l} = 0$.

102. Examinăm deplasarea după componentele ei verticale şi orizontale:

$$EI\,\Delta_{CH} = \frac{2}{3}\,Ph^3 + Ph^2b;\quad EI\,\Delta_{CV} = -P\,\frac{b^2h}{2} - P\,b\,\frac{h^2}{2};$$

$$\Delta_{cp} = \frac{Ph}{EI}\left[\left(\frac{2}{3}\,h^2 + h\,b\right)\sin\alpha - \left(\frac{b^2}{2} + \frac{bh}{2}\right)\cos\alpha\right]$$

Punctul c nu va avea deplasări pe direcţia determinată de unghiul α_0, pentru care expresia din paranteze este egală cu zero.

Scanned with OKEN Scanner

103. In realitate, elementele arcului lucrează numai la forţele axiale; de aceea variaţia unghiului φ este în funcţie numai de forţele normale:

$$\Delta\varphi = \frac{2}{EF}\int_0^{h/\sin\alpha}\left(-\frac{P}{2\sin\alpha}\right)\left(-\frac{\cos\alpha}{h}\right)ds = \frac{2P\cos\alpha}{EF\sin^2\alpha}$$

104. Când solicitările cresc numai într'un singur element al grinzii cu zăbrele, deplasarea nodului I se determină prin următoarea expresie:

$$\Delta_{1\sigma} = \overline{N}\frac{(-\sigma)\,l'_{3,7}}{E} = \frac{1}{4\sin\alpha}\frac{\sigma\cdot 5}{E}.$$

105. Reacţiuneá de pe reazim $A = 0$. Efortul axial din grindă se neglijează:

$$\delta_{cq} = \frac{ql^4}{64\,EI} + \frac{ql^2}{EF\sin^2\alpha\cos\alpha}.$$

106. După completarea tabloului indicat în textul problemei, mărimea variaţiei unghiulare se va determina prin suma termenilor care intră în ultimul rând al tabloului:

$$\Delta\varphi_P = -\frac{7P}{EF\,\mathrm{tg}^2\alpha} - \frac{ql^2}{2EF\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\sin\alpha}.$$

107. Calculul se efectuează neglijând termenul care intră în expresia lucrului barelor având curbura mare.

$$\Delta_{pH} = H\left[-2\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1}{2}(r\cos 30^0 - r\cos\varphi)\cdot\left(r\sin\varphi - \frac{r}{2}\right)\cdot\frac{r\,d\varphi}{2} + 2\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\cdot\frac{r\,d\varphi}{EF} - 2k\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1}{2}\cos\varphi\cdot\sin\varphi\,\frac{r\,d\varphi}{GF}\right].$$

După integrare şi introducerea valorilor:

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ şi } \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

obţinem:

$$\Delta_{pH} = H\left[-\frac{r^3}{EI}\left(\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{3}}{12}\pi\right) + \frac{3}{8}\frac{r}{EF} - \frac{3}{8}k\frac{r}{GF}\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

108. Forţele interioare din secţiunea barei provocate de acţiunea încărcărilor reale şi virtuale se determină prin următoarele valori :

$$M_p = Pr\,(1 - \sin\alpha)\,; \qquad \overline{M} = -\,r \sin(\varphi - \alpha)$$
$$N_p = P \sin\alpha \quad ; \qquad \overline{N} = \sin(\varphi - \alpha)$$
$$Q_p = P \cos\alpha \quad ; \qquad Q = -\cos(\varphi - \alpha)$$

în care φ este unghiul de înclinare al secţiunii faţă de orizontală.

Deplasările se determină prin suma următoarelor integrale, compuse după formula (155), la întocmirea căreia s'a admis $I' = r_1 S_o$ (152).

$$\Delta_{rp} = \frac{P}{E S_o r_1}\int_o^{\varphi} -\,r^3 \sin(\varphi - \alpha)\,(1 - \sin\alpha)\cdot$$

$$\frac{r_1}{r}\,d\alpha + \frac{P}{EF}\int_o^{\varphi} \sin\alpha \cdot \sin(\varphi - \alpha)\,r\,d\alpha -$$

$$-\,\frac{Pr}{EFr}\int_o^{\varphi} \sin\alpha \cdot \sin(\varphi - \alpha)\,r\,d\alpha +$$

$$+\,\frac{Pr}{EFr}\int_o^{\varphi} (1 - \sin\alpha)\sin(\varphi - \alpha)\,r\,d\alpha -$$

$$-\,k\,\frac{P}{GF}\int_o^{\varphi} \cos\alpha \cdot \cos(\varphi - \alpha)\,r\,d\alpha .$$

După integrare şi reducerea termenilor asemenea, obţinem:

$$\Delta_{rp} = \frac{Pr}{E}\left(\frac{1}{E} - \frac{r}{S_o}\right)\left(1 - \cos\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{\varphi}{2}\cos\varphi\right) -$$

$$-\,\frac{k\,P\,r}{G\,F}\left(\frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{\varphi}{2}\cos\varphi\right).$$

109. Din figură rezultă că deplasarea punctului C depinde numai de încovoierea stâlpului ;

$$\Delta_{cp} = \frac{1}{EI}\int_o^{h} (-\,Py)\cdot(-\,y)\,dy = \frac{Ph^3}{3\,EI}$$

Diferenţa între deplasările punctelor C şi D constă în luarea în considerare a deformaţiilor în sensul lungimii riglei (barei orizontale) :

$$\Delta_{DP} = \frac{Ph^3}{3\,EI} + \frac{Pa}{EF},$$

110. In secțiunea în care se determină unghiul de rotire, se aplică momentul convențional $M_o = 0$.

In toate barele grinzii :

$$\frac{\partial M}{\partial M_o} = \frac{l - x}{l}$$

Valoarea unghiului de rotire se determină prin expresia :

$$\varphi_{oq} = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{1}{8} qx\,(l-x)\,dx + \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{1}{2}l} \left[\frac{3}{8} q\,(l-x)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{q\,(l-x)^3}{2l} \right] dx = \frac{7}{384} \cdot \frac{ql^3}{EI}$$

111. Efortul în contrafișa grinzii este

$$D = - \frac{Pl}{l_1 \sin \alpha}$$

iar reacțiunea pe reazim

$$A = - P \frac{d}{l_1}.$$

Expresia deplasărilor după teorema lui Castigliano este :

$$\Delta_{Pp} = \frac{P}{EI} \int_0^d x^2\,dx + \frac{P}{EI} \int_0^{l_1} \frac{-d^2 \cdot x^2}{l_1^2} dx + \frac{P}{EF_2} \frac{l^2}{l_1^2 \sin^2 \alpha} \int_0^{l_1} \frac{dx}{\cos \alpha}$$

112. Pentru a alcătui expresia deplasărilor cu formula lui Castigliano, aplicăm pe direcția deplasării căutate forța $H_o = 0$.

In partea din stânga arcului, în toate secțiunile vom avea

$$\frac{\partial M}{\partial H_o} = - y \text{ și } \frac{\partial N}{\partial H_o} = \cos \varphi$$

Expresia deplasării :

$$\Delta_{Hp} = \frac{P\,(l-a)}{EIl} \int_0^a x\,y\,dx - \frac{Pa}{EIl} \int_0^{l-a} xy\,dx =$$

$$= - \frac{Pf}{3\,l^2\,EI} \cdot a \cdot (l-a)\,(l^2 + la - a^2).$$

In această ecuație nu sunt introduși termenii care conțin $H_o = 0$.

113. In fig. *M* sunt reprezentate curbele momentelor provenite din acțiunea forței H și a sarcinilor unitare, îndreptate după direcțiile deplasărilor căutate.

Deplasarea orizontală este :

$$E\,I\,\Delta_{kH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{4} \cdot \frac{5}{6} Hh + Hb \frac{h^2}{2} +$$

$$+ H \frac{h^2}{8} \left(\frac{5}{6} h - \frac{h}{6} \right) = \left(\frac{3}{16} h^2 + \frac{bh^2}{2} \right) H.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deplasarea verticală este :

$$E\,I\Delta_{kv} = -\frac{H\,bh}{2}(b+h).$$

114. Săgeata se calculează ținând seama de suprafața întregei curbe din încărcarea reală, după aceea rezultatul obținut se corectează ținând seama de suprafețele părții ACC (suprafața triunghiului ACC_1 și a segmentului parabolic AC_1).

$$EI\,\Delta_{cp} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\,q\,l^2\cdot l\cdot\frac{a}{2} - \frac{1}{4}\,qa^2\,(l-a)\,\frac{1}{3}\,a -$$

$$-\frac{2}{3}\cdot\frac{q\,a^2}{8}\cdot a\cdot\frac{a}{2}.$$

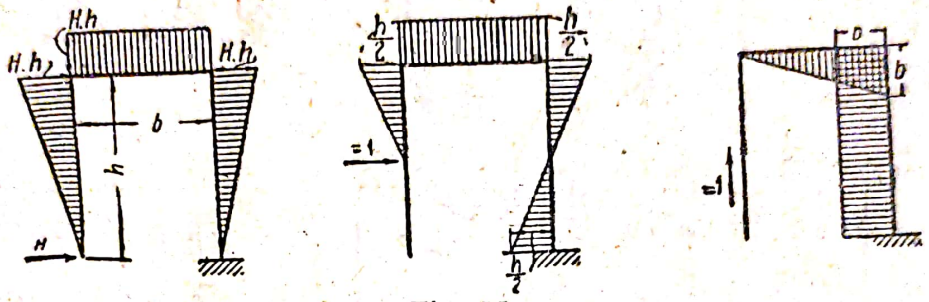


Fig. M

Pentru determinarea unghiului de rotire, se aplică în secțiune un moment unitar, care dă curba reprezentată în fig. *N*. Deplasarea se calculează în aceeași ordine ca și săgeata:

$$EI\,\varphi_{ca} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\,q\,l^3\,\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\,qa^2\,(l-a) - \frac{2}{3}\,\frac{qa^3}{8}.$$

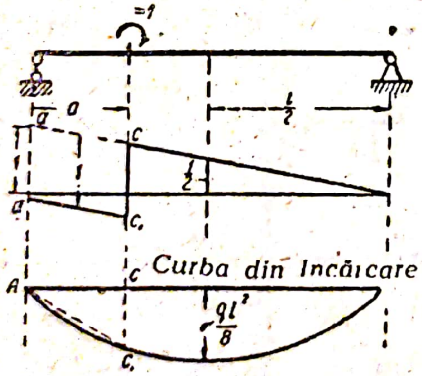


Fig. N

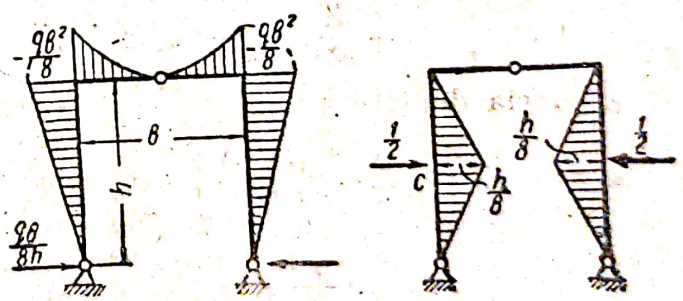


Fig. O

115. In fig. O sunt arătate epurele din încărcarea efectivă și din încărcarea virtuală unitară; cea din urmă este considerată ca fiind descompusă în încărcarea simetrică și antisimetrică.

$$EI\,\Delta_{cq} = -2\left(\frac{1}{2}\,h\,\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{qb^3}{8}\right).$$

116. In fig. P sunt construite curbele momentelor din încărcarea reală și virtuală, descompuse în sarcini simetrice și antisimetrice.

$$EI\,\varphi_{Aq} = \frac{q\,b^2}{384}(b-4h)$$

Scanned with OKEN Scanner

117. Pentru calculul deplasărilor, construim curbele momentelor din încărcarea reală şi virtuală (fig. R).

$$EI\ \Delta_{Dq} = 149{,}06$$

$$EI\ \Delta_{Aq} = 18 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 36$$

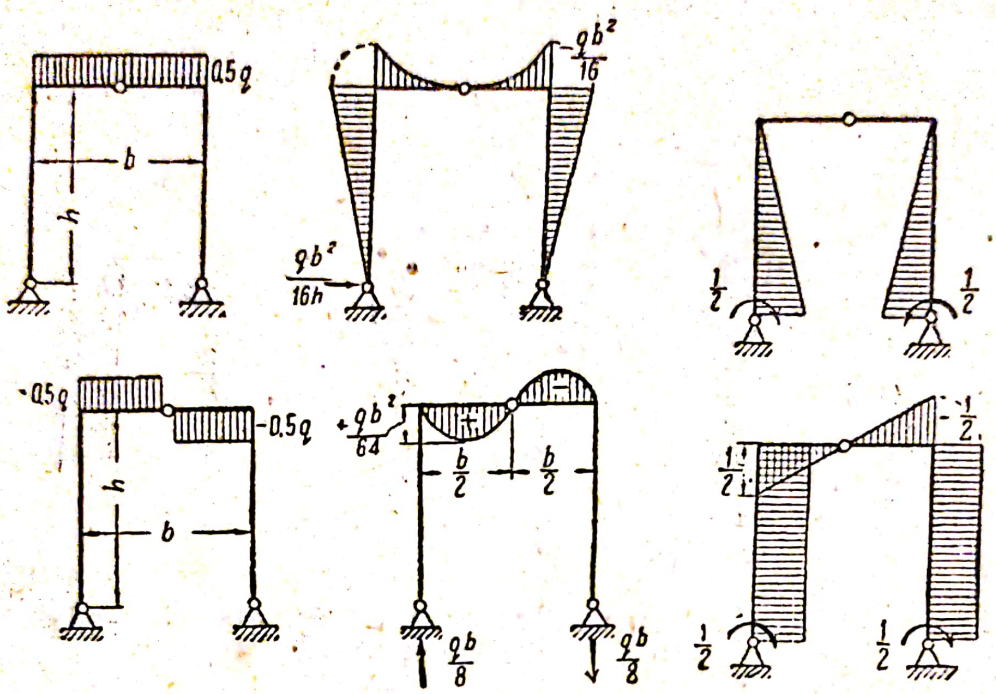


Fig. P

Când se ţine seama de influenţa forţei axiale, valoarea deformaţiei Δ_{Dq} trebue să fie completată cu influenţa deformaţiei din contrafişă:

$$EF\ \Delta_{Dq} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 2{,}5}{\sin^2 \alpha} = \frac{375}{4}$$

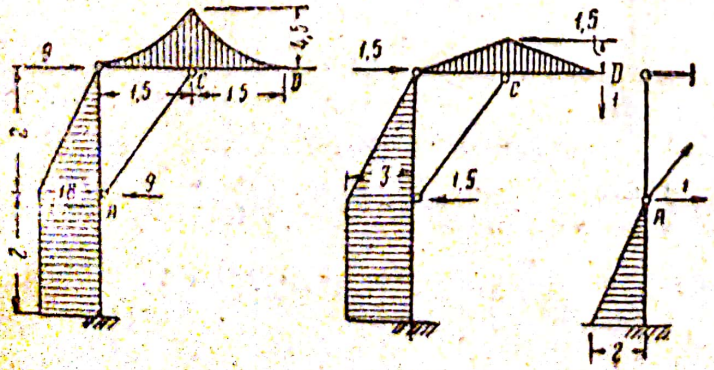


Fig. R

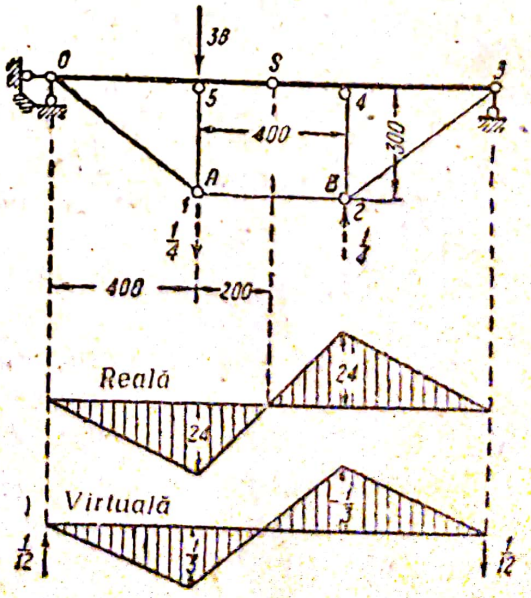


Fig. S

Scanned with OKEN Scanner

118. Sarcina dată este aplicată asimetric și dă pe porțiunea de grindă o curbă asimetrică a momentelor, în timp ce încărcarea unitară dă o curbă simetrică. Deplasarea depinde numai de forțele axiale:

$$N_{1-2} = 24\ t$$

$$N_{0-1} = N_{3-2} = 30\ t$$

$$N_{1-5} = N_{2-4} = -18\ t$$

$$N_{0\ 5} = N_{5\ 4} = N_{4-3} = -24\ t$$

Eforturile provocate de încărcarea virtuală sunt:

$$\overline{N}_{1\ 2} = 1\ t$$

$$\overline{N}_{0-} = \overline{N}_{2\ 3} = \frac{5}{4}$$

$$\overline{N}_{2\ 4} = -\frac{3}{4}$$

$$\overline{N}_{0-5} = \overline{N}_{5\ 4} = \overline{N}_{4-3} = -1.$$

Față de aceste date, deplasarea articulației va fi:

$$\Delta_{sp} = \left(\frac{1}{EF}\right)\left(24 \cdot 4 + 2.30 \cdot \frac{5}{4} \cdot 5 + 2 \cdot 18\frac{3}{4}\right) +$$

$$+ \frac{24 \cdot 12}{EF_1} = \frac{1}{EF} 552 + \frac{1}{EF_1} 288.$$

119. Pentru determinarea deformației barei AB, aplicăm la această bară un cuplu de forțe egal cu 1/4. Acest cuplu va provoca un moment încovoietor asimetric, a cărui curbă este arătată în fig. S.

$$\overline{N}_{5-1} = +\frac{1}{4} \quad \overline{N}_{4-2} = -\frac{1}{4}$$

$$EI\ \varphi_{AB} = \left(\frac{1}{2} 4 \cdot 24 \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 24 \cdot \frac{2}{9}\right) 2 = 32$$

120. Rezolvarea se simplifică dacă în loc de variația unghiului de înclinare al diagonalei φ față de orizontală, considerăm variația unghiului ϑ, care se formează între două diagonale simetrice.

Acest unghiu format la întretăierea diagonalelor (fig. T) este:

$$\vartheta = 180^0 - 2\varphi \quad \text{și} \quad \Delta\varphi \frac{-1}{2} \Delta\vartheta$$

La alcătuirea epurei deplasărilor, trebue să ținem seama de proprietățile grinzii cu zăbrele parabolice. Astfel la încărcarea ei totală cu sarcini uniform repartizate, proiecțiile eforturilor elementelor din tălpi sunt egale cu $\frac{1}{8} \cdot \frac{ql^2}{H}$, eforturile în diagonale sunt egale cu zero și cele din montanți sunt egale cu qd.

$$\Delta \vartheta = \frac{ql^2 d}{8HEF}\left(\frac{2}{h_3} + \frac{2}{h_3 \cos^2 \alpha} + \frac{2}{H}\right) - 2\,\frac{qd}{c},$$

în care c este brațul de pârghie, egal cu $\frac{dh_3}{H-h_3}$.

121. Rigla cadrului este supusă la o încălzire uniformă $\Delta t^\circ = 10^\circ$, care provoacă încovoierea ei și la o încălzire generală în axă cu $t^\circ = 15^\circ$. Stâlpii cadrului sunt supuși la o încălzire în axă cu 10°.

Pentru determinarea deplasării punctului c, aplicăm sarcina unitară, pe care o descompunem într'o sarcină simetrică și una antisimetrică

$$\delta = \frac{\alpha \cdot 10^\circ}{c}\int \overline{M}\, ds - 2\,\alpha \cdot 10 \cdot \overline{N}h =$$

$$= \frac{\alpha \cdot 10}{c}\left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot 3\right) - 20\,\alpha \cdot \frac{h}{2}$$

în care c este înălțimea secțiunii transversale.

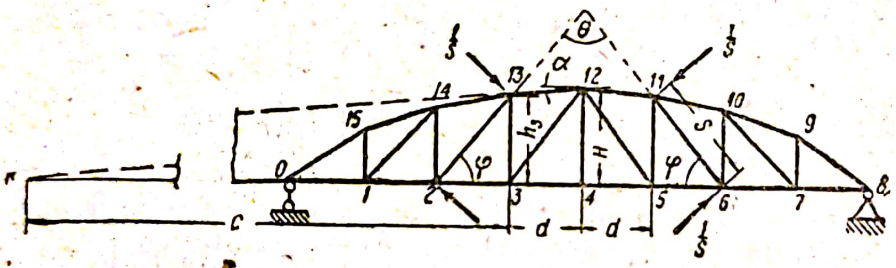


Fig. T

122. Eforturile în diferitele bare, provocate de încărcarea virtuală unitară, se determină cu o formulă de următorul gen: $n \cdot \frac{d}{2h}$, în care n este numărul panourilor dela reazimul din stânga până la nodul față de care se iau momentele.

In cazul când avem o încălzire uniformă a ambelor tălpi

$$f_{\frac{1}{2}lt} = 2\left(-\alpha 8 \cdot \frac{6\,d^2}{h} + \alpha 8 \cdot \frac{3\,d^2}{h}\right) = -48\,\alpha\,\frac{d^2}{h}$$

Când se încălzește numai talpa superioară cu 12°, rezultă:

$$f_{\frac{1}{2}lt} = -2\,\alpha \cdot 12 \cdot \frac{6\,d^2}{h} = -144\,\alpha\,\frac{d^2}{h}$$

123. Pentru a determina variația unghiurilor cadrului, îl considerăm sub acțiunea a două cuple de forțe unitare, după cum se arată în

fig. U, care provoacă o curbură a riglei și următoarele eforturi axiale:

$$N = -\frac{2}{b} \text{ și } N = -\frac{1}{h}$$

Incălzirea neuniformă în secțiune transversală a cadrului este $\Delta t^\circ = -12^\circ$ și încălzirea în axă este $t^\circ = -4^\circ$.

Deformația unghiurilor se determină prin expresia:

$$\Delta \varphi = -\frac{1}{2} \alpha \frac{12}{c}\left(h + \frac{1}{2} b\right) + 4 \alpha \left(\frac{2h}{b} + \frac{l}{2h}\right),$$

în care c este înălțimea secțiunii.

124. Pentru a putea alcătui ecuația liniei de influență a deplasărilor articulației, considerăm arcul încărcat cu sarcina $P = 1$, aplicată în articulație și cu sarcina $S = 1$ aplicată la distanța a dela reazimul din stânga. Intru cât încărcarea în articulație provoacă în arc deformații simetrice, descompunem sarcina S într'o încărcare simetrică și una antisimetrică.

Ținând seama numai de influența momentelor, obținem următoarea ecuație a liniei de influență:

$$E\,I\,\delta_{np} = 2\int_0^{\frac{1}{2}l}\left[\frac{1}{2}x - \frac{2ax\,(l-x)}{l^2}\right]\frac{2x^2 - xl}{2l}\,dx -$$

$$- 2\int_0^{\frac{1}{2}l}\frac{1}{2}(x-a)\frac{2x^2 - xl}{2l}\,dx;$$

$$E\,I\,\delta_{mp} = \frac{a}{12}\left(-\frac{a^3}{l} + a^2 - \frac{3}{40}l^2\right)$$

125. Pentru a putea determina variația unghiulară, aplicăm la razele care formează acest unghiu, două cuple. Aceste cuple provoacă eforturi numai în două bare:

$$\overline{N}_{11-2} = -\frac{\sin\alpha}{d}$$

$$\overline{N}_{14-13} = \frac{1}{d}$$

Eforturile din aceleași elemente provocate de sarcina mobilă variază în raport cu poziția sarcinii pe deschidere:

1. aplicând sarcina într'unul din nodurile aflate în dreapta nodului 14, avem:

$$\delta_{mp} = \frac{l-x}{l} \cdot \frac{1 + \sin\alpha}{EF\cos\alpha};$$

2. dacă sarcina este aplicată în nodul 14, atunci $x = 3\,d$ și avem:

$$\delta_{mp} = \frac{1}{EF} \cdot \frac{5 - 3 \sin \alpha}{8 \cos \alpha}$$

3. în cazul aplicării sarcinii într'un nod din stânga nodului 14:

$$\delta_{mp} = \frac{-x}{l} \cdot \frac{1 + \sin \alpha}{EF \cos \alpha}.$$

Forma generală a liniei de influență este arătată în fig. V.

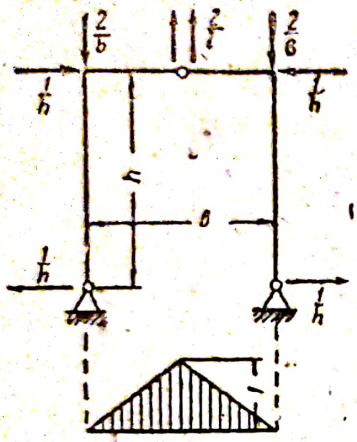


Fig. U

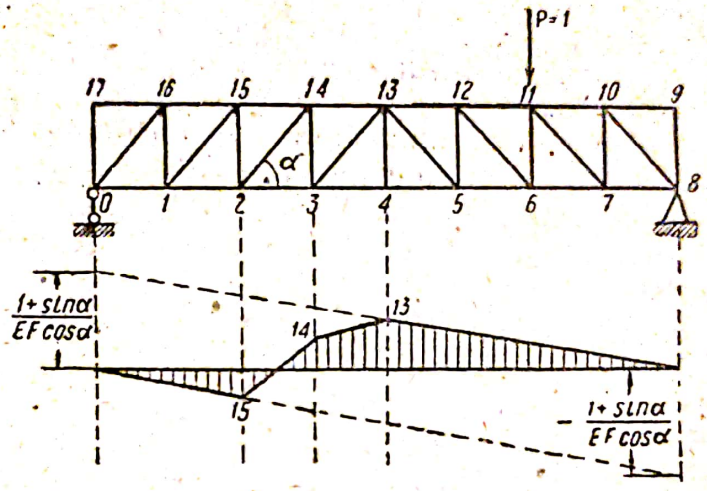


Fig. V

129. Eforturile S_3 și S_6 se determină din ecuația momentelor luate față de dreapta *ah*, ce reprezintă intersecția planelor din care fac parte celelalte forțe și față de linia verticală *kn*, care trece prin punctele de intersecție a aceloraşi forțe.

După ce am aflat efortul S_3, efortul S_2 se determină din ecuația momentelor luate față de dreapta *hl*. Celelalte eforturi se determină din condiția proiecțiilor forțelor pe axele de coordonate:

$$S_3 = \frac{Q\,h}{2\,b} \qquad S_4 = -\frac{Qh}{4\,b}$$

$$S_6 = -\frac{Q}{2} \qquad S_1 = -\frac{Q}{2}$$

$$S_2 = -\frac{Qh}{4b} \qquad S_5 = 0$$

Pentru determinarea eforturilor S_5 și S_1, se alcătuesc ecuațiile momentelor față de dreptele *mn* și *ch*.

$$-Q\frac{l}{2} + S_1\,l + S_5\left(\frac{1}{2}b + c\right) = 0$$

$$-Q\frac{l}{2} + S_1\,l - S_5\frac{b}{2} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

130. Ecuațiile necesare calculelor sunt:

Ecuația momentelor față de dreptele *hè* și *ok*:

$$S_1 (h \sin \gamma - b \cos \gamma) + S_4 h \cos \varepsilon - P \frac{b}{2} \sin \alpha = 0$$

$$- S_1 \frac{l}{2} \cos (\varphi - \gamma) - S_4 \frac{l}{2} \cos \varepsilon \sin \varphi = 0$$

Ecuația momentelor față de dreptele *mk* și *nf* este:

$$S_5 h - S_1 \frac{l}{2} \cos \gamma + Ph \cos \alpha \cdot \sin \beta = 0 \cdot$$

iar ecuația proiecțiilor:

$$- S_6 + S_4 \cos \varepsilon - S_1 \sin \gamma + P \cos \alpha \cos \beta = 0 ;$$

$$- S_2 + S_4 \sin \varepsilon + S_5 - P \cos \alpha \cdot \sin \beta = 0$$

$$- S_1 \cos \gamma - S_3 \cos \delta - P \sin \alpha = 0$$

131. Ambele sisteme geometrice sunt deformabile. In sistemul reprezentat în fig. 411-a, linia de intersecție a planelor, din care fac parte cele cinci legături, este paralelă cu legătura a șasea (4). In sistemul din fig. 411-b, linia verticală care trece prin legătura S_3 intersectează toate legăturile.

132. Reacțiunea se determină lesne din două ecuații ale momentelor, pentru fiecare pereche de legături:

$$Q \frac{b}{2} + (S_2 - S_1) a \cos \alpha = 0 .$$

$$Q \frac{h}{2} \sin \beta - (S_1 + S_2) \frac{a}{2} \sin \alpha = 0 .$$

Pentru determinarea eforturilor din celelalte bare, se alcătuește ecuația următoare:

$$S_3 = S_4 = - \frac{Qh}{2 a \sin \alpha}$$

$$S_6 = S_1 \text{ și } S_5 = S_2 .$$

133. Efortul din bara S_3 se determină din proiecția ei în plan (fig. 413-b), mărită cu segmentul $b_2 c_2 = \frac{d_2 c_2}{\sin \beta}$; cosinusul unghiului de înclinare al acestei bare față de orizontală se determină prin:

$$\cos \gamma = \frac{A_1 O_1}{\sqrt{h^2 + A_1 O_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \beta + 1}}$$

Efortul: $$S_3 = - \frac{P}{\sin \beta \cos \gamma} .$$

iar efortul: $S_2 = \dfrac{P + P \operatorname{ctg} \beta}{\cos \alpha}$

134. Efortul în bara S_1 poate fi determinat din ecuația momentelor față de linia $A_1 B_1$ (fig. 413). Separând nodul dela vârf și descompunând efortul S_1 după direcția verticală $S_1 \sin \alpha$ și orizontala $S_1 \cos \alpha$, paralele cu linia $B_1 A_1$, putem compune ecuația momentelor.

$$S_1 \sin \alpha \; B_1 O_1 + Ph = 0$$

deoarece: $B_1 O_1 = h \operatorname{ctg} \alpha$

atunci: $S_1 = -\dfrac{P}{\cos \alpha}$

135. Efortul este: $S_3 = -P \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma + P \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta$.

Eforturile S_2 și S_1 se determină din ecuațiile:

$$S_2 \sin \delta \cdot \cos \gamma + S_1 \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon + P \sin \alpha = 0;$$

$$-S_2 \cos \delta + S_1 \cos \varepsilon + P \cos \alpha \sin \beta = 0.$$

136. Sistemul reprezentat în fig. 423-a satisface condiția (189), însă este deformabil, deoarece nodul f nu este legat corect.

Sistemul arătat în fig. 423 este static determinat, iar ca triunghiu de bază poate fi luat un triunghiu oarecare.

Se pot găsi câteva combinații care satisfac întrebarea pusă în problemă.

De exemplu se pot considera îmbinările sistemelor 1—2—3—4—5 cu 6—7—8—9 sau ale sistemelor 1—2—3—4 cu 4—5—6—7—8—9, în ultimul caz nodul 4 conține trei condiții de legătură.

137. Barele înlocuitoare sunt barele 6—3 și 4—7, ceea ce se stabilește prin separarea succesivă a nodurilor.

138. Din separarea nodurilor 5, 6, 7 și 8 (fig. 424) tragem concluzia că din aranjamentul barelor care converg în acest nod, eforturile din barele 9—5, 9—6 și 9—8 trebue să fie de același semn. In această ipoteză, echilibrul în nodul 9 devine posibil numai când eforturile din toate barele indicate sunt egale cu zero (vezi analiza schemei fig. 421). Dacă eforturile din barele indicate sunt egale cu zero, atunci și eforturile din barele centurei 5—6—7—8 trebue să fie egale cu zero, deoarece ele reprezintă proiecțiile eforturilor din barele părții superioare. Față de cele demonstrate, devine evident că și în toate celelalte bare eforturile vor fi egale cu zero.

In sistemul reprezentat în fig. 423-b, în nodurile 1 și 7 se unesc câte trei bare, care nu sunt în același plan, de aceea eforturile din ele sunt egale cu zero (§ 101). Trecând succesiv la nodurile 3, 2, 4, 5, 6 și 8, se poate stabili că în fiecare nod rămân câte trei bare cu eforturi necunoscute, pe când eforturile din celelalte bare ale nodului sunt egale cu zero.

Astfel, se demonstrează că și eforturile din cele trei bare necunoscute sunt egale cu zero.

Scanned with OKEN Scanner

139. Sistemul din fig. 425-a ar fi satisfăcut condiţia de alcătuire a unui sistem în carcasă, dacă ar fi avut cinci bare, din care s'ar fi compus centura inferioară *ABCDE* şi câte două diagonale în planul superior şi inferior.

Aceste nouă bare lipsă se compensează cu nouă legături de rezemare suplimentare. In total, inclusiv legăturile de rezemare, sistemul are 45 de legături, ceea ce — având în vedere că sistemul are 15 noduri — satisface condiţia de determinare statică.

Sistemul reprezentat în fig. 425-b este în esenţă un sistem în carcasă, având două diagonale înlocuite cu două legături de rezemare. Examinând succesiv echilibrul nodurilor 18, 19, 12 şi 20, stabilim că barele 18—13, 19—12, 12—20, 20—11 şi cele simetrice din planul vertical nu lucrează. Din echilibrul nodurilor 11 şi 1, constatăm că barele 11—10 şi 1—10 nu lucrează. Din echilibrul nodului 10, rezultă că efortul din bara 10—2 este egal cu zero; apoi din echilibrul nodului 2, că şi efortul din bara 2—9 este egal cu zero etc.

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERII

Pag.

Cuvânt înainte — — — — — — — — — — — — — 5

Generalităţi

Introducere — — — — — — — — — — — — — — 7

Cap. 1

Noţiuni generale

1. Obiectul staticii construcţiilor — — — — — — — — — 10
2. Sarcini — — — — — — — — — — — — — — — 13
3. Metode de calcul — — — — — — — — — — — — 15
4. Reacţiunile în punctele de sprijin ale sistemelor plane — — — 17

Cap. 2

Sarcina mobilă

5. Linii de influenţă — — — — — — — — — — — — 22
6. Liniile de influenţă ale reacţiunilor momentelor şi forţelor tăietoare deduse din ecuaţiile de echilibru static — — — — — — — 23
7. Construirea liniilor de influenţă pe baza metodelor cinematice — 28
8. Construirea liniilor de influenţă pentru o grindă simplu rezemată, cu ajutorul metodelor cinematice — — — — — — — — 32
9. Proprietăţile liniilor de influenţă — — — — — — — — 34
10. Determinarea poziţiei cele mai defavorabile a sarcinilor — — 37
11. Calculul momentelor şi forţelor tăietoare cu ajutorul liniilor de influenţă — — — — — — — — — — — — — 41
12. Calculul forţelor tăietoare şi al momentelor, cu ajutorul sarcinilor echivalente — — — — — — — — — — — — 45

Sisteme cu grinzi

Cap. 3

Grinzi simplu rezemate

13. Momente şi forţe tăietoare din sarcini permanente — — — — 49
14. Momente şi forţe tăietoare în cazul sarcinilor mobile — — — 52
15. Momentul maximum maximorum — — — — — — — — 56

Cap. 4

Grinzi cu console simplu rezemate

16. Generalităţi — — — — — — — — — — — — — 62
17. Reacţiunea de pe reazime şi linia ei de influenţă — — — — 63
18. Momentele şi forţele tăietoare în secţiunile consolei şi liniile lor de influenţă — — — — — — — — — — — — 65
19. Momentele şi forţele tăietoare în secţiunile porţiunii dintre reazime şi liniile lor de influenţă — — — — — — — — 65
20. Grinzi complexe cu console (grinzi Gerber) şi condiţiile lor de determinare statică — — — — — — — — — — — 69
21. Calculul grinzilor Gerber cu console încărcate cu sarcini permanente — — — — — — — — — — — — — 71
22. Construcţia grafică a curbei momentelor într'o grindă Gerber — 73
23. Liniile de influenţă ale grinzilor Gerber — — — — — — 75

Pag.

Cap. 5

Grinzi cu zăbrele

24. Noțiuni generale — — — — — — — — — — — — — 78
25. Condițiile de determinare statică și de indeformabilitate — — 80
26. Terminologie — — — — — — — — — — — — — 84
27. Determinarea eforturilor în grinzile cu zăbrele după condițiile echilibrului static — — — — — — — — — — — 87
28. Metode grafice pentru determinarea eforturilor — — — — 95
29. Epura lui Cremona — — — — — — — — — — — 97
30. Cazuri particulare ale epurei lui Cremona — — — — — — 100
31. Construcția liniilor de influență prin secționarea grinzilor cu zăbrele 103
32. Construcția liniei de influență prin metoda separării nodurilor — 108
33. Semnul și mărimea eforturilor în barele grinzilor cu zăbrele în raport cu direcția diagonalelor în panouri — — — — — — 113
34. Influența conturului grinzii cu zăbrele asupra mărimii eforturilor în bare — — — — — — — — — — — — — 117
35. Aplicarea cinematicei la construirea liniilor de influență la grinzile cu zăbrele — — — — — — — — — — — — — 126

Cap. 6

Grinzi cu zăbrele cu bare compuse

36. Noțiuni generale despre modul cum lucrează grinzile cu zăbrele cu bare compuse — — — — — — — — — — — — 132
37. Determinarea analitică a eforturilor — — — — — — — 134
38. Construcția liniilor de influență — — — — — — — — — 136

Cap. 7

Grinzi cu zăbrele suplimentare

39. Structura interioară a grinzilor cu zăbrele suplimentare — — — 147
40. Calculul analitic și construcția liniilor de influență într'o grindă romboidală și dublu dreptunghiulară — — — — — — — — 149
41. Determinarea eforturilor prin metoda înlocuirii barelor — — — 158
42. Determinarea eforturilor din condițiile cinematice cu ajutorul diagramei viteselor — — — — — — — — — — — 161
43. Determinarea condițiilor de indeformabilitate — — — — — 165
44. Construirea liniei de influență cu ajutorul diagramei viteselor — 170

Cap. 8

Grinzi cu zăbrele în consolă

45. Caracteristicele grinzilor cu zăbrele simple în consolă — — — 180
46. Eforturile în elementele din deschidere și liniile lor de influență 181
47. Eforturile în elementele din consolă și liniile lor de influență — 183

Cap. 9

Grinzi cu zăbrele pe mai multe reazime static determinate

48. Alcătuirea grinzilor cu zăbrele static determinate pe mai multe reazime — — — — — — — — — — — — — — 186
49. Determinarea reacțiunilor cu ajutorul condițiilor de echilibru static — — — — — — — — — — — — — — — 190
50. Determinarea reacțiunilor cu ajutorul condițiilor cinematice — — 192

Sisteme cu împingeri

Cap. 10

Generalități

51. Noțiuni generale asupra sistemelor cu împingeri și alcătuirea lor 197
52. Determinarea reacțiunilor — — — — — — — — — — — 200

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

Cap. 11

Arce pline

53. Eforturi și momente — — — — — — — — — — — — 203
54. Poligonul și curba de presiune — — — — — — — — — 206
55. Linia de influență a momentului — — — — — — — — 210
56. Determinarea punctului de intersecție de valoare zero la liniile totale de influență — — — — — — — — — — — 212
57. Linia de influență a forței tăietoare — — — — — — — 214
58. Linia de influență a efortului axial — — — — — — — 216
59. Momentele la limita sâmburelui central — — — — — — 220
60. Axa optimă a unui arc cu trei articulații — — — — — — 222

Cap. 12

Arce cu zăbrele

61. Arce cu zăbrele cu trei articulații — — — — — — — — 228
62. Determinarea eforturilor din condițiile echilibrului static — — — 229
63. Determinarea eforturilor după metodele cinematicii — — — — 236
64. Influența conturului arcelor cu zăbrele asupra valorii și semnului efortului — — — — — — — — — — — — — — 239

Cap. 13

Arce static determinate cu console

65. Componentele reacțiunilor de pe reazime — — — — — — — 245
66. Momente și forțe tăietoare — — — — — — — — — — 244
67. Eforturile în arcele în zăbrele cu console — — — — — — 246

Cap. 14

Sisteme mixte

68. Noțiuni generale — — — — — — — — — — — — — 249
69. Metode de calcul — — — — — — — — — — — — 250

Cap. 15

Sisteme suspendate

70. Proprietățile sistemelor suspendate — — — — — — — — 258
71. Bazele pentru alcătuirea sistemelor suspendate — — — — — 258
72. Sistemul Gisclard — — — — — — — — — — — — 261

Metoda deplasărilor virtuale

Cap. 16

Teoremele fundamentale

73. Introducere — — — — — — — — — — — — — — 263
74. Expresia generalizată a lucrului mecanic al forțelor exterioare — 265
75. Expresia lucrului mecanic al forțelor interioare — — — — — 266
76. Expresia lucrului mecanic virtual în grinzile cu axa rectilinie — — 269
77. Expresia lucrului mecanic efectiv în barele cu axă rectilinie — — 269
78. Proprietățile energiei potențiale — — — — — — — — 271
79. Expresia lucrului mecanic la grinzile curbe — — — — — 275
80. Teorema reciprocității lucrului mecanic (Teorema lui Betti) — — 278
81. Teorema reciprocității deplasărilor (Teorema lui Maxwell) — — 280

Cap. 17

Determinarea analitică a deplasărilor

82. Expresia deplasărilor sistemelor (Formula lui Mohr-Maxwell) — — 281
83. Determinarea deplasărilor prin derivata expresiei energiei potențiale 285
84. Calculul deplasărilor cu ajutorul curbei momentelor, forțelor tăietoare etc. — — — — — — — — — — — — — 288

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

85. Simplificări la determinarea deplasărilor, datorite condiţiunilor de simetrie — — — — — — — — — — — — — — — 291
86. Determinarea deformărilor provocate de variaţiile de temperatură 293
87. Liniile de influenţă ale deplasărilor — — — — — — — — 302

Cap. 18

Determinarea deplasărilor cu ajutorul sarcinilor elastice

88. Noţiuni introductive — — — — — — — — — — — — — 305
89. Determinarea deplasărilor prin metoda momentelor statice — — 306
90. Intrebuinţarea poligonului funicular la construirea epurei deplasărilor — — — — — — — — — — — — — — — 310
91. Determinarea valorii sarcinii elastice în sistemele cu secţiune plină 312
92. Caz particular — — — — — — — — — — — — — — 316
93. Calculul sarcinilor elastice în sistemele cu bare articulate — — — 320
94. Construirea epurelor deplasărilor în sistemele cu împingeri — — 326
95. Concluzii asupra aplicării forţelor elastice — — — — — — 330

Cap. 19

Reprezentarea deplasărilor cu ajutorul diagramei lui Villiot

96. Motivarea construcţiei diagramei — — — — — — — — 331
97. Construirea diagramei pentru grinzile simple cu zăbrele — — — 332
98. Construirea diagramei la grinzile cu zăbrele suplimentare — — 335

Sisteme în spaţiu

Cap. 20

Calculul sistemelor în spaţiu static determinate, formate din bare articulate

99. Sistemele în spaţiu şi fixarea lor — — — — — — — — 337
100. Descompunerea forţelor după şase direcţii — — — — — — 339
101. Descompunerea unei forţe după trei direcţii date — — — — 342
102. Sisteme static determinate în spaţiu alcătuite din bare — — — 347
103. Calculul sistemelor în spaţiu prin descompunerea lor în sisteme plane 354
104. Determinarea eforturilor prin separarea nodurilor şi prin secţionare 356
105. Determinarea eforturilor cu ajutorul metodei înlocuirii barelor — 357
106. Determinarea deplasărilor — — — — — — — — — — 358

Rezolvarea problemelor din text şi răspunsuri — — — 359

LUCRĂRI APĂRUTE IN EDITU

1.	*N. A. Sohacevschi* . .	Organizarea exploatării l
2.	*P. N. Axenov*	Turnătoriile
3.	*P. V. Bartenev* . . .	Staţii şi noduri de cale fera
4.	*A. S. Ciudov*	Calculul planificat al selfcostu feroviare
5.	*D. D. Biziukin*	Construcţii de căi ferate, vol. I ş
6.	*V. I. Golubev*	Confecţionarea şi recondiţionarea p. prin sudură
7.	*N. Perciun*	Linii aeriene de telecomunicaţii, edi
8.	*D. P. Zagleadimov* . .	Organizarea circulaţiei în transportul
9.	*V. Selunschi şi S. geles*	Unelte pneumatice (Ediţia I şi II)
10.	*V. I. Turovţev şi V. I. Golubev*	Metode stahanoviste de revizie a vagoane
11.	*N K P S*	Manual pentru întreţinerea instalaţiilor de căilor ferate
12.	*N. G. Vinnicenko* . .	Finanţarea căilor ferate
13.	*G. M. Şahuniant* . . .	Terasamente de cale ferată
14.	*S. A. Beliunov* ştii . .	Planificarea în transportul feroviar
15.	*T. N. Hohlov*	Ridicarea fără foc a presiunii la locomotive
16.	*G. K. Evgrafov* . . .	Poduri de cale ferată, vol. I şi II
17.	*N. Z. Crivoruci* . . .	Organizarea exploatării vagoanelor
18.	*G. P. Vasiliev*	Locomotiva
19.	*A. V. Marcov* · *N. Pavlov*	Metode de reglare a parcului de vagoane goale
20.	*M. Mariş*	Descrierea instalaţiilor de semnalizare, centralizare şi blocare întrebuinţate la CFR, ed. I şi a II-a
21.	*I. Moldovanu*	Apărări de maluri şi corectări de râuri
22.	*K. Tihonov*	Compunerea şi descompunerea trenurilor pe timp de iarnă
23.	*B. N. Veden*	Tratat de construcţii de căi ferate, vol. I şi II
24.	*Gh. Ionescu*	Construcţia şi întreţinerea vagoanelor de cale ferată, vol. II şi III
25.	*G. P. Grin*	Organizarea manipulării mărfurilor în transportul feroviar
26.	*N. N. Zali* *V. V. Vulf*	Călăuza pentru repararea locomotivelor
27.	*M. I. Danov*	Tunele pe căi de comunicaţie
28.	*N K P S*	Manual pentru repararea pe loc a vagoanelor
29.	*P. S. Du*	Organizarea reparaţiei şi întreţinerii căii, vol. I. şi II
30.	—	Cartea ceferistului nr. 1. (Probleme de mişcare la căile ferate)

Scanned with OKEN Scanner

...ă a frânelor automate
... reparațiilor materialului rulant CFR

determinarea ...
— — — ...izarea complexă și metodele moderne de cal-
...eformărilor ... al locomotivelor
...ență ale de... ...pleme referitoare la teoria lucrului de manevră
... principiile exploatării locomotivelor
...rea d... Mecanizarea încărcărilor și descărcărilor în masă a mărfurilor
...cti...
...e... Călăuza pentru ungătorul de vagoane în stație
... Cartea ceferistului nr. 2. (Probleme de tracțiune la căile ferate)
... Cable de telecomunicații
... Bazele de organizare, normare și planificare a muncii în transportul feroviar
... Semnalizarea, centralizarea și bloc de linie
... Cartea ceferistului nr. 3. (Probleme de întreținerea căii)

...V. I.
... Revizia, reparația fără deslegare și întreținerea luninistă a vagoanelor
... Elemente de construcție vol. I
... Instalații de centralizare electrodinamice
... Regulatoare de circulație întrebuințate la Căile ferate române
... Elemente de bază ale căilor ferate
... Transportul mărfurilor pe căile ferate.

Scanned with OKEN Scanner